



**INNOWACYJNA
GOSPODARKA**
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Fundacja na rzecz Nauki Polskiej

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI FUNDUSZ
ROZWOJU REGIONALNEGO



Przepływ kropeł przez siatkę o geometrii deski Galtona

Michał Oszmaniec

8 grudnia 2010

Plan Seminarium

- 1 Przepływ kropeł przez „deskę Galtona”
- 2 Model opornikowy przepływu kropeł przez mikrokanały
- 3 Wyniki analityczne
- 4 Wyniki numeryczne
- 5 Porównanie z doświadczeniem

Plan Seminarium

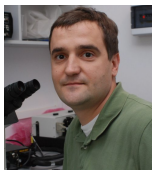
Gorące podziękowania:



dr. hab Piotr Szymczak (IFT UW)

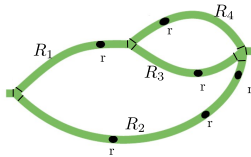
Plan Seminarium

Gorące podziękowania:

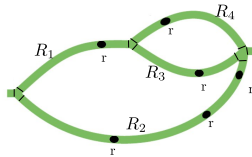


dr. hab. Piotr Garstecki (IChF PAN)

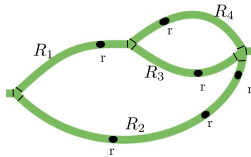
- $d \approx 100 [\mu m]$, $V \approx 0.1 [\frac{cm}{s}]$, $\mu \approx 1 [Pa s]$, $\sigma \approx 40 [\frac{mN}{m}]$.
- W przepływie pojedynczej fazy dominują efekty lepkościowe:
 $Re = \frac{\rho V d}{\mu} \approx 10^{-4} \ll 1$
- Na granicy faz dominują efekty powierzchniowe:
 $Ca \approx \frac{\mu V}{\sigma} \approx 0.02 \ll 1$



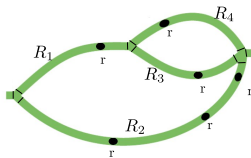
- We wszystkich kanałach mamy do czynienia z przepływem Poiseuille'a: $\Delta P_i = R_i Q_i$
- Krople są traktowane jako punktowe cząstki, niosą ze sobą pewien opór r , Efektywny opór danego kanału: $R_{ef} = R_0 + nr$
- Na każdym skrzyżowaniu dana kropelka idzie tam, gdzie jest większy przepływ



- We wszystkich kanałach mamy do czynienia z przepływem Poiseuille'a: $\Delta P_i = R_i Q_i$
- Krople są traktowane jako punktowe cząstki, niosą ze sobą pewien opór r , Efektywny opór danego kanału: $R_{ef} = R_0 + nr$
- Na każdym skrzyżowaniu dana kropelka idzie tam, gdzie jest większy przepływ

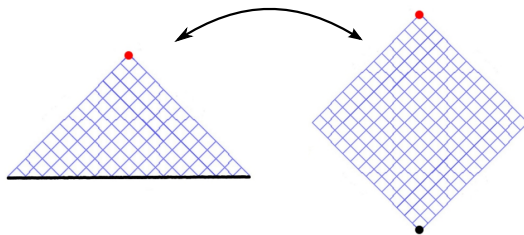


- We wszystkich kanałach mamy do czynienia z przepływem Poiseuille'a: $\Delta P_i = R_i Q_i$
- Krople są traktowane jako punktowe cząstki, niosą ze sobą pewien opór r , Efektywny opór danego kanału: $R_{ef} = R_0 + nr$
- Na każdym skrzyżowaniu dana kropelka idzie tam, gdzie jest większy przepływ

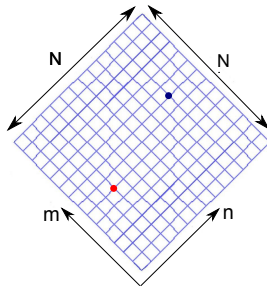


- We wszystkich kanałach mamy do czynienia z przepływem Poiseuille'a: $\Delta P_i = R_i Q_i$
- Krople są traktowane jako punktowe cząstki, niosą ze sobą pewien opór r , Efektywny opór danego kanału: $R_{ef} = R_0 + nr$
- Na każdym skrzyżowaniu dana kropelka idzie tam, gdzie jest większy przepływ

