

Koła Eulera i diagramy Venna, czyli jaka jest różnica między kanarkiem?

... podnosi kwestię sposobu reprezentacji obrazami
ważnych logicznych kroków rozumowania.¹

(Rudolf Arnheim: *Visual Thinking*, 1969)

Logika, czyli zasady poprawnego rozumowania, jest wbudowana w umysł człowieka od zarania jego istnienia i dzięki temu, jak sądzę, mógł on stworzyć cywilizację. Pierwsze próby kodyfikacji tych zasad miały miejsce już w starożytnej Grecji – największe zasługi położył tu Arystoteles.² Jego system logiczny, zwany *sylogistyką*,³ chociaż obejmował tylko niewielką klasę prostych wnioskowań logicznych, stanowił od starożytności do końca XIX w. zasadniczy trzon nauczania logiki w Europie.

Sylogistyka. Podstawą sylogistyki jest pojęcie *sylogizmu* – dwuczłonowego rozumowania, w którym z dwu przesłanek określających pewne relacje między pojęciem M i pojęciem P oraz między pojęciem S i pojęciem M wyprowadza się konieczny i niezawodny wniosek o tym, jaka relacja zachodzi między pojęciem S a pojęciem P. Możliwe relacje między pojęciami oznaczane są literami „a”, „e”, „i” oraz „o”, a mianowicie „każde jest” (a), „żadne nie jest” (e), „niektóre jest” (i) oraz „niektóre nie jest” (o). W zależności od kombinacji tych czterech relacji mamy wiele rodzajów sylogizmów. Powszechnie znanym klasycznym przykładem sylogizmu jest rozumowanie:

- 1) Każdy człowiek jest śmiertelny.
- 2) Sokrates jest człowiekiem.

Zatem:

- 3) Sokrates jest śmiertelny.

To rozumowanie należy do jednego ze schematów poprawnych sylogizmów o postaci:

- 1) Każde M jest P. [MaP]
- 2) Każde S jest M. [SaM]

Zatem:

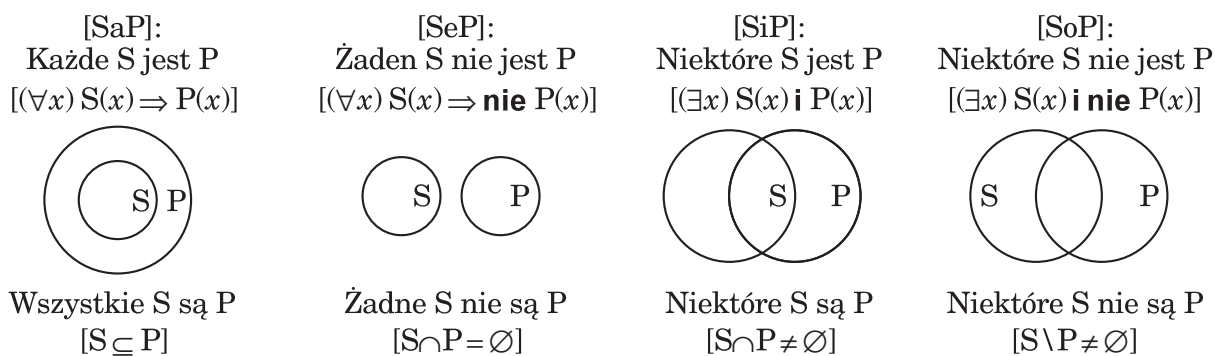
- 3) Każde S jest P. [SaP]

W terminologii sylogistyki ten schemat zaliczany jest do tzw. *pierwszej figury* sylogizmu i nosi nazwę *trybu Barbara*. Sylogistyka kataloguje wszystkie możliwe schematy tego typu i określa, które z nich przedstawiają poprawne rozumowania. Spośród 64 możliwych kombinacji czterech relacji między pojęciami, 24 kombinacje przedstawiają poprawne schematy rozumowania. Z tych schematów tylko 19 jest istotnie różnych, a pozostałe 5 jest szczególnymi przypadkami innych. Te 19 schematów nazwano *trybami*, nadano im mnemotechniczne nazwy (jak *Barbara* powyżej: ciąg samogłosek w nazwie określa kolejne relacje w zdaniach sylogizmu) i podzielono na 4 klasy zwane *figurami*.

Zauważmy jeszcze, że w przykładzie powyżej Sokrates pełni rolę pojęcia S, które w schemacie może zasadniczo mieć więcej niż jeden desygnat, stąd poprawnie należałoby napisać „Każdy Sokrates jest człowiekiem”. Jeśli jednak interesuje nas tylko jeden konkretny Sokrates, możemy ograniczyć się do tego jednego desygnatu, opuszczając słowo „każdy” przed S.

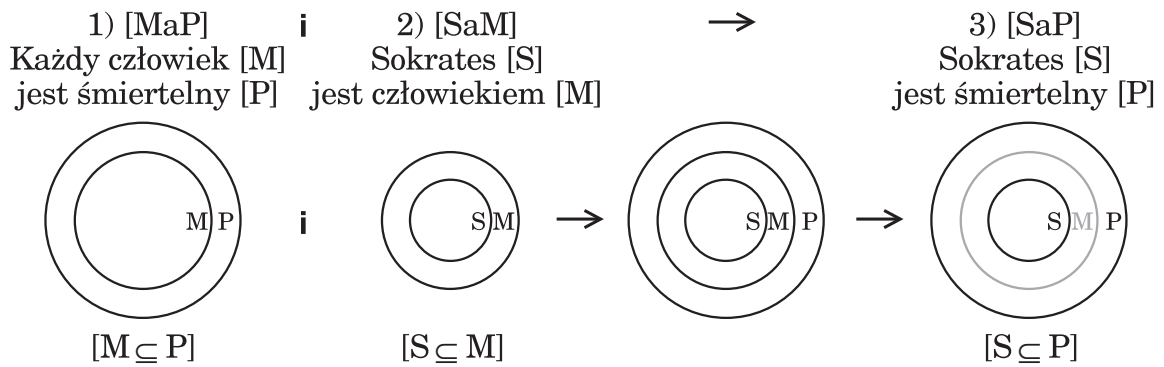
Jak wynika z samej nazwy logiki (po grecku „logos” to pierwotnie „słowo”), była ona uprawiana zasadniczo w formie językowej. Schematów poprawnych sylogizmów uczono się na pamięć i stosowano mechanicznie, nie pytając, dlaczego właściwie dany schemat jest poprawny. Forma językowa nie pozwalała na „naoczne” zrozumienie sensu danego schematu. Mógłby w tym pomóc odpowiedni diagram. Pewne wzmianki w traktacie Arystotelesa wskazują, że już on sam stosował proste diagramy (choć żaden z nich się nie zachował).⁴ Nie służyły one jednak rozumowaniu za pomocą sylogizmów, a tylko ich klasyfikacji lub mnemotechnicznemu opisowi ich struktury, podobnie jak diagramy pojawiające się w późniejszych traktatach logicznych.⁵

