

Andrzej Ziółkowski

**PSEUDOSPĘŻYSTOŚĆ
STOPÓW Z PAMIĘCIĄ KSZTAŁTU
BADANIA DOŚWIADCZALNE
I OPIS TEORETYCZNY**



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK
WARSZAWA 2006

ISSN 0208-5658

Redaktor Naczelny:
doc. dr hab. Zbigniew Kotulski

Recenzent:
prof. dr hab. Wojciech Nowacki

Praca wpłynęła do Redakcji 10 maja 2006 r.

Praca habilitacyjna

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład: 100 egz. Ark. Wyd. 12.5

Oddano do druku w sierpniu 2006 roku

Druk i oprawa: Drukarnia Braci Grodzickich, Piaseczno, ul. Geodetów 47a

Spis Treści

Rozdział 1. Wstęp.....	8
1.1 Wprowadzenie.....	8
1.2. Cel i zakres pracy.....	11
1.2.1 Cel pracy.....	11
1.2.2 Zakres pracy.....	12
Rozdział 2. Zjawiska pamięci kształtu w stopach metalicznych.....	14
2.1 Rys historyczny.....	14
2.2 Typy zjawisk z pamięcią kształtu – podstawy fizyczne, własności funkcjonalne.....	15
2.3 Charakteryzowanie i własności stopów z pamięcią kształtu.....	19
2.4 Obszary zastosowań i tryby pracy stopów z pamięcią kształtu.....	20
2.5 Modelowanie zachowania stopów z pamięcią kształtu.....	24
Rozdział 3. Termodynamiczny model pseudosprężystości R_L	34
3.1 Wprowadzenie.....	34
3.2 Przegląd wyników doświadczalnych 1D i częściowo 3D.....	34
3.3 Termodynamiczny model pseudosprężystości R_L	43
Rozdział 4. Mikroskopowe uzasadnienie przyjętej w modelu R_L makroskopowej postaci funkcji energii swobodnej.....	57
4.1 Wprowadzenie.....	57
4.2 Obserwacje mikroskopowe cech charakterystycznych mikrostruktur martenzytycznych.....	58
4.3 Opis termosprężystej przemiany martenzytycznej w języku mechaniki ośrodków ciągłych.....	59
4.3.1 Problem brzegowy makroelementu o niejednorodnych własnościach sprężystych i z niejednorodnym polem odkształceń własnych.....	61
4.3.2 Energia sprężysta makroelementu (RVE) w obecności odkształceń własnych.....	64
4.3.3 Problem brzegowy i energia sprężysta makroelementu dwufazowego.....	67
4.3.4 Struktura energii $W^{(in)}$ zmagazynowanej na skutek niekompatybilności pola odkształceń własnych.....	69
4.4 Postulat optymalnego uporządkowania mikrostruktury i jego konsekwencje.....	73
4.5 Podsumowanie.....	76
Aneks 4.1 Zasada wzajemności w liniowej teorii sprężystości w obecności odkształceń własnych.....	77
Aneks 4.2 Praca całkowita, zasada kompatybilności energii mechanicznej – postulat Hilla, koncepcja własności efektywnych.....	78
Rozdział 5. Weryfikacja doświadczalna modelu R_L dla stopu NiTi.....	82
5.1 Wprowadzenie.....	82
5.2 Metodologia badań stopu NiTi w złożonych stanach naprężenia.....	84
5.3 Opracowanie danych doświadczalnych otrzymanych dla stopu NiTi w celu weryfikacji doświadczalnej założeń teoretycznych modelu R_L	88

