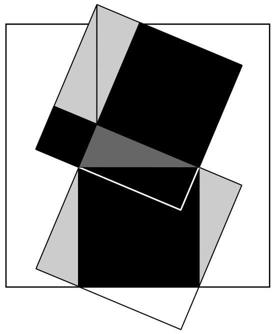


Wnioskowanie diagramowe,

czyli jak myśleć obrazkami

... różnica między rozumami polega
na ilości obrazów i łatwości ich kombinowania.

(Jan Potocki: *Rękopis znaleziony w Saragossie*, wyd. 1847)

Reprezentacje diagramowe, oprócz gromadzenia i komunikowania zakodowanej na diagramie wiedzy czy informacji, służą również do produkowania nowej wiedzy. Jest to możliwe dzięki odpowiedniemu przetwarzaniu informacji przedstawionych na diagramie. Proces ten, nazywany *wnioskowaniem diagramowym*, ma m.in. zastosowanie w takich dziedzinach, jak matematyka czy inne nauki ścisłe. W procesie wnioskowania diagramowego można zazwyczaj wyróżnić trzy podstawowe etapy:[1]

- **Kodowanie**: informacje początkowe (już znane lub udowodnione fakty, założenia) tworzące sformułowanie problemu wnioskowania, zostają zapisane w postaci diagramowej zgodnie z językiem wizualnym odpowiednim dla danej klasy problemów.

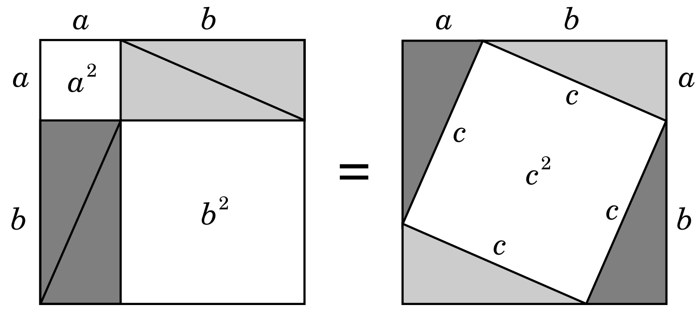
- **Przetwarzanie**: tak skonstruowany diagram podlega serii *transformacji*, wybranych z repertuaru transformacji dopuszczalnych dla danej klasy zagadnień (tak jak przy przekształcaniu formuł przy użyciu reprezentacji opisowych[2]).

- **Dekodowanie**: pożądany rezultat przetwarzania (wniosek, teza twierdzenia) zostaje odczytany z przekształconego diagramu zgodnie z użytym językiem wizualnym i ewentualnie zapisany w jakiejś innej potrzebnej formie (np. w postaci formuły lub tekstu w języku naturalnym).

Granice między tymi etapami bywają nieostre. Ponadto etap drugi (przetwarzanie) może nie występować w jawnej formie. Dzieje się tak wtedy, gdy sama konstrukcja diagramu dla początkowych danych realizuje już po części proces przetwarzania tych danych. W takiej sytuacji, z powstałej konstrukcji można już bezpośrednio odczytać wynik wnioskowania bez dalszych przekształceń diagramu. Mamy wówczas do czynienia ze zjawiskiem tzw. *emergencji*, wspomnianym już w poprzednim odcinku,[3] mającym duże znaczenie także we wnioskowaniu diagramowym.[4]

Ponieważ warunkiem realizacji jakiegokolwiek wnioskowania diagramowego jest odpowiednia reprezentacja diagramowa danych do przetwarzania, zagadnienia tworzenia reprezentacji diagramowych mają także kluczowe znaczenie dla wnioskowania diagramowego.

Prostym, klasycznym przykładem diagramowego wnioskowania jest jeden z wielu diagramowych dowodów znanego twierdzenia Pitagorasa:[5]



Z lewej strony diagramu mamy kwadrat podzielony na części, mianowicie cztery jednakowe trójkąty prostokątne o przyprostokątnych a i b i dwa mniejsze kwadraty o polach a^2 i b^2 odpowiednio. Przestawiając te trójkąty wewnątrz kwadratu możemy otrzymać układ po prawej stronie, stanowiący tym samym transformację lewej strony diagramu. Jest to taki sam kwadrat, ale tym razem składający się, oprócz czterech takich samych jednakowych trójkątów jak poprzednio, z jednego kwadratu o boku równym przeciwprostokątnej c tych trójkątów, czyli kwadratu mającego pole c^2. Ponieważ oba kwadraty mają pola równe, wniosek z tej transformacji można zapisać w postaci:

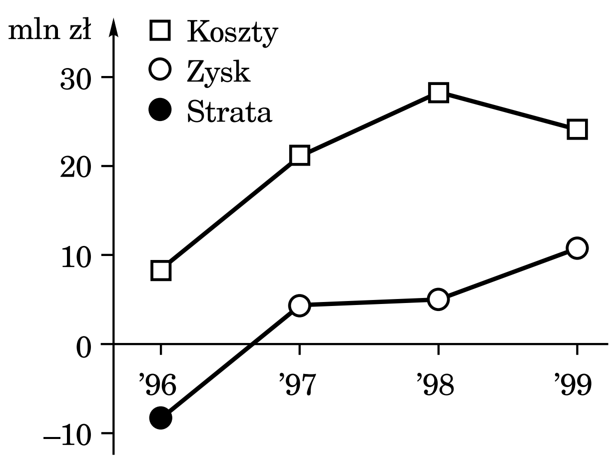
$$a^2 + b^2 + 4\Delta = c^2 + 4\Delta ,$$

z czego bezpośrednio wynika teza twierdzenia:

$$a^2 + b^2 = c^2 .$$

Jednodiagramowa, choć mniej czytelna wersja tego dowodu służy za winietkę tego odcinka. Tekstowe etykiety na diagramie nie są niezbędne do przeprowadzenia wnioskowania. Służą one zasadniczo tylko do powiązania elementów diagramu ze standardową formułą wyrażającą twierdzenie Pitagorasa.

Może to się wydać zaskakujące, ale częstym przypadkiem wykorzystania wnioskowania diagramowego jest też tzw. *infografika*, zwana także *grafiką prezentacyjną* lub *statystyczną*. Prosty przykład przedstawia rysunek – jest to wykres niektórych parametrów finansowych pewnej firmy za okres kilku lat.



Wydawać by się mogło, że jest to tylko reprezentacja diagramowa ośmiu par liczb przedstawiających wartości dwóch parametrów (kosztów i zysków) dla czterech wybranych lat. Gdyby jednak chodziło tylko o wartości tych kilku liczb, sens rysowania dość jednak złożonego diagramu dla tych danych byłby wątpliwy, zwłaszcza, że nie da się z tego diagramu odczytać ich dokładnych wartości. Wystarczyłaby tu prosta lista lub co najwyżej tabelka.[6] Diagram ten jednak nie służy do prostego przedstawienia tych kilku liczb, lecz ma za zadanie ułatwić odbiorcy wyciągnięcie odpowiedniego wniosku o stanie firmy wynikającego z tych danych. Wniosek taki bywa często wypisany w skrócie jako tytuł diagramu – diagram służy wtedy jako naoczne jego uzasadnienie. W tym przypadku tytuł taki mógłby np. brzmieć „Zakończyliśmy okres inwestycji i zaczynamy zbierać ich żniwo."

Użycie diagramowej reprezentacji danych do wykrywania nowej informacji w nich zawartych jest równie powszechne jak ich użycie do przedstawiania informacji. Opracowano nawet do tych celów specyficzną metodologię *graficznego przetwarzania danych* statystycznych,[7] a pokrewne techniki *wizualizacji danych naukowych*[8] pomagają naukowcom wykrywać znaczące regularności w wielkich zbiorach danych eksperymentalnych. Tragicznym potwierdzeniem znaczenia takiej graficznej analizy danych może być katastrofa amerykańskiego promu kosmicznego Challenger w 1986 roku. Jak opisuje Tufte,[9] niewłaściwa prezentacja danych o zakresie i rodzaju uszkodzeń uszczelek w silnikach startowych promów podczas poprzednich startów przyczyniła się do zlekceważenia ich wyraźnej zależności od temperatury otoczenia. Doprowadziło to do zatwierdzenia startu promu mimo niewłaściwych warunków i w konsekwencji do jego katastrofy.

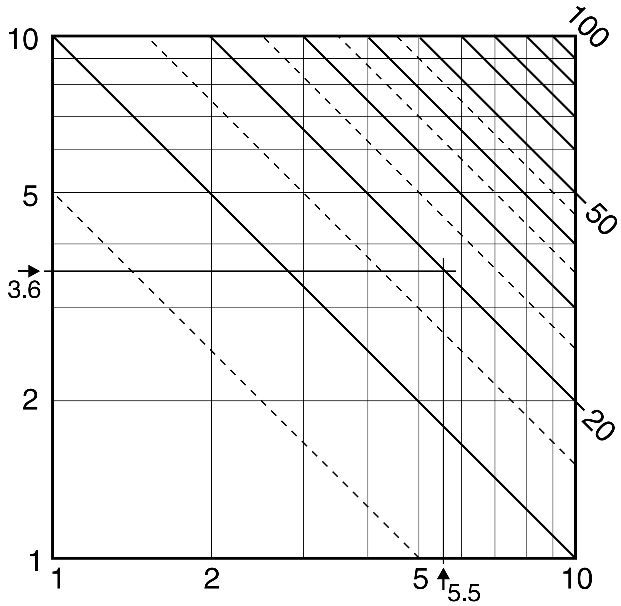
We wnioskowaniu diagramowym mamy do czynienia z wieloma różnymi zagadnieniami i problemami, będącymi przedmiotem badań. Jednym z głównych zagadnień jest tutaj rozróżnienie dwóch rodzajów metod wnioskowania diagramowego:

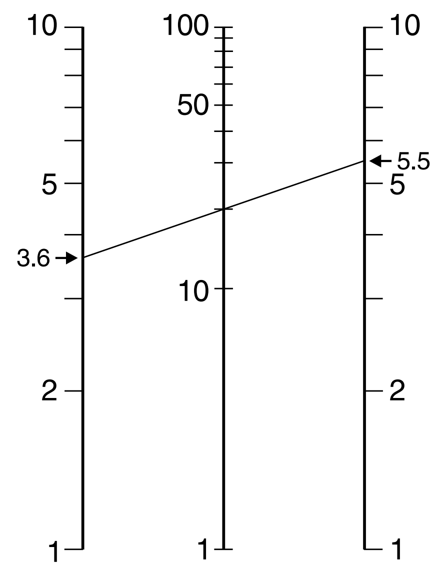
- Wnioskowanie **ilościowe** lub **metryczne**, dotyczące lub oparte na precyzyjnej obserwacji, pomiarze lub porównaniu cech ilościowych o charakterze ciągłych wielkości, jak długość linii czy wartość kąta, lub też cech określonych przez takie wielkości jak współliniowość punktów, równoległość lub prostopadłość odcinków, itp.
- Wnioskowanie **jakościowe** lub **strukturalne**, oparte nie na precyzyjnych rozróżnieniach ilościowych, lecz na jakościowo odmiennych konfiguracjach lub wyraźnie dużych różnicach ilościowych.

Można wyróżnić jeszcze trzeci, pod pewnymi względami pośredni, rodzaj wnioskowania:

- Wnioskowanie oparte na **cyfrowym zliczaniu** elementów diagramu. Ma ono charakter ilościowy, ale mierzone wielkości nie są ciągłe, lecz dyskretne (cyfrowe) i są określane w sposób strukturalny.

Wnioskowanie metryczne. Klasyczny przykład tego typu wnioskowania przedstawiają *nomogramy*. Dwa przykłady pokazuje rysunek. Po lewej mamy tzw. *wykres kartezjański izoliniowy*, po prawej *nomogram właściwy.*[10] Oba nomogramy na rysunku pozwalają mnożyć liczby: na lewym wykresie zaznaczamy mnożone liczby na osi poziomej i pionowej, a wynik odczytujemy według skali skośnych izolinii w punkcie przecięcia linii prostopadłych poprowadzonych od zaznaczonych na osiach mnożników. Nomogram właściwy pozwala wykonać to działanie prościej – wystarczy punkty określające mnożniki na obu skrajnych skalach połączyć linią prostą i odczytać wynik bezpośrednio na skali środkowej. Na obu nomogramach pokazano przybliżone działanie $3.6 \cdot 5.5 \approx 20$. Za pomocą obu nomogramów można z powodzeniem mnożyć dowolne liczby, nie tylko z zakresu od 1 do 10. Należy w tym celu odpowiednio przesuwać kropkę dziesiętna w argumentach i w wyniku. Na przykład, by wykonać mnożenie $35 \cdot 55$ przesuwamy w argumentach kropkę o jeden w lewo, dostając $3.6 \cdot 5.5 \approx 20 = 20.0$ jak na rysunkach. Następnie w wyniku przesuwamy kropkę w prawo o sumę przesunięć kropki w argumentach, czyli o dwie pozycje, uzyskując wynik 2000. Przy pomocy tych nomogramów można również wykonywać dzielenie liczb. Jak to zrobić, zostawiamy domyślności czytelnika.





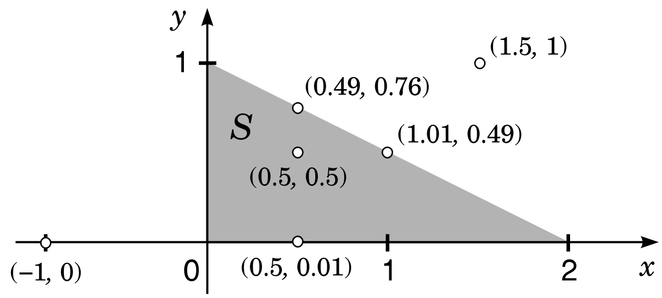
Wykresy i nomogramy tego typu oraz wielu innych rodzajów, zaprojektowane do różnorodnych obliczeń,[11] były przez dziesięciolecia XX w. podstawowym narzędziem obliczeń inżynierskich do czasu upowszechnienia się komputerów. Szczególnym przypadkiem dosyć uniwersalnego, ruchomego nomogramu był powszechnie używany *suwak logarytmiczny* – „kieszonkowy mikrokomputer" analogowy owych czasów.