Koła Eulera. Dopiero w wieku XVIII powstała diagramowa reprezentacja pozwalająca przedstawiać rozumowania sylogistyczne, zwana kołami Eulera.⁶ Wyniknęła ona z postępującej zmiany interpretacji pojęć logicznych – oprócz pierwotnej interpretacji *intensjonalnej* (w terminach pojęć i ich cech) pojawiła się interpretacja *ekstensjonalna* (w terminach zbiorów obiektów wyznaczanych przez dane pojęcie lub posiadających daną cechę).⁷ Przy tej interpretacji zbiory obiektów występujące w sylogizmie można było reprezentować kołami, a relacje rachunku zbiorów (zawieranie się i przecinanie tych kół) okazały się dobrze odpowiadać czterem relacjom między pojęciami, które mogą występować w zdaniach sylogizmu, a mianowicie, jak ustalił Euler:

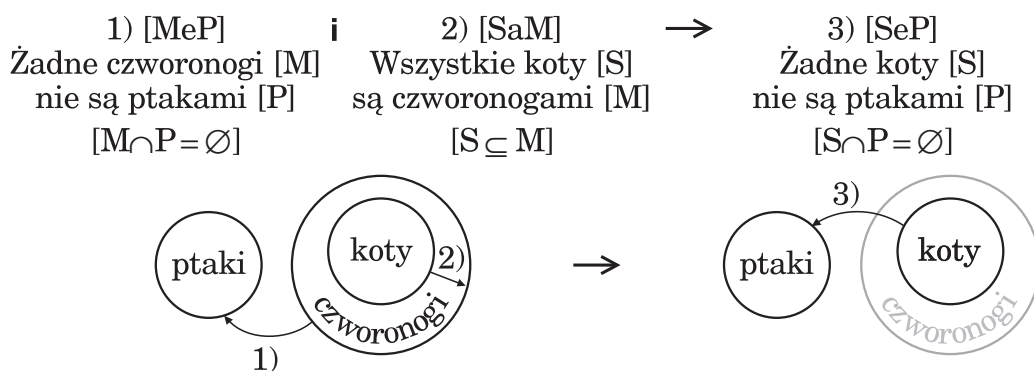


Nad diagramami podano opis relacji w tradycyjnej postaci słownej oraz w postaci formuł rachunku predykatów,⁸ natomiast pod nimi – w terminach zbiorów obiektów: słownie i w symbolice teorii zbiorów. Symbol „ \subseteq ” oznacza zawieranie się zbiorów, „ \cap ” to przecięcie zbiorów (część wspólna), „ \emptyset ” oznacza zbiór pusty, a „ \setminus ” różnicę zbiorów (podzbiór tych elementów zbioru S, które nie należą do zbioru P). Zauważmy pewien istotny szczegół tej reprezentacji – dwa przecinające się koła interpretowane są na dwa różne sposoby, w zależności od położenia etykiety S oznaczającej jeden ze zbiorów. W pierwszym przypadku (relacja SiP) zwracamy uwagę na część wspólną zbiorów S i P, zaś w drugim przypadku (relacja SoP) na tę część zbioru S, która nie należy do zbioru P. Z tego też względu w kołach Eulera etykiety zbiorów umieszcza się zawsze wewnątrz kół. Właściwe użycie tych etykiet jest warunkiem prawidłowego użycia i interpretacji kół Eulera (o czym często się zapomina w popularnych pracach używających tych kół).

By wykonać rozumowanie sylogistyczne diagramowo za pomocą kół Eulera, należy na jednym diagramie przedstawić obie przesłanki danego sylogizmu w taki sposób, by koła odpowiadające wspólnemu pojęciu M się pokryły. Następnie należy odczytać z diagramu, która z relacji przedstawionych na rysunku powyżej wiąże pojęcia S i P, by uzyskać logiczną konkluzję rozumowania. Oto odpowiednia procedura krok po kroku dla przykładu z Sokratesem:



A oto inny przykład opisany w terminach zbiorów obiektów, w którym opuszczono szczegółowe rozpisanie kolejnych kroków rysowania, zamiast tego zaznaczając na diagramie strzałkami i numerami odpowiednie relacje:



Schemat tego sylogizmu należy również do pierwszej figury i nosi nazwę *trybu Celarent*.

Diagramy te pokazują naocznie, czy dany schemat jest poprawny, czy nie – dzięki temu nie musimy pamiętać wszystkich poprawnych schematów, zawsze możemy sprawdzić jego poprawność, rysując odpowiedni diagram.