5.4 Identyfikacja stałych i funkcji materiałowych modelu R_L . Porównanie przewidywań modelowych i krzywych doświadczalnych dla stopu NiTi – przemiana monokliniczna	112
5.5 Podsumowanie	118
Rozdział 6. Nowy specyficzny model kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej	119
6.1 Wprowadzenie.....	119
6.2 Formalne równania kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej – podstawy termodynamiczne	123
6.3 Krzywe kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej, identyfikacja stałych kinetyki modelu Ranieckiego i Lexcellenta	126
6.4 Analiza i dyskusja danych doświadczalnych – profile prędkości termosprężystej przemiany martenzytycznej indukowanej naprężeniem w polikrystalicznym stopie NiTi	130
6.4.1 Nowy formalny model kinetyki cząstkowych przemian fazowych	130
6.4.2 Nowy formalny model kinetyki pełnych przemian fazowych	136
6.5 Podsumowanie	140
7. Fenomenologiczny termodynamiczny model zachowania stopów z pamięcią kształtu w oparciu o multiplikatywny rozkład tensora gradientu deformacji	142
7.1 Wprowadzenie.....	142
7.2 Zależności kinematyczne przy skończonych deformacjach.....	144
7.3 Termodynamiczne zmienne stanu makroelementu SMA	148
7.4 Równania stanu – przypadek ogólny	150
7.5 Równania stanu – materiały izotropowe sprężyste.....	152
7.6 Prędkościowe równania stanu	155
7.7 Równanie łącznikowe – łączące opis własności materiałowych i ruchu	160
7.8 Dyssypacja pracy	166
7.9 Specjalny liniowy sprężyste model pseudosprężystości stopów z pamięcią kształtu.....	166
7.9.1 Funkcja energii swobodnej	167
7.9.2 Tensor spinu niesprężystego $\mathbf{\omega}^{in}$	168
7.9.3 Tensor prędkości odkształceń fazowych w opisie Eulerowskim \mathbf{d}^{in}	169
7.9.4 Efekty cieplne i dyssypacja pracy mechanicznej.....	173
7.9.5 Kinetyka przemiany fazowej \dot{z}	174
7.9.6 Kompletny zestaw równań konstytutywnych makroskopowego, liniowego sprężyste, modelu pseudosprężystego zachowania stopów z pamięcią kształtu	176
7.10 Podsumowanie	177
Aneks 7.1 Wyprowadzenie zależności pomiędzy spinami sprężystymi Lagrangeowskim $\mathbf{\omega}^{eL}$, Eulerowskim $\mathbf{\omega}^{eE}$ i względnym $\mathbf{\omega}^{eR}$	179

Aneks 7.2 Wyprowadzenie związków kinematycznych pomiędzy $\dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(0) \leftrightarrow \underline{\mathbf{D}}^e$, ($\dot{\underline{\mathbf{e}}}^e(0) \leftrightarrow \underline{\mathbf{d}}^e$).....	181
Aneks 7.3 Wyprowadzenie związków kinematycznych pomiędzy $\frac{\overset{\circ}{\underline{\mathbf{e}}}^e(0)}{(J_e)} \leftrightarrow \underline{\mathbf{d}}^e$, tensor $\underline{\mathcal{L}}^{de}(\underline{\mathbf{U}}^e)$ i jego własności w przypadku izotropii sprężystej, krotacyjna sprężysta pochodna logarytmiczna $\frac{\overset{\circ}{\underline{\mathbf{e}}}^e(0)}{(e_{\log})}$	182
Aneks 7.4 Rodzina izoklinicznych konfiguracji naturalnych – warunek $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{in} = \mathbf{0}$	186
Rozdział 8. Podsumowanie i wnioski końcowe	193
Bibliografia.....	195

Rozdział 1. Wstęp

1.1 Wprowadzenie

Szeroki strumień badań naukowych i liczne niezwykle złożone projekty, zarówno naukowe jak i przemysłowe, ukierunkowane są na odkrywanie nowych, zaawansowanych materiałów, a także na uzyskiwanie specjalnych własności materiałów inżynierskich uznawanych za tradycyjne. Współcześnie w coraz większym stopniu można mówić o materiałach „tworzonych przez człowieka”. Dobrymi przykładami takich wymyślonych, zaprojektowanych i wytworzonych przez człowieka materiałów, o już ugruntowanej w praktyce inżynierskiej pozycji, są plastiki czy kompozyty.