Rozważmy jednorodną siatkę kwadratową Γ o rozmiarach N na N :



$$\Gamma = [0, \dots, N - 1] \times [0, \dots, N - 1]$$



Pole ciśnienia $\mathcal{P}(n, m)$ spełnia równanie:

$$\sum_{(n', m') \sim (n, m)} [\mathcal{P}(n, m) - \mathcal{P}(n', m')] = \delta_{(n_1, n)} \delta_{(m_1, m)} - \delta_{(n_2, n)} \delta_{(m_2, m)}$$

Można je rozwiązać wykorzystując transformację Cosinus:

$$\tilde{f}(l, k) = \frac{4}{N(1 + \delta_{k,0})(1 + \delta_{l,0})} \sum_{(n,m) \in \Gamma} f(n, m) \cos\left(\frac{\pi k}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi l}{N}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$f(n, m) = \frac{1}{N} \sum_{(l,k) \in \Gamma} \tilde{f}(l, k) \cos\left(\frac{\pi k}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi l}{N}\left(m + \frac{1}{2}\right)\right)$$

Która jednoznacznie przekształca $Map(\Gamma, \mathbb{R})$ w siebie:

$$\mathcal{F}_c : Map(\Gamma, \mathbb{R}) \longrightarrow Map(\Gamma, \mathbb{R})$$

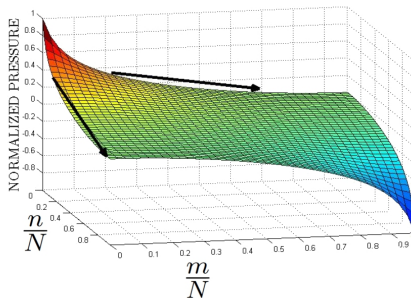
$$f(n, m) \longrightarrow \tilde{f}(k, l)$$

Gdy przecechujemy \mathcal{P} tak , że $\langle \mathcal{P} \rangle_{\Gamma} = \tilde{\mathcal{P}}(0,0) = 0$ mamy:

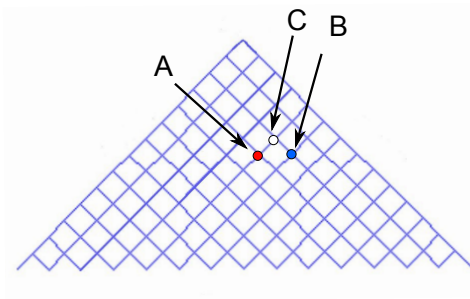
$$\mathcal{P} = \mathcal{F}_c^{-1} \left[\frac{2}{N} \frac{\cos(\frac{\pi k}{N}(n_1 + \frac{1}{2})) \cos(\frac{\pi k}{N}(m_1 + \frac{1}{2})) - \cos(\frac{\pi l}{N}(n_2 + \frac{1}{2})) \cos(\frac{\pi k}{N}(m_2 + \frac{1}{2}))}{(1 + \delta_{k,0})(1 + \delta_{l,0})(2 - \cos(\frac{\pi l}{N}) - \cos(\frac{\pi k}{N}))} \right]$$

W szczególnym przypadku, gdy $n_1 = m_1 = 0$ i $n_2 = m_2 = N - 1$ mamy:

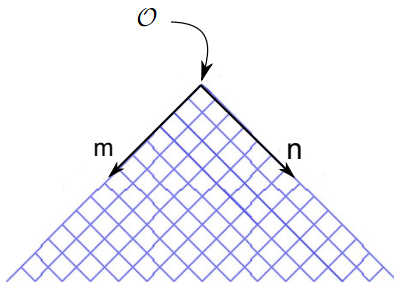
$$\mathcal{P}(n, m) = \frac{2}{N^2} \sum_{(l,k) \in \Gamma \setminus (0,0)} \frac{\cos(\frac{\pi l}{2N}) \cos(\frac{\pi k}{2N})(1 - (-1)^{l+k}) \cos(\frac{\pi l}{N}(n + \frac{1}{2})) \cos(\frac{\pi k}{N}(m + \frac{1}{2}))}{(1 + \delta_{k,0})(1 + \delta_{l,0})(2 - \cos(\frac{\pi l}{N}) - \cos(\frac{\pi k}{N}))}$$