Jednak już Euler zauważył,⁹ że jego koła nie są zbyt dobrze dopasowane do wnioskowania za pomocą niektórych sylogizmów. Jeden z problemów (którym zajmiemy się jeszcze oddzielnie w innym odcinku) zilustrujemy na przykładzie sylogizmu zwanego *trybem Ferio*:

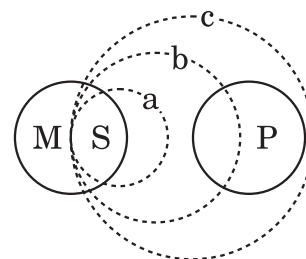
1) Żadne M nie jest P. [MeP]	1) $(\forall x)$ jeżeli $M(x)$ to nie $P(x)$,	1) $M \cap P = \emptyset$,
2) Niektóre S jest M. [SiM]	2) $(\exists x)$ $S(x)$ i $M(x)$.	2) $S \cap M \neq \emptyset$.
Zatem:	Zatem:	Zatem:
3) Niektóre S nie jest P. [SoP]	3) $(\exists x)$ $S(x)$ i nie $P(x)$.	3). $S \setminus P \neq \emptyset$.

Sylogizm zapisano w trzech postaciach – tradycyjnej słownej, w rachunku predykatów i w terminach teorii zbiorów. Niepoprawna gramatycznie forma zdań zaczynających się od słowa „niektóre” wynika z przeniesienia z greki i łaciny przyjętych w sylogistyce konwencji językowych, niezbyt dobrze pasujących do języka polskiego.

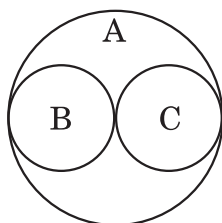
Próbując poprawnie narysować koła Eulera dla tego przykładu, zauważymy, że koło S może, nie naruszając żadnej z dwu przesłanek (1) i (2), przyjąć trzy różne położenia – (a), (b) lub (c) na rysunku. Innymi słowy, znowu mamy do czynienia z dywergencją. W czym nie byłoby nic szczególnie niepokojącego, gdyby nie to, że próbując dla każdego z tych położenia odczytać,

według podanego wyżej klucza dla kół Eulera, odpowiednią relację między kołami S i P, dostaniemy trzy różne wnioski:

- 3a) Żadne S nie jest P. [SeP]
- 3b) Niektóre S nie jest P. [SoP]
- 3c) Każde P jest S. [PaS]

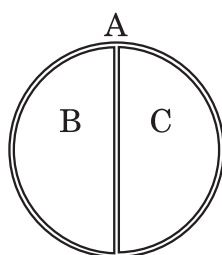


Który z nich jest poprawny? Przyjrzyjmy się uważniej diagramowi: niezależnie od tego, czy koło S jest w położeniu (a), (b), czy (c), zawsze jego część oznaczona etykietą S zawarta jest w kole M, a więc jest rozłączna z kołem P. Ponadto wniosek podany słownie w trzecim przypadku (3c), uzyskany na podstawie wzajemnego położenia tylko kół S i P, nie obejmuje pełnej informacji o relacji między pojęciami S i P. Na diagramie wyraźnie widać, jeśli uwzględnić także koło M, że P nie tylko zawiera się w S, lecz także część S na pewno nie zawiera się w P (jako zawarta w M), a więc pełna informacja tutaj obejmuje również relację [SoP] z przypadku (3b). Czyli „wspólnym mianownikiem” wszystkich trzech konfiguracji, tj. tezą słuszną w każdym z tych przypadków jest zdanie (3b) [SoP], które jest zatem poprawną konkluzją tego sylogizmu. Jak widać, i w tej początkowo kłopotliwej sytuacji to jednak diagram pozwolił nam znaleźć poprawną konkluzję sylogizmu.



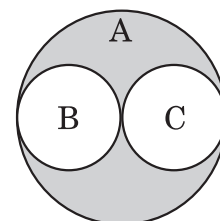
Koła Eulera mogą być stosowane nie tylko do wnioskowań sylogistycznych, lecz także do ilustracji innych relacji między zbiorami lub pojęciami. Rozważmy relację „B i C oba zawierają się w A i są rozłączne” (w notacji teorii zbiorów: $B \subseteq A$, $C \subseteq A$ i $B \cap C = \emptyset$). Za konkretny przykład może posłużyć tu stwierdzenie, że żadne koty (B) nie są psami (C), a zarówno koty (B), jak i psy (C) są czworonogami (A). Relację tę można przedstawić za pomocą kół Eulera jak obok.

Gdybyśmy jednak chcieli dodać do powyższej specyfikacji dodatkowy warunek, że „wszystkie elementy zbioru A zawierają się albo w B albo w C” (czyli $A = B \cup C$; opisuje to np. sytuację, w której A = ludzie, B = chorzy, a C = zdrowi), to nie zdołamy przedstawić tego kołami Eulera: jakkolwiek byśmy je ustawiali, nie uda się sprawić, by część obszaru koła A mieszcząca się poza kołami B i C była pusta.



By zwiększyć ekspresywność tych diagramów, próbowano różnych sposobów. Jednym z nich jest odstępstwo od kół na rzecz dowolnych kształtów obszarów. Wtedy moglibyśmy przedstawić naszą relację tak, jak po lewej. Nie jest to jednak wygodna forma w tym przypadku – nie da się umieścić etykiety A wewnątrz odpowiedniego obszaru (dla zapewnienia poprawnej interpretacji diagramów Eulera), a podwójne kontury, zamiast być odczytane jako nakładające się granice różnych

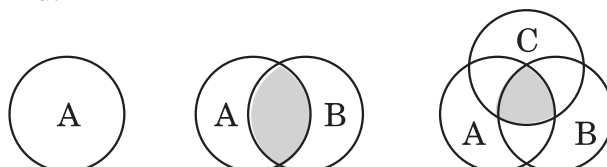
zbiorów, mogą zostać błędnie zinterpretowane jako sugerujące, że między nimi istnieją jakieś elementy zbioru A. Innym sposobem było zakolorowanie (zwykle na szaro) tych obszarów, które mają być puste, jak na diagramie z prawej. Sposób ten pochodzi z diagramów Venna omówionych poniżej i stosuje się go tylko wtedy, gdy zwykłej metody (za pomocą rozłączności odpowiednich obszarów diagramu) nie da się zastosować.