Rzucającą się w oczy cechą nomogramów jest przybliżony charakter wykonywanych za ich pomocą obliczeń. Skończona precyzja wykresu czy skali suwaka (nieprecyzyjność diagramów[12]) nie pozwala ustawić lub odczytać wielkości numerycznych z dowolnie dużą dokładnością. W przykładzie na rysunkach dokładny wynik wynosi 19.8 (lub 1980 w drugim przypadku mnożenia), zatem dokładność tych prostych nomogramów wynosi około dwu cyfr znaczących. Dokładny nomogram lub suwak logarytmiczny, precyzyjnie użyty, pozwala uzyskać dokładność do trzech cyfr znaczących. Może to być niewystarczające, zwłaszcza przy dłuższych ciągach powiązanych ze sobą obliczeń, przy których może zajść zjawisko kumulacji błędów. Tym niemniej, w wielu przypadkach, np. przy wstępnym projektowaniu konstrukcji inżynierskich, jest to dokładność zupełnie wystarczająca.

Jednakże w przypadku, gdy mała zmiana wielkości o charakterze metrycznym może spowodować jakościową zmianę w rozumowaniu, wnioskowanie oparte na wielkościach metrycznych może prowadzić do dużych błędów. Przykłady podano w odcinku o błędach diagramowych.[13] Unikanie takich błędów jest możliwe na kilka sposobów, także omówionych we wzmiankowanym wyżej odcinku, takich jak zwiększenie precyzji (i często skali) diagramu, czy przejście na wnioskowanie o charakterze jakościowym (strukturalnym). Ten ostatni sposób jest często stosowany w sformalizowanych matematycznych systemach wnioskowania diagramowego. Przykładem może być system Millera[14] dla geometrii elementarnej, gdzie na diagramach brane są pod uwagę wyłącznie cechy strukturalne (topologiczne) rysunku, tak więc np. proste wcale nie muszą być na nim proste, wystarczy, że przechodzą przez odpowiednie punkty. Prowadzi to jednak do znacznego zmniejszenia naśladowczości reprezentacji, powodującego np. mnożenie się „przypadków niemożliwych,”[15] które trzeba specjalnie wykrywać i odrzucać przy wnioskowaniu.

Niekiedy trzeba użyć w newralgicznych punktach wnioskowania reprezentacji opisowych, np. wykonać odpowiednie obliczenie algebraiczne. Przykład, ilustrujący niektóre sytuacje, jakie mogą tu wystąpić, pokazuje rysunek:

$$S = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, x + 2y < 2\}$$

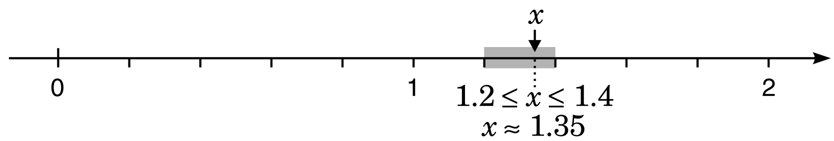


Mamy tu przedstawiony zbiór punktów *S*, na górze w postaci opisowej (za pomocą formuły matematycznej), niżej w postaci diagramu, gdzie zbiór *S* to szary trójkąt w układzie współrzędnych. Na diagramie zaznaczono kółeczkami szereg punktów, z podanymi współrzędnymi (x, y). Rozważmy prosty problem: który z tych punktów zawarty jest w zbiorze *S*, a który nie? Dla punktów o współrzędnych (–1, 0), (0.5, 0.5) i (1.5,1) można bez trudności określić przynależność „na oko.” Ich pozycja względem granic zbioru *S* jest na tyle wyraźnie jakościowo określona, że dla określenia ich przynależności do zbioru *S* nie jest konieczna duża precyzja (przy zaznaczaniu ich na rysunku, czy przy ustalaniu ich położenia). Diagramowa ocena metrycznej wielkości ma tutaj charakter strukturalny i nie prowadzi do błędu. Inną sytuację mamy dla punktów o współrzędnych (0.49, 0.76) i (1.01, 0.49). Leżą one przy granicy zbioru *S* i przy tej skali rysunku nie jest możliwe określenie „na oko,” po której jej stronie. Należałoby do tego celu znacznie powiększyć diagram i użyć precyzyjnych skal na osiach. Rozwiązaniem problemu może tu być użycie reprezentacji opisowej, tj. w tym przypadku podstawienie współrzędnych punktu do wzoru określającego zbiór *S* i algebraiczne obliczenie, czy warunki we wzorze są spełnione. Weźmy przykładowo punkt (0.49, 0.76). Dwa pierwsze warunki we wzorze, mianowicie $x > 0$ i $y > 0$, są oczywiście spełnione. Co natomiast z warunkiem trzecim: $x + 2y < 2$? Podstawmy współrzędne punktu do lewej strony tej nierówności. Dostaniemy wtedy:

$$0.49 + 2 \cdot 0.76 = 0.49 + 1.52 = 2.01.$$

Jak widać, otrzymaliśmy liczbę większą od 2 zamiast mniejszej wymaganej przez ten warunek. Zatem warunek przynależności do zbioru *S* dla tego punktu nie jest spełniony – punkt leży poza granicami zbioru *S*. Pośredni charakter ma problem z punktem (0.5, 0.01). Punkt ten także leży blisko granicy zbioru, więc czysto diagramowe wnioskowanie nie jest dla niego dostatecznie niezawodne. Jednak rzut oka na drugą współrzędną równą 0.01 pozwala zauważyć, że jest ona większa od zera, więc punkt musi leżeć powyżej osi O*x*, a więc wewnątrz zbioru *S*.

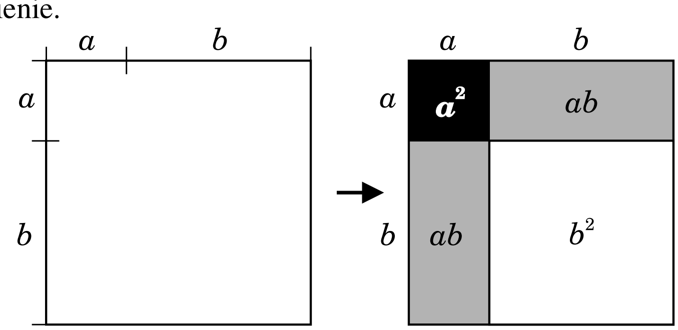
Wracając na chwilę do nomogramów, zauważmy, że wyznaczanie i odczyt wartości na skalach jest procesem analogicznym do występującego w przykładzie ze zbiorem *S*. Podział skali działkami na odcinki tworzy na niej ciąg *zbiorów* punktów, w rezultacie czego zaznaczenie czy odczyt liczby na skali sprowadza się do jakościowego zazwyczaj określenia, do którego z tych zbiorów (odcinków skali) należy dana liczba.



Pewne zwiększenie dokładności daje wizualna, metryczna interpolacja wartości między działkami skali, jednak, przy zazwyczaj nieliniowych skalach nomogramów, nie daje to zbyt dobrych efektów.

Wnioskowanie strukturalne. Jest to częsty rodzaj wnioskowania w matematyce, gdy zależy nam na uniknięciu błędów wynikających z nieprecyzyjności diagramów. Zasadniczo przebieg wnioskowania strukturalnego nie zależy od metrycznej dokładności narysowania lub odczytania cech elementów diagramu. Pozwala to np. prowadzić rozumowania nawet na niedokładnych szkicach, z zastosowaniem interpretacyjnej *reguły dopasowania do modelu* opisanej w jednym z poprzednich odcinków.[16] Przykładem wnioskowania tego typu jest dowód twierdzenia Pitagorasa na początku tego tekstu. Nie mają w nim znaczenia dokładne wartości długości boków *a*, *b* i *c* trójkąta, ani ich dokładne porównanie między różnymi wystąpieniami na rysunku. Istotna jest struktura rysunku, nie zmieniająca się nawet przy dużych odstępstwach tych wielkości od metrycznej precyzji.

Strukturalny charakter wnioskowania nie oznacza, że wniosek może dotyczyć tylko cech strukturalnych. W twierdzeniu Pitagorasa np. wnioskujemy o metrycznej równości kwadratów liczb będących długościami boków trójkąta. Prostszy przykład dowodu znanego wzoru na kwadrat sumy dwóch składników, używający analogicznego diagramu, pozwoli bliżej zilustrować to zagadnienie.