Rysunek: Rozkład ciśnienia w Γ

$$\mathcal{P}_A > \mathcal{P}_B \implies I_{CA} < I_{CB}$$



Rysunek: Mechanizm separacji kropel w modelu opornikowym



$$\partial_b \Delta = \{(n, m) \in \Delta \mid n + m = N - 1\}$$

Oznaczmy: $\partial \Delta = \partial_b \Delta \cup \mathcal{O}$ (brzeg), $Int(\Delta) = \Delta \setminus \partial \Delta$ (wnętrze)

- Ustalamy $\mathcal{P}(\mathcal{O}) = 1$ i kładziemy $\mathcal{P}(q) = 0$ gdy $q \in \partial_b \Delta$
- \mathcal{P} jest harmoniczną na $Int(\Delta)$
- Inna funkcja harmoniczna o tych własnościach: $\mathbb{P}(q)$ - warunkowe prawdopodobieństwo tego, że błądząca przypadkowo cząstka zaczynająca z $q \in \Delta$ dotrze do \mathcal{O} zanim dotrze do $\partial_b \Delta$
- $\mathcal{P}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot)$
- Idea: Udowodnić nierówności na $\mathbb{P}(\cdot)$

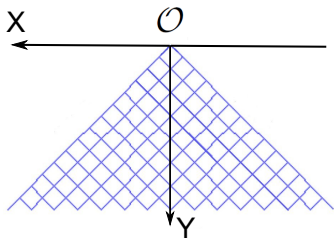
- Ustalamy $\mathcal{P}(\mathcal{O}) = 1$ i kładziemy $\mathcal{P}(q) = 0$ gdy $q \in \partial_b \Delta$
- \mathcal{P} jest harmoniczną na $Int(\Delta)$
- Inna funkcja harmoniczna o tych własnościach: $\mathbb{P}(q)$ - warunkowe prawdopodobieństwo tego, że błądząca przypadkowo cząstka zaczynająca z $q \in \Delta$ dotrze do \mathcal{O} zanim dotrze do $\partial_b \Delta$
- $\mathcal{P}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot)$
- Idea: Udowodnić nierówności na $\mathbb{P}(\cdot)$

- Ustalamy $\mathcal{P}(\mathcal{O}) = 1$ i kładziemy $\mathcal{P}(q) = 0$ gdy $q \in \partial_b \Delta$
- \mathcal{P} jest harmoniczną na $Int(\Delta)$
- Inna funkcja harmoniczna o tych własnościach: $\mathbb{P}(q)$ - warunkowe prawdopodobieństwo tego, że błądząca przypadkowo cząstka zaczynająca z $q \in \Delta$ dotrze do \mathcal{O} zanim dotrze do $\partial_b \Delta$
- $\mathcal{P}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot)$
- Idea: Udowodnić nierówności na $\mathbb{P}(\cdot)$

- Ustalamy $\mathcal{P}(\mathcal{O}) = 1$ i kładziemy $\mathcal{P}(q) = 0$ gdy $q \in \partial_b \Delta$
- \mathcal{P} jest harmoniczną na $Int(\Delta)$
- Inna funkcja harmoniczna o tych własnościach: $\mathbb{P}(q)$ - warunkowe prawdopodobieństwo tego, że błądząca przypadkowo cząstka zaczynająca z $q \in \Delta$ dotrze do \mathcal{O} zanim dotrze do $\partial_b \Delta$
- $\mathcal{P}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot)$
- Idea: Udowodnić nierówności na $\mathbb{P}(\cdot)$