Zawsze jednak można znaleźć takie przykłady relacji między zbiorami, których nie daje się bez trudu przedstawić takimi ulepszonymi diagramami, albo okazuje się to w ogóle niemożliwe. Nie można się temu specjalnie dziwić, gdyż różnorodność struktur dowolnych zbiorów jest

znacznie większa niż różnorodność kształtów obszarów na płaszczyźnie, zwłaszcza jeśli na te kształty nałożymy jeszcze jakieś ograniczenia, np. że mają to być tylko koła, obszary wypukłe, czy też spójne (czyli w jednym kawałku). Dlatego szukano innych rozwiązań.

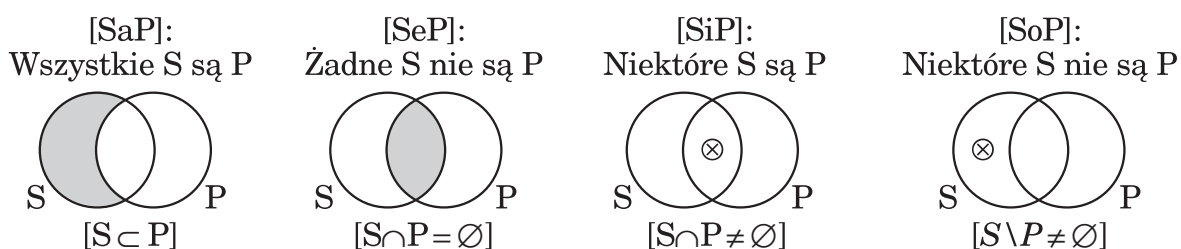
Diagramy Venna. Kolejną ważną propozycją stały się diagramy Venna.¹⁰ W tych diagramach zamknięte kontury, reprezentujące n zbiorów obiektów, ustawione są zawsze w ten sposób, by dzielić płaszczyznę na tyle i takich obszarów, by każdy przedstawiał inną kombinację należenia lub nienależenia do każdego z tych zbiorów, i by wszystkie takie możliwe kombinacje występowały na diagramie. W diagramach Venna dla 1, 2 oraz 3 zbiorów używa się zwykle kół, jak na rysunku.



Jeden kontur dzieli płaszczyznę na dwa obszary – punkty należące do danego zbioru (wewnątrz konturu) i punkty do niego nie należące (na zewnątrz konturu). Dwa kontury rysuje się tak, by uzyskać 4 obszary – punkty nie należące do żadnego ze zbiorów, punkty należące tylko do jednego z nich i punkty należące do obu zbiorów (zamalowane na szaro na rysunku). Dla trzech konturów mamy odpowiednio 8 obszarów (na szaro zaznaczono obszar należący do wszystkich zbiorów). Ogólnie, n zamkniętych konturów ustawionych w ten sposób dzieli płaszczyznę na dokładnie 2^n obszarów.

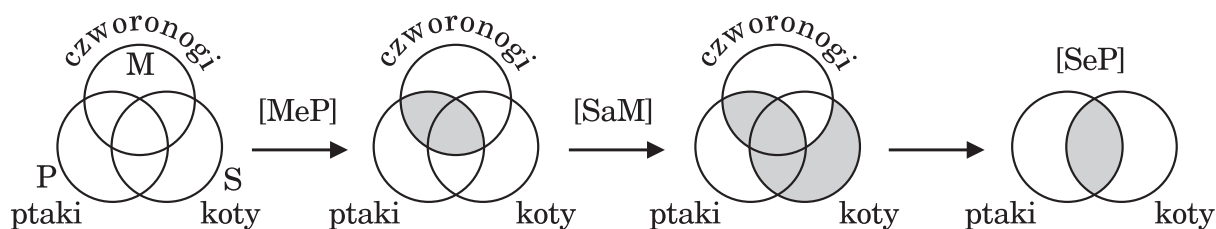
Diagramy Venna (zwłaszcza dla małej liczby zbiorów) są często mylone z kołami Eulera.¹¹ Jedni autorzy uważają, że diagramy Venna powinno się nazywać diagramami Eulera, bo to Euler je pierwszy wynalazł, a inni na odwrót – używają terminu „diagramy Venna” na oznaczenie rysunków, które najwyraźniej są kołami Eulera. Jest to kolejny przejaw słabej znajomości tematyki diagramów u niektórych matematyków.¹² Zasadniczą różnicę między tymi dwoma typami diagramów uwidocznili zapis sylogizmów za pomocą diagramów Venna.

Za pomocą diagramów Venna cztery typy zdań występujących w sylogizmach oznacza się jak następuje:



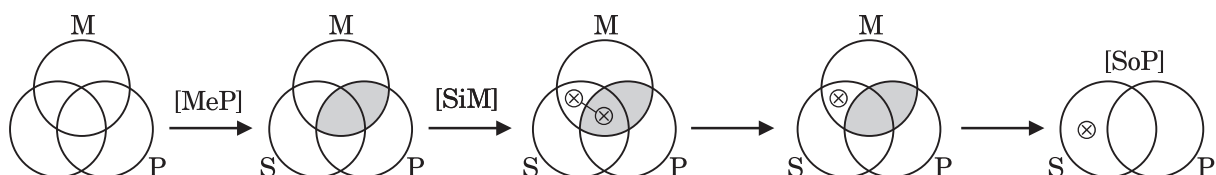
Tutaj zamalowanie obszaru kolorem szarym oznacza, że jest on pusty (nie zawiera żadnych obiektów), zaś umieszczenie symbolu ⊗ oznacza, że tak zaznaczony obszar jest niepusty.¹³ Położenie etykiet zbiorów nie ma teraz znaczenia, zwykle umieszcza się je na zewnątrz krzywych. W kołach Eulera obszar pusty reprezentuje się przez jego brak na diagramie (czyli za pomocą struktury diagramu), podczas gdy w diagramach Venna wszystkie możliwe kombinacje przecinania się konturów są zawsze przedstawione, więc fakt, że niektóre z nich są puste trzeba specjalnie oznaczać przez zamalowanie odpowiednich obszarów. Innymi słowy, w kołach Eulera narysowany kontur w całości oznacza pewien zbiór obiektów, natomiast w diagramach Venna zbiór obejmuje tylko te podobszary konturu, które nie są zamalowane na szaro.