Interesującą, stosunkowo nową, koncepcją skupiającą uwagę naukowców i inżynierów jest koncepcja tzw. materiałów „inteligentnych”¹, czy też aktywnych – określenia te w niniejszej pracy traktowane są jako synonimy, patrz także [91]. Cechą odróżniającą materiały inteligentne od „zwykłych” materiałów jest to, że posiadają one zdolność do celowego, aktywnego adaptowania się do zmieniających się warunków otoczenia. Aby adaptacja taka była możliwa materiał aktywny musi posiadać jednocześnie szereg skoordynowanych wzajemnie własności funkcjonalnych. Należą do nich: możliwość wykrywania zmian w otoczeniu, zdolność do wykonania określonej reakcji w odpowiedzi na wykryte zmiany oraz zdolność sterowania tą reakcją. Reakcja materiału wymaga zapewnienia zasilania wewnętrznego lub zewnętrznego. Obecne realizacje koncepcji materiału inteligentnego (aktywnego) polegają na wykorzystaniu efektów sprzężeń pomiędzy różnymi polami fizycznymi na przykład zjawiska piezoelektryczności (sprężenie pola elektrycznego i mechanicznego), zjawiska chemoluminescencji (sprężenie efektów chemicznych i optycznych), termosprężystości (sprężenie efektów termicznych i mechanicznych).

Zdolności adaptacyjne materiału inteligentnego polegają na zmianie jego własności, struktury wewnętrznej, charakterystyk funkcjonalnych, wykonaniu pracy w reakcji na zmianę określonych warunków zewnętrznych. Spektakularnym przykładem może być tutaj farba, która po przekroczeniu pewnej temperatury w jakiej się znajduje zmienia swój kolor.

Specjalne własności materiałów aktywnych, ich wielofunkcyjność, bardzo często pozwalają na znaczące uproszczenie konstrukcji urządzenia inżynierskiego, która z konieczności musiałaby być bardzo skomplikowana bez możliwości użycia takich materiałów.

Stopy z pamięcią kształtu (SMA²) uważane są za jedne z najbardziej obiecujących materiałów inteligentnych. Nazwa tej grupy materiałów pochodzi od ich

¹ Szerzej systemów inteligentnych.

² W dalszej części pracy będzie często używany dla tej grupy materiałów skrót SMA, pochodzący od ich nazwy w języku angielskim Shape Memory Alloys. Należy wspomnieć,

niezwykłego zachowania, w porównaniu do innych materiałów metalicznych. Mianowicie tzw. *jednokierunkowego efektu pamięci kształtu* polegającego na tym, że stop SMA trwale jak by się wydawało zdeformowany odzyskuje swój pierwotny kształt. Ten odzysk kształtu następuje po podgrzaniu zdeformowanego trwale materiału powyżej pewnej charakterystycznej temperatury, innej dla różnych stopów z pamięcią kształtu. Typowe wartości odkształceń jakie mogą być odzyskane są rzędu 5%, jednakże mogą one osiągać wartość nawet 10% w przypadku niektórych stopów.

Innym niezwykłym dla „standardowych” materiałów metalicznych efektem wykazywanym przez stopy z pamięcią kształtu jest efekt *pseudosprężystości*³, zachodzący w zakresie wyższych temperatur w porównaniu do zakresu, w którym dla danego stopu ma miejsce jednokierunkowy efekt pamięci kształtu. O efekcie pseudosprężystego zachowania stopu z pamięcią kształtu mówi się wtedy, gdy poddany mechanicznemu lub termomechanicznemu obciążeniu materiał, po przekroczeniu pewnego naprężenia krytycznego, ulega odkształceniu od kilku do kilkunastu procent, które to odkształcenie znika po zdjęciu obciążenia. Przedrostek „pseudo” w nazwie zjawiska podkreśla fakt, że cały cykl obciążenie-odciążenie stopu SMA nie przebiega po tej samej ścieżce, jak to ma miejsce w przypadku materiałów o nieliniowym sprężystym zachowaniu, lecz wykazuje pętlę histerezy. Wielkość tej pętli zależy od wielu czynników, np. składu chemicznego stopu SMA lub jego obróbki termomechanicznej.