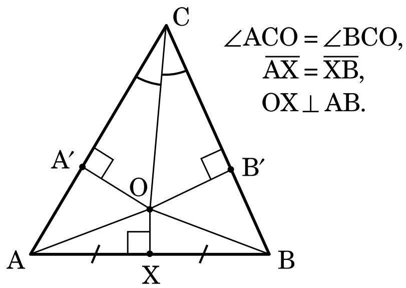


W lewej części diagramu oba boki kwadratu podzielone są jednakowo na dwa odcinki o długościach *a* i *b*. Jeśli poprowadzić linie prostopadłe do boków kwadratu w punktach podziału, to podzielą one kwadrat na cztery części, jak pokazano w prawej części diagramu. Te części to dwa kwadraty o bokach *a* i *b* odpowiednio, a zatem o polach a^2 i b^2, oraz dwa jednakowe prostokąty o bokach *a* i *b* każdy, czyli o polu *ab* każdy. Pole lewego kwadratu to oczywiście $(a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2$, a prawego $a^2 + b^2 + 2ab$, a ponieważ są to jednakowe kwadraty, otrzymujemy szukany wzór jako:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$$

Nie jest w wywodzie istotne, jakie dokładnie są wartości liczb *a* i *b*. Dowód ma być słuszny dla dowolnych liczb dodatnich, których suma daje długość boku pewnego kwadratu, którego dokładna wielkość też może być dowolna. Zatem nie ma tu znaczenia dokładność odmierzania wielkości *a* i *b* czy długości boku kwadratu. Istotniejsze może się wydawać to, że odcinki *a* (a także *b*) na obu bokach kwadratu muszą być sobie równe. Jednak, jak widać z konstrukcji, ewentualna ich niewielka nierówność nie wpływa na strukturę diagramu na tyle, by spowodować powstanie błędu. Ewentualne małe nierówności są kompensowane przez regułę dopasowania do idealnego wzorca, wspomaganą przez komponentę opisową diagramu w postaci literowych oznaczeń odcinków.

Wnioskowanie strukturalne jest zasadniczo bardziej niezawodne od metrycznego, co nie znaczy, że nie można przy jego użyciu popełniać błędów. Najczęstszymi przyczynami błędów są tutaj nie wykryte niemożliwe konfiguracje lub błędne przyjęcie rezultatu nieprecyzyjności diagramu jako jego cechy strukturalnej.



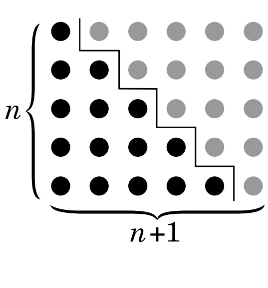
Jako przykład obu rodzajów błędów może posłużyć niemożliwa konfiguracja geometryczna omawiana już w tekście o błędach diagramowych[17] i powtórzona obok. Diagram sugeruje, że symetralna OX podstawy AB trójkąta i dwusieczna CO kąta przy wierzchołku C przecinają się w punkcie O leżącym wewnątrz trójkąta ABC. To jest jednak niemożliwe (wykazanie tej niemożliwości pominiemy, by nie nudzić czytelnika). Mamy więc tu do czynienia z przyjęciem konfiguracji niemożliwej jako podstawy wnioskowania, prowadzącego do tezy, że trójkąt ABC jest równoramienny. Natomiast samo powstanie tej konfiguracji jest wynikiem nieprecyzyjności diagramu: odcinki AX i XB nie są dokładnie równe (tak jak powinny być, aby OX była symetralną podstawy AB), tak samo jak nierówne są kąty ∠ACO i ∠BCO (więc CO nie jest naprawdę dwusieczną kąta C). Nieprecyzyjność ta powoduje w rezultacie powstanie fałszywej cechy strukturalnej na diagramie, jaką jest zawieranie się punktu O wewnątrz trójkąta ABC.

Warto zauważyć, że właściwie głównym błędem popełnionym przy przyjęciu tego diagramu jako podstawy wnioskowania jest tak naprawdę błąd logiczny – mianowicie przyjęcie, że przedstawiona konfiguracja jest możliwa![18] Zapiszmy bowiem wynik rozumowania w poniższej, pełniejszej postaci:

Jeżeli w trójkącie dwusieczna kąta w wierzchołku i symetralna przeciwległego boku mają punkt wspólny wewnątrz tego trójkąta, to trójkąt jest równoramienny.

Teraz twierdzenie jest logicznie całkowicie poprawne i nie zawiera błędu. Błąd polegał więc przede wszystkim na pominięciu zastrzeżenia o istnieniu konfiguracji rzekomo „pokazanej" na diagramie. Udział samego diagramu w tym błędzie polegał tylko na przekonaniu odbiorcy o istnieniu takiej konfiguracji, a więc o zbędności dołączania wspomnianego zastrzeżenia do wniosku. Jednak nie zawsze to, co widać, rzeczywiście istnieje, jak przekonuje np. fenomen figur niemożliwych.[19]