Przykładowy sylogizm trybu Celarent, przedstawiony wcześniej za pomocą kół Eulera, przy użyciu diagramów Venna należałoby przedstawić następująco:



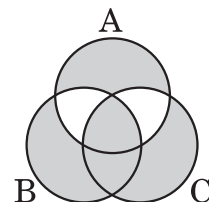
Ostatniego kroku (wymazania koła M) często się nie robi przy nieformalnym rozumowaniu, lecz odczytuje się wniosek bezpośrednio z pełnego diagramu. Istotna jest reguła postępowania z obszarami zamalowanymi na szaro – otóż przy usuwaniu konturu zbioru należy usunąć szarości ze wszystkich podobszarów, które po usunięciu tego konturu przestają być oddzielone konturem od podobszarów niezamalowanych.

Drugi z przykładowych sylogizmów (tryb *Ferio*), który sprawiał kłopot kołom Eulera, teraz daje się bez trudności przedstawić diagramami Venna:



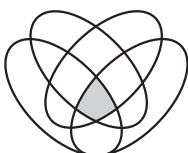
Dodatkowych wyjaśnień wymaga sposób przedstawienia przesłanki [SiM] oraz następne dwa kroki rozumowania. Mianowicie, według schematu dla zdania typu [SiM] powinniśmy wstawić symbol \otimes do obszaru wspólnego dla konturów S i M. Ten obszar jest jednak podzielony na dwa podobszary przez kontur P. W takim przypadku należy symbole \otimes wstawić do *wszystkich* składowych podobszarów i połączyć je linią w tzw. *x*-sekwencję. Z kolei, gdy symbol \otimes pojawi się w elementarnym obszarze, który jest zamalowany na szaro (czyli pusty), znaczek można usunąć. Gdy zaś usuwamy któryś z konturów, tak że znika część konturu podobszaru zawierającego znaczek \otimes , to znaczek zachowuje się inaczej niż szarości – nie znika, lecz zostaje przypisany całemu, większemu obszarowi powstałemu w wyniku połączenia podobszarów. Generalnie, *x*-sekwencja oznacza istnienie elementów zbioru, choć nie wiemy, w których obszarach zawierających znaczki \otimes tej sekwencji one się znajdują. Innymi słowy, linie łączące znaczki *x*-sekwencji mogą być interpretowane jako spójniki logiczne **lub**. Wnioskowania tego typu za pomocą kół Eulera i diagramów Venna zostały już w pełni sformalizowane.¹⁴

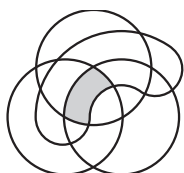
Za pomocą diagramów Venna można także bez problemów przedstawić konfiguracje zbiorów sprawiające trudność kołom Eulera, np. problem z rozłącznymi zbiorami B i C, które łącznie tworzą dokładnie zbiór A ma rozwiązanie jak obok.



Diagramy Venna wielu zmiennych.

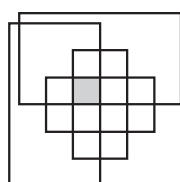
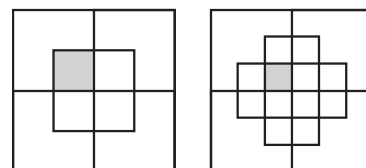
Dla większej liczby zmiennych (powyżej 3) nie da się już narysować diagramów Venna wyłącznie z użyciem kół. Już Venn to stwierdził i podał parę sposobów radzenia sobie z takimi diagramami. Podał np. diagram dla 4 zmiennych z użyciem jednakowych elips, jak obok. Na szaro zaznaczono obszar przecięcia wszystkich zbiorów. Podał też konstrukcję pozwalającą generować diagramy dla dowolnej liczby zmiennych. Dla 4



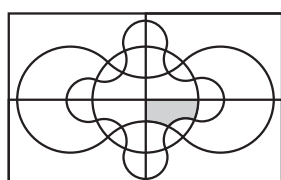
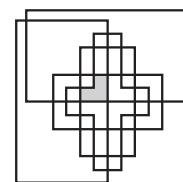


zmiennych, diagram z tej serii podano obok. Czwarty kontur to „kielbaska” narysowana wzdłuż konturu prawego dolnego koła w diagramie dla trzech zmiennych, tak, by kontur „kielbaski” dzielił wszystkie obszary elementarne tego diagramu na połowy tworząc potrzebne 8 nowych obszarów zawartych w dodanym czwartym zbiorze. Dodanie piątego zbioru wymaga narysowania podobnej „kielbaski” wzdłuż konturu poprzednio dodanego zbioru tak, by podzieliła wszystkie 16 zbiorów diagramu dla 4 zmiennych dodając nowe 16 obszarów elementarnych. Tylko, że teraz ta „kielbaska” będzie musiała być podwójna, zgięta na pół. Konstrukcja jest mało praktyczna, bo ze wzrostem liczby zbiorów kształty kolejnych „kielbasek” robią się coraz bardziej złożone i trudne do narysowania, a tak powstały diagram staje się zupełnie nieczytelny.

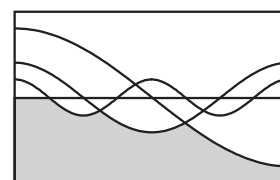
Kolejny wariant zaproponował Lewis Carroll¹⁵ i opracował na jego bazie rozrywkowo-dydaktyczną grę logiczną.¹⁶ Diagramy Carrolla dla 3 i 4 zmiennych składały się z samych prostokątów i wyglądały jak obok. Należą one do klasy diagramów, w których obszar zewnętrzny nie jest nieskończony, lecz ograniczony osobnym konturem. Ponadto, dwa największe obszary na diagramie mają kontury częściowo wspólne ze sobą i z prostokątem opisującym diagram. Konstrukcję wyjaśni bardziej tradycyjny sposób narysowania diagramu dla 4 zmiennych (po lewej). Niestety, tej konstrukcji nie da się powtórzyć za pomocą samych prostokątów dla większej liczby zmiennych. Dla 5 zmiennych diagram mógłby tu wyglądać jak po prawej. Piąta krzywa już nie jest prostokątem, tylko krzyżem. Carroll nie podał tej konstrukcji – dla 5 zmiennych używał dwóch diagramów dla 4 zmiennych, umieszczonych w dwóch połowach podzielonego na pół prostokąta. W ten sposób pierwsze cztery zbiory stały się niespójne, ponieważ każdy składał się z dwóch kawałków.