W wypadku zastosowania do stopu SMA specjalnej obróbki termomechanicznej zwanej „treningiem” można uzyskać występowanie tzw. *dwukierunkowego zjawiska pamięci kształtu*. W wypadku dwukierunkowego zjawiska pamięci kształtu próbka wykonana ze stopu SMA, mająca pewien kształt w wysokiej temperaturze, przyjmuje kształt niskotemperaturowy po obniżeniu jej temperatury poniżej pewnej charakterystycznej dla danego stopu SMA temperatury. Po ponownym jej podgrzaniu powyżej drugiej charakterystycznej dla danego stopu temperatury przyjmuje ona na powrót swój kształt wysokotemperaturowy. Typowy zakres zmian odkształceń w trakcie dwukierunkowego efektu pamięci kształtu to 3-4%.

Na gruncie fizycznym za zjawiska pamięci kształtu opisane powyżej odpowiedzialna jest termosprężysta przemiana martenzytyczna. Dzisiejsze żywe zainteresowanie stopami z pamięcią kształtu zostało zapoczątkowane odkryciem w 1963 roku przez Buhlera i innych [12] zachodzenia termosprężystej przemiany martenzytycznej i występowaniem zjawiska pamięci kształtu w stopie $\text{Ni}_{50\%}\text{Ti}$. Pierwsze komercyjne wykorzystanie zjawiska pamięci kształtu stopów metalicznych

iz odrębną niezwykle popularną grupą materiałów znajdującą powszechne zastosowanie stanowią polimery z pamięcią kształtu Shape Memory Polymers (SMP), np. folie termokurczliwe – w niniejszej pracy nie będą one omawiane.

³ Właściwie efekt supersprężystości w terminologii wprowadzonej przez Otsukę [52].

miało miejsce w 1971 z użyciem właśnie tego stopu. Była to złączka hydrauliczna wykorzystana w instalacji hydraulicznej samolotu F-14.

Od tego czasu specjalne własności stopów z pamięcią kształtu zaowocowały olbrzymią liczbą zastosowań. Liczba patentów, w których głównym zastrzeżeniem jest wykorzystanie specjalnych własności stopów z pamięcią kształtu, przekroczyła 10000 [41]. Rynek komercyjny zdominowany jest obecnie przez trzy grupy stopów: stopy na bazie niklu i tytanu (NiTiX), stopy na bazie miedzi (CuZnX CuAlX) i stopy na bazie żelaza. Najpowszechniej używane są stopy z pamięcią kształtu na bazie NiTi. Na rynku komercyjnym dostępne są materiały SMA o przeróżnych składach chemicznych i w różnych postaciach wyrobów surowych i półwyrobów, takich jak pręty, druty, płytki, rurki, cienkie warstwy, membrany, sprężyny, etc.

Początkowo materiały SMA znalazły zastosowanie w prostych urządzeniach, takich jak złączki, klamry czy zapinki. Zastosowania te stopniowo ewoluują w kierunku siłowników gdzie specjalne własności materiału są wykorzystywane do wykrywania zmieniających się warunków otoczenia i dopiero po spełnieniu określonych kryteriów następuje aktywna reakcja siłownika. „Aktywne” czy też inteligentne działanie jest uzyskiwane poprzez wbudowanie w urządzenie odpowiednich funkcji sterowania, których logika może być prosta lub bardzo złożona. Elementy wykonane