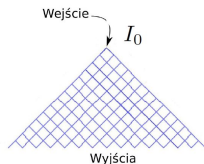
- Ustalamy $\mathcal{P}(\mathcal{O}) = 1$ i kładziemy $\mathcal{P}(q) = 0$ gdy $q \in \partial_b \Delta$
- \mathcal{P} jest harmoniczną na $Int(\Delta)$
- Inna funkcja harmoniczna o tych własnościach: $\mathbb{P}(q)$ - warunkowe prawdopodobieństwo tego, że błądząca przypadkowo cząstka zaczynająca z $q \in \Delta$ dotrze do \mathcal{O} zanim dotrze do $\partial_b \Delta$
- $\mathcal{P}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot)$
- Idea: Udowodnić nierówności na $\mathbb{P}(\cdot)$

Stwierdzenie 1

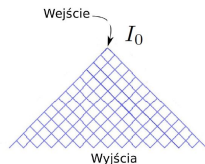
$$\mathbb{P}(q) > \mathbb{P}(q') \text{ jeśli } q \sim q' \text{ i } \text{dist}(q, \mathcal{O}) < \text{dist}(q', \mathcal{O})$$


Stwierdzenie 2

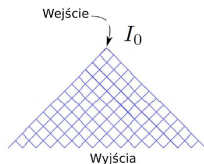
$$\mathbb{P}(q) > \mathbb{P}(q') \text{ jeśli } \text{dist}(q, \mathcal{O}) = \text{dist}(q', \mathcal{O}) \text{ i } |X|(q) < |X|(q')$$



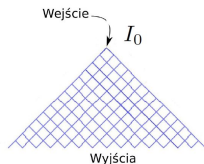
- Opisany układ: jednorodna deska Galtona zasilana stałym przepływem fazy ciągłej
- Wybór jednostek: $I_0 = 1$, $R = 1$
- Jedyne istotne parametry: f oraz r
- Efektywności separatora: stosunek przepływu w kanałach „czystych” do przepływu w kanałach przez które wychodzą krople (E)



- Opisany układ: jednorodna deska Galtona zasilana stałym przepływem fazy ciągłej
- Wybór jednostek: $I_0 = 1$, $R = 1$
- Jedyne istotne parametry: f oraz r
- Efektywności separatora: stosunek przepływu w kanałach „czystych” do przepływu w kanałach przez które wychodzą krople (E)

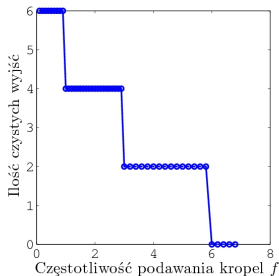


- Opisywany układ: jednorodna deska Galtona zasilana stałym przepływem fazy ciągłej
- Wybór jednostek: $I_0 = 1$, $R = 1$
- Jedyne istotne parametry: f oraz r
- Efektywności separatora: stosunek przepływu w kanałach „czystych” do przepływu w kanałach przez które wychodzą krople (E)

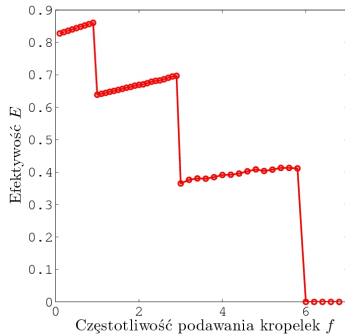


- Opisany układ: jednorodna deska Galtona zasilana stałym przepływem fazy ciągłej
- Wybór jednostek: $I_0 = 1$, $R = 1$
- Jedyne istotne parametry: f oraz r
- Efektywności separatora: stosunek przepływu w kanałach „czystych” do przepływu w kanałach przez które wychodzą krople (E)

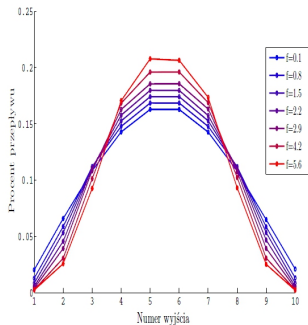
Przy ustalonym r i zmiennym f charakter pracy separatora w modelu zmienia się skokowo, dla pewnych ustalonych częstości:



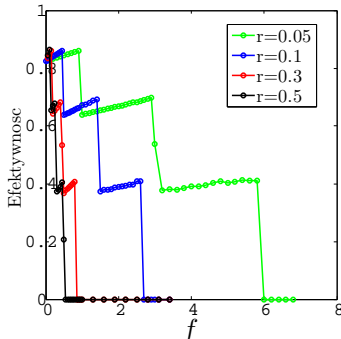
Przy ustalonym r i zmiennym f charakter pracy separatora w modelu zmienia się skokowo, dla pewnych ustalonych częstości:



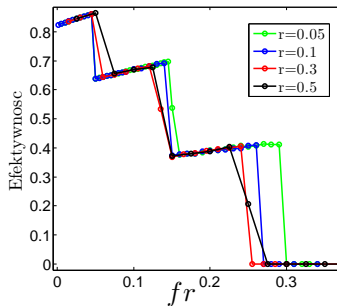
W miarę zwiększania f coraz więcej fazy ciągłej płynie środkiem układu:

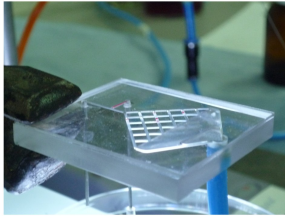


Wraz ze wzrostem oporu r charakterystyczne częstotliwości graniczne maleją:



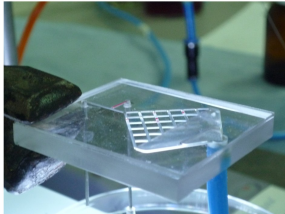
Jednakże po przeskalowaniu:





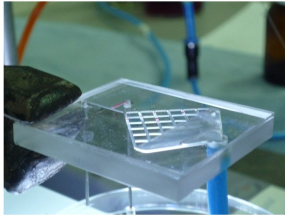
Zjawiska nie uwzględniane przez model opornikowy:

- Nie Ohmowski opór pojedynczych kropli w kanale
- Dokładna struktura przepływów na skrzyżowaniu
- Deformacja kropeł na skrzyżowaniu



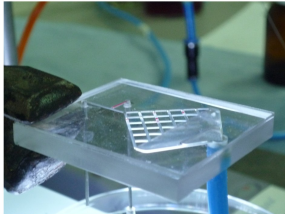
Zjawiska nie uwzględniane przez model opornikowy:

- Nie Ohmowski opór pojedynczych kropli w kanale
- Dokładna struktura przepływów na skrzyżowaniu
- Deformacja kropli na skrzyżowaniu



Zjawiska nie uwzględniane przez model opornikowy:

- Nie Ohmowski opór pojedynczych kropli w kanale
- Dokładna struktura przepływów na skrzyżowaniu
- Deformacja kropli na skrzyżowaniu



Zjawiska nie uwzględniane przez model opornikowy:

- Nie Ohmowski opór pojedynczych kropli w kanale
- Dokładna struktura przepływów na skrzyżowaniu
- Deformacja kropeł na skrzyżowaniu

- Model opornikowy daje jakościowe wyjaśnienie zachowania kropeł w desce Galtona
- Sieć mikrokanałów o takiej geometrii można wykorzystać jako separator mikroprzepływowy
- Separator charakteryzują „tryby działania”, które zależą wyłącznie od fr dla $r \ll 1$

- Model opornikowy daje jakościowe wyjaśnienie zachowania kropeł w desce Galtona
- Sieć mikrokanałów o takiej geometrii można wykorzystać jako separator mikroprzepływowy
- Separator charakteryzują „tryby działania”, które zależą wyłącznie od fr dla $r \ll 1$

- Model opornikowy daje jakościowe wyjaśnienie zachowania kropeł w desce Galtona
- Sieć mikrokanałów o takiej geometrii można wykorzystać jako separator mikroprzepływowy
- Separator charakteryzują „tryby działania”, które zależą wyłącznie od fr dla $r \ll 1$



Random walks and electric networks (preprint), Peter G. Doyle and J. Laurie Snell



Dynamic memory in a microfluidic system of droplets travelling through a simple network of microchannels, Olgierd Cybulski and Piotr Garstecki, Lab Chip 2010

Przepływ kropel przez „deskę Galtona”

Model opornikowy przepływu kropel przez mikrokanady

Wyniki analityczne

Wyniki numeryczne

Porównanie z doświadczeniem

Podsumowanie

Bibliografia