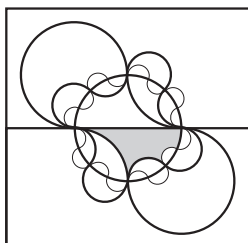
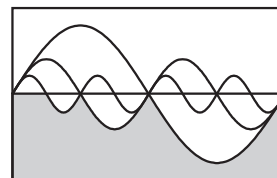
Struktura diagramu Carrolla zainspirowała Edwardsa¹⁷ do stworzenia konstrukcji z gładkimi konturami, rozszerzalnej na dowolną liczbę zmiennych.¹⁸ Obok mamy taki diagram Edwardsa dla 5 zmiennych. Edwards stosuje tu odmienną interpretację środkowych prostych niż Carroll: u niego odpowiednie obszary znajdują się po prawej stronie linii pionowej i poniżej linii poziomej. Kolejne dodawane kontury kontynuują proces zwiększania liczby „zębów”: na rysunku mamy na początku „bezzębne” proste i, umownie rzecz ujmując, „jednozębny” okrąg, potem „dwuzębny” poziomą ósemkę, następnie czterozębny krzyżak. Szósty kontur miałby osiem zębów, wijących się wokół konturu centralnego koła (zob. niżej), następny szesnaście, itd.¹⁹ Diagram wykazuje podwójną symetrię osiową.



Konstrukcje Smitha-Edwardsa²⁰ wykorzystują krzywe faliste. Zasadniczo są to fragmenty, w różnych skalach, wykresu funkcji trygonometrycznej cosinus, choć nie muszą być one dokładnie takie same w szczegółach, jak wykres tej funkcji. Tutaj kontury poszczególnych zbiorów składają się z odpowiedniej krzywej falistej (dla jednego ze zbiorów jest to linia prosta), ograniczającej zbiór od góry, i z odcinków linii prostych pokrywających się z ramką ograniczającą zewnętrzny obszar diagramu (z boków i z dołu). W ten sposób, jak zaznaczono szarym kolorem, obszar zawarty we wszystkich zbiorach to obszar poniżej wszystkich krzywych diagramu.

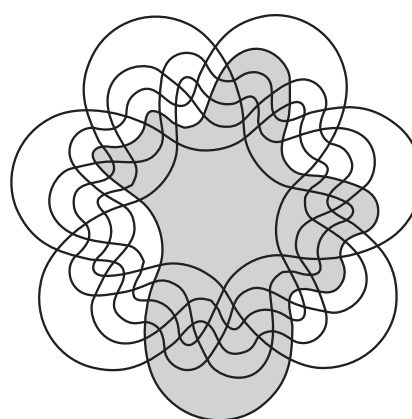


Wszystkie dotychczas pokazane diagramy są *proste*, czyli mają tę własność, że w jednym punkcie mogą się w nich przecinać tylko dwa kontury. Nie musi tak być – oto diagram sinusoidalny dla 4 zmiennych, który nie jest prosty. Składowe sinusoidy (w tym pozioma prosta) przecinają się w nim po 2, 3 lub 4 w różnych punktach przecięcia

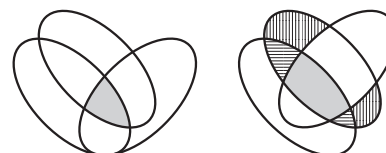


(jest to także konstrukcja Smitha-Edwardsa). Edwards znalazł również kilka wersji swojego diagramu z wielokrotnymi przecięciami. Trzeba było w tym celu obrócić w nim kontury o odpowiednie kąty wokół środka diagramu i usunąć pionową linię, dodając odpowiedni piąty kontur. Jedną z wersji tego diagramu dla 5 zmiennych pokazujemy obok. Piąty kontur to „koło zębate” o ośmiu zębach (jak szósty kontur w zwykłym diagramie Edwardsa powyżej). Dla lepszej czytelności wyróżniono go cieńszą linią.

Całkowicie symetryczne diagramy Venna składają się z n jednakowych konturów ustawionych symetrycznie wokół środka diagramu w taki sposób, że diagram obrócony wokół tego środka o kąt $360/n$ nakłada się dokładnie na siebie. Symetryczne diagramy Venna istnieją tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą (czyli nie ma innych dzielników oprócz 1 i samej siebie),²¹ choć nie wiadomo, czy istnieją dla każdej liczby pierwszej. Pokazane na początku diagramy dla $n = 1, 2$ i 3 są symetryczne. Znalaziono już diagramy symetryczne dla $n = 5, 7$ i 11 . Jeden z nich dla $n = 7$ pokazano obok, drugi użyto w winietce. Wnętrze jednego z konturów zamalowano na szaro dla lepszego pokazania kształtu konturów.