Cyfrowe zliczanie. W tym przypadku cechy użyte we wnioskowaniu mają charakter ilościowy, ale sposób ich pomiaru ma charakter strukturalny, zapewniający pełną ich dokładność. Zazwyczaj są to liczby całkowite, a pomiar sprowadza się do zliczania lub porównywania liczby indywidualnych elementów diagramu. Typowy przykład diagramowego wnioskowania



tego typu przedstawia rysunek.[20] Czarne kropki zestawione są w trójkąt składający się z pewnej liczby n wierszy (na rysunku 5) zawierających rosnącą liczbę kropek, począwszy od 1 do tejże liczby n. Przedstawiają one zatem sumę $S = 1 + 2 + \ldots + n$. Jeśli zestawić ze sobą dwa takie same trójkąty (drugi z nich wyróżniono szarymi kropkami), otrzymamy razem prostokąt zawierający $2S = n \cdot (n + 1)$ kropek. W ten sposób wykazaliśmy, że suma ciągu liczb naturalnych od

1 do n wyraża się wzorem:

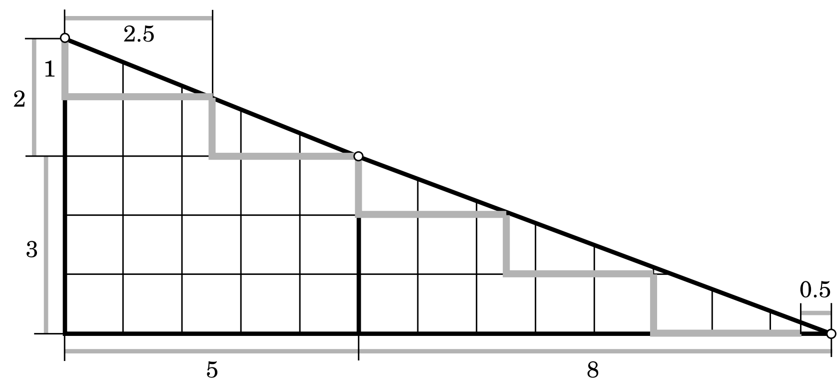
$$1 + 2 + \ldots + n = n \cdot (n + 1) / 2.$$

Zauważmy jednak, że w rzeczywistości na tym diagramie nie mamy dowolnej liczby n wierszy czy kropek w wierszu. Diagram pokazuje tylko konkretne pięć wierszy, czyli jednostkowy przypadek (zjawisko nazywane *jednostkowością* diagramów). Wykazuje on zatem bezpośrednio prawdziwość tylko pewnej szczególnej formuły:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 5 \cdot (5 + 1) / 2 = 15.$$

Uogólnienie na dowolną liczbę n wyrazów w ciągu dokonuje się „w głowie" obserwatora, jako obserwacja, że ta sama zasada liczenia, jak pokazana dla liczby 5 na diagramie, będzie miała zastosowanie dla każdej liczby n. Można jednak ten uogólniający krok wykonać także diagramowo, o czym opowiemy w kolejnym odcinku.

Dla uniknięcia błędów nieprecyzyjności diagramów, wnioskowanie oparte na cechach metrycznych można czasami uzupełnić takim cyfrowym zliczaniem elementów jak opisano wyżej. Za przykład może służyć zagadka „64=65" z jednego z poprzednich odcinków.[21] W jednym z wariantów sprawdzenia poprawności użytej tam konstrukcji, nachylenia odcinków na przekątnej prostokąta porównane są w taki cyfrowy sposób – przez zliczanie trójkątów rozmiaru 2.5 na 1 kratkę ustawionych wzdłuż odcinków przekątnej. Dla przypomnienia powtarzamy odpowiedni rysunek poniżej.



Zauważmy na podstawie podanych przykładów, że wszystkie wnioskowania były zasadniczo hybrydowe. Zastosowano w nich, oprócz diagramów, oznaczenia literowe i wzory, choćby po to, by zapisać wniosek w innej postaci, a często po to, by pomóc w zrozumieniu wywodu lub w uniknięciu niektórych błędów. Jest to powszechna właściwość wnioskowań w swej istocie diagramowych. Co za tym idzie, lansowana czasem idea tzw. „dowodów bez słów" w swej czystej postaci nie wydaje się zbyt praktyczna.[22]

Zenon Kulpa

---

[1] Przedstawiona dalej analiza i przykłady oparte są częściowo na fragmentach pracy: Zenon Kulpa: *From Picture Processing to Interval Diagrams*. IFTR PAS Reports 4/2003, Warsaw 2003. (zob. http://www.ippt.gov.pl/~zkulpa/diagrams/fpptid.html).

[2] Przykład w: Zenon Kulpa: Co to są diagramy: czy to sposób na pomieszanie języków? *Tytuł roboczy*, 2004.12 (004).

[3] Zenon Kulpa: Reprezentacje diagramowe, czyli jak mówić obrazkami. *Tytuł Roboczy*, 2005.09/10 (009).

[4] O znaczeniu emergencji we wnioskowaniu diagramowym w geometrii zob. np.: Kenneth R. Koedinger: Emergent properties and structural constraints: Advantages of diagrammatic representations in reasoning and learn-

ing. W: *Reasoning with Diagrammatic Representations*. 1992 AAAI Spring Symposium, AAAI Press, Menlo Park, CA 1992, 151-156.

[5] Pitagoras z Samos (ok. 572-497 p.n.e.), półlegendarny grecki matematyk i filozof starożytny, twórca kierunku filozoficzno-religijnego zwanego pitagoreizmem i podstaw teorii liczb. Podany dowód przypisywany jest nie-określonemu starożytnemu traktatowi chińskiemu w: Roger B. Nelsen: *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*. The Mathematical Association of America, Washington, DC. 1993. Natomiast samemu Pitagorasowi przypisuje się go w: Szczepan Jeleński: *Śladami Pitagorasa*. WSiP, Warszawa 1988. Istnieje wiele różnorodnych dowodów diagramowych i częściowo diagramowych tego twierdzenia. Kilkanaście z nich można znaleźć w podanej wyżej książce Jeleńskiego.

[6] O zależności wyboru reprezentacji od jej celu, zob.: Zenon Kulpa: Reprezentacje diagramowe ..., op. cit.

[7] Jacques Bertin: *Graphics and Graphic Information Processing*. Walter de Gruyter, Berlin 1981.

[8] Zob. np.: Charles D. Hansen, Chris Johnson, eds.: *Visualization Handbook*. Academic Press, 2004; Robert Spence: *Information Visualization.* Addison-Wesley (ACM Press), 2000.

[9] Edward R. Tufte: *Visual Explanations: Images and Quantities, Evidence and Narrative*. Graphics Press, Cheshire, CT 1997. Objaśnienie problemu można też znaleźć w Internecie pod adresem http://www.asktog.com/books/challengerExerpt.html

[10] Nomogramy właściwe wynalazł Maurice d'Ocagne: *Traité de nomographie: Theorié des abaques, applications pratiques*. Gauthier-Villars, Paris 1899. Zob. też: T.L. Hankins: Blood, dirt, and nomograms; A particular history of graphs. *Isis*, **90** (1999), 50-80. Artykuł ten zawiera między innymi słynny przykład nomogramu Hendersona z 1928 roku, pozwalającego wyznaczać 105 różnych fizykochemicznych parametrów krwi.

[11] Wydano wiele książek poświęconych projektowaniu nomogramów, np.: Randolph P. Hoelscher, Joseph N. Arnold, Stanley H. Pierce: *Graphic Aids in Engineering Computation*. New York 1952; Edward Otto: *Nomography*. Pergamon Press/PWN, Oxford/Warszawa 1963. Książki poświęcone zastosowaniom matematyki lub obliczeniom inżynierskim często zawierały rozdział na ten temat, np.: Edward Otto: Nomografia, w: Hugo Steinhaus, red.: *Elementy nowoczesnej matematyki dla inżynierów*. PWN, Warszawa – Wrocław 1971. Warto również odwiedzić witrynę http://www.projectrho.com/nomogram/index.html

[12] Zenon Kulpa: Błędy diagramowe, czyli jak nie dać się zwieść pozorom. *Tytuł Roboczy*, 2005.03/04 (006).

[13] Zenon Kulpa: Błędy diagramowe ..., op. cit.

[14] Nathaniel Miller: *A Diagrammatic Formal System for Euclidean Geometry*. Ph.D. Thesis, Cornell University, Ithaca, NY 2001.

[15] Zenon Kulpa: Błędy diagramowe ..., op. cit.

[16] Zenon Kulpa: Błędy diagramowe ..., op. cit.

[17] Zenon Kulpa: Błędy diagramowe ..., op. cit.

[18] Pierwszym, i chyba do tej pory jedynym autorem, który zauważył ten fakt, był Dubnow w: Jakow S. Dubnow: *Oszibki w geometriczeskich dokazatelstwach*. Gos. Izd. Tekh.-Teor. Lit., Moskwa 1955, wyd. 2. (Tłum. ang.: Yakov S. Dubnov: *Mistakes in Geometric Proofs*. Heath, Boston, MA 1963.)

[19] Zenon Kulpa: Figury niemożliwe, czyli ogólna teoria smoków. *Tytuł Roboczy*, 2005.05/06 (007); Zenon Kulpa: Szalony konstruktor, czyli jak zbudować coś, czego nie ma. *Tytuł Roboczy*, 2005.07/08 (008).

[20] Przykład zaczerpnięty z: Roger B. Nelsen: *Proofs Without Words …, op. cit*., gdzie przypisano go ogólnie „starożytnym Grekom."

[21] Zenon Kulpa: Błędy diagramowe …, op. cit.

[22] Zob. tytuł zbioru wnioskowań diagramowych: Roger B. Nelsen: *Proofs Without Words* ..., op. cit.