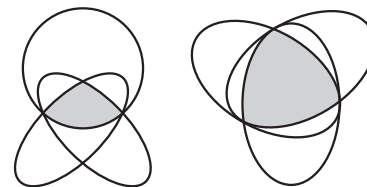
Istotną cechą diagramów Venna jest *redukowalność*. Diagram Venna jest redukowalny, gdy po usunięciu któregoś jego konturu otrzymamy znów poprawnie zbudowany diagram Venna dla liczby zmiennych mniejszej o 1. Diagram jest *w pełni redukowalny*, gdy można w ten sposób usunąć dowolny kontur diagramu. Diagramy kołowe dla $n = 2$ i 3 są w pełni redukowalne. Redukowalność jest ważna we wnioskowaniu, gdyż jedną z podstawowych transformacji diagramu jest usuwanie któregoś z konturów. Jeśli otrzymany diagram nie jest diagramem Venna, musi być na niego przekształcony bez zmiany semantyki, co może być mocno kłopotliwe. Niestety, nie da się całkowicie uniknąć tego problemu, gdyż nie istnieją w pełni redukowalne diagramy Venna dla $n > 3$. Na przykład, eliptyczny diagram Venna dla $n = 4$ pozwala bezkarnie usunąć tylko jedną z górnych elips. Jak widać na rysunku obok, usunięcie górnej elipsy daje diagram strukturalnie identyczny z diagramem z trzech kół, tylko koła są wydłużone do elips. Usunięcie jednej z dolnych elips daje diagram, który nie jest diagramem Venna dla $n = 3$ (zawiera 10 obszarów elementarnych zamiast 8).



Na rysunku tym samym kreskowaniem zaznaczono powstałe dwie pary obszarów rozłącznych o tych samych kombinacjach należenia i nienależenia do trzech pozostałych konturów. By otrzymać diagram Venna, należy usunąć po jednym obszarze z każdej pary. Z diagramu Edwardsa dla $n = 5$ można usunąć tylko centralny krzyżak lub koło; usunięcie którejś ze środkowych linii prostych produkuje 24 obszary zamiast 16, a usunięcie poziomej ósemki daje 20 obszarów. Diagramy całkowicie symetryczne dla $n > 3$ są całkowicie nieredukowalne – usunięcie któregoś z konturów daje diagram, który nie jest diagramem Venna. Sprawdzenie redukowalności pozostałych diagramów powyżej pozostawiamy czytelnikowi.

stawiamy jako ćwiczenie dla czytelnika. Niektóre proponowane formalizacje diagramów Venna nie uwzględniają tego faktu, przez co mogą prowadzić do błędów wnioskowania.²²

Istnieje w sumie 14 strukturalnie odmiennych diagramów Venna dla trzech zmiennych.²³ Standardowy diagram Venna z trzech kół jest w pełni symetryczny i redukowalny, i tylko on jest prosty. Inna wersja diagramu dla trzech zmiennych, pokazana obok, nie jest ani w pełni redukowalna, ani symetryczna.²⁴ Wykazuje tylko symetrię osiową (odbicie lustrzane w linii pionowej), a wyrzucenie górnego koła nie daje diagramu Venna. Kolejna wersja jest za to całkowicie symetryczna, ale też nieredukowalna.



Różne rodzaje i własności diagramów Venna wielu zmiennych, a także pokrewnych diagramów, są jednym z przedmiotów badań nowego działu matematyki, zwanego *geombinatoryką* (czyli geometrią kombinatoryczną), od czasu jej powstania, datowanego na rok 1991, kiedy ukazał się pierwszy numer czasopisma naukowego *Geombinatorics*.²⁵

Koła Eulera i diagramy Venna, choć do siebie podobne, w istocie różnią się od siebie dość zasadniczo. Diagramy Venna są bardziej ekspresywne, jak to pokazaliśmy na przykładach, stąd były szerzej używane, głównie w celach dydaktycznych. Na ich podstawie powstało także kilka bardziej złożonych systemów diagramów logicznych, w czasach niedługo po Vennie, a także współcześnie, gdy pojawiło się większe zainteresowanie diagramami, które doprowadziło do powstania diagramatyki. O tych nowych diagramach logicznych opowiemy w następnych odcinkach.

Zenon Kulpa

¹ W oryginale "... raises the question of how the important logical links of reasoning can be represented in images." Tłum. z ang. Zenon Kulpa.

² Arystoteles ze Stagiry (384-322 p.n.e.), najwszechstronniejszy uczony starożytnej Grecji, największy z uczniów Platona, nauczyciel Aleksandra Wielkiego, położył fundamenty pod wiele dziedzin nauki – filozofię, logikę, fizykę, biologię, psychologię i in.

³ Wykład sylogistyki zawarty jest w traktacie Arystotelesa *Analityki pierwsze* (polskie wydanie w: *Arystoteles, Dzieła wszystkie*. Tom 1. PWN, Warszawa 2003, tłum. K. Leśniak). Dość dokładne omówienie sylogistyki można znaleźć w Internecie pod adresem: <http://prace.sciaga.pl/24966.html>.

⁴ Jak podaje Mark Greaves: *The Philosophical Status of Diagrams*. CSLI Publications, Stanford, CA 2002.

⁵ Częściowym wyjątkiem od tej reguły był system diagramów, wspomaganych mechanicznym urządzeniem, opracowany w 1275 r. przez Ramona Llulla. Nie miał on jednak nic wspólnego z sylogistyką, pozwalał tylko uzyskiwać wszystkie możliwe kombinacje pojęć z kilku list za pomocą zestawu współśrodkowych kół. Ramon Llull [Raymond Lull, Lullus lub Lully] (1232/36-1315), filozof, poeta i teolog, hiszpański. Zginął w Tunisie ukamienowany przez muzułmanów, których usiłował nawracać na chrześcijaństwo. Swój system, nazwany *Ars Generalis Ultima* lub *Ars Magna*, opisał w całości w r. 1305 i używał w dysputach filozoficzno-teologicznych. Opis jego systemu można znaleźć w: Martin Gardner: *Logic Machines and Diagrams*. University of Chicago Press, Chicago 1982 [2nd ed.].

⁶ Leonard Euler (1707-1783), sławny matematyk i fizyk szwajcarski, pracujący w St. Petersburgu i w Berlinie, jeden z największych matematyków w historii. Koła Eulera opisał on w 1761 r. w listach do niemieckiej księżniczki Anhalt-Dessau, wydanych potem jako: Leonhard Euler: *Lettres à une Princesse d'Allemagne, sur divers sujets de physique et de philosophie*. l'Academie Imperiale des Sciences, St. Petersburg 1768-1772 (Tom 2: Listy nr 102-108; późniejsze wydania posługują się czasem inną numeracją listów).

⁷ Omówienie tej zmiany interpretacyjnej zawiera m.in. książka Mark Greaves: *The Philosophical Status ...*, op. cit. Zmiana ta dała podstawy pod późniejsze powstanie *teorii zbiorów*, stanowiącej obecnie, wraz z logiką matematyczną, fundament całej matematyki.

-
- ⁸ Wprowadzenie do rachunku predykatów – zob. Zenon Kulpa: Diagramy kontra predykaty, czyli jeśli nie możesz go pokonać, przyłącz się do niego. *Tytuł Roboczy*, 2006.07/08 (014).
- ⁹ W swoich listach: Leonhard Euler: *Lettres à une Princesse d'Allemagne ...*, op. cit. Zob. także witrynę: Sun-Joo Shin, Oliver Lemon: Diagrams. In: Edward N. Zalta, ed.: *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2006 Edition), <http://plato.stanford.edu/archives/sum2006/entries/diagrams/>.
- ¹⁰ Jan Venn (1834-1923), angielski logik i historyk (także konstruktor maszyn), twórca *diagramów Venna*, użytecznych we wnioskowaniu w logice i teorii zbiorów. Opisał je po raz pierwszy w: John Venn: On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science [Fifth Series]*, **9**(59), July 1880, pp. 1-18 i rozwinął w traktacie: John Venn: *Symbolic Logic*, MacMillan, London 1881, (2nd ed. 1894).
- ¹¹ Np. w książce William W. Dunham: *The Mathematical Universe: An Alphabetical Journey Through the Great Proofs, Problems, and Personalities*. John Wiley & Sons, 1994, Dunham „odkrywa” koła Eulera i stwierdza, że najwyraźniej to Euler wynalazł diagramy Venna. Na odwrót w popularnym kompendium I.N. Bronsztejn, K.A. Siemiendajew, G. Musiol, H. Mühlig: *Nowoczesne kompendium matematyki*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004 – tam „diagramami Venna” nazywa się wyraźnie koła (czy raczej – elipsy...) Eulera.
- ¹² Zob. Zenon Kulpa: Obraz jest wart tysiąca słów, czyli tysiąc i trochę słów o diagramach. *Tytuł Roboczy*, 2004.11 (003).
- ¹³ Oryginalne diagramy opisane przez Venna nie używały znaczników \otimes i x -sekwencji w podanej postaci. Wprowadził je w r. 1896 Peirce: Charles S. Peirce: *Collected Papers of C. S. Peirce*. Charles Hartshorne, Paul Weiss, Arthur W. Burks, Eds., vol. 4. Harvard University Press, Cambridge, MA 1933. Ułatwiło to znacznie prawidłowe reprezentowanie wnioskowań sylogistycznych.
- ¹⁴ Zob. np. Sun-Joo Shin: *The Logical Status of Diagrams*. Cambridge University Press, Cambridge, MA 1994 oraz Eric Hammer: *Logic and Visual Information*. CSLI Publications, Stanford, CA 1995.
- ¹⁵ Lewis Carroll [Charles Lutwidge Dodgson] (1832-1898), angielski matematyk, pisarz i fotograf, autor znanych opowieści o przygodach Alicji w krainie czarów.
- ¹⁶ Zestawy do tej gry (plansza z diagramem dla 3 zmiennych, żetony i instrukcja) można było kupić jako wkładkę do książki Lewis Carroll: *The Game of Logic*. Macmillan, London 1886.
- ¹⁷ Antoni William Fairbank Edwards, współczesny genetyk i statystyk angielski.
- ¹⁸ Anthony W.F. Edwards: *Cogwheels of the Mind: The Story of Venn Diagrams*. John Hopkins University Press, Baltimore 2004.
- ¹⁹ Jak pisze Ian Steward w przedmowie do książki Edwardsa *Cogwheels of the Mind ...*, op. cit., diagram ten podpowiedział mu pomysł na tytuł jego rubryki w *Scientific American* na temat diagramów Edwardsa, który to tytuł został potem użyty jako tytuł książki Edwardsa – po polsku znaczy on „Koła zębate umysłu”.
- ²⁰ Jak podaje Edwards w swojej książce *Cogwheels of the Mind ...*, op. cit., pomysł podsunął mu prof. Cedric A. B. Smith (1917-2002), genetyk i matematyk angielski.
- ²¹ David W. Henderson: Venn diagrams for more than four classes. *American Mathematical Monthly*, **70** (1963), pp. 424-426.
- ²² System formalny diagramów Venna w: Sun-Joo Shin: *The Logical Status of Diagrams*, op. cit., zawiera ten błąd, jak wykazano np. w: Patrick Scotto di Luzio: Patching up a logic of Venn diagrams. *Proc. 6th CSLI Workshop on Logic, Language and Computation*. CSLI Publications, Stanford, CA 2000. Zob. też John Howse, Fernando Molina, Sun-Joo Shin, John Taylor: On diagram tokens and types. In: M. Hegarty, B. Meyer, N. Hari Narayanan, Eds.: *Diagrammatic Representation and Inference*. (Proc. Second International Conference, Diagrams 2002. Callaway Gardens, GA, USA, April 18-20, 2002), pp. 146-160. Lecture Notes in Computer Science, Vol. 2317. Springer-Verlag, Berlin 2002.
- ²³ Zob. Kiran B. Chilakamarri, Peter Hamburger, Raymond E. Pippert: Venn diagrams and planar graphs. *Geometriae Dedicata*, **62**, 1996, pp. 73-91. Listę wszystkich 14 diagramów można także znaleźć na stronie <http://www.combinatorics.org/Surveys/ds5/VennGraphEJC.html>.
- ²⁴ Zob. Anthony W.F. Edwards, Cedric A.B. Smith: New 3-set Venn diagram. *Nature* 339, 1989, p. 263.
- ²⁵ Założone przez Aleksandra Soifera, matematyka amerykańskiego pochodzenia rosyjskiego. Patrz <http://www.uccs.edu/~geombina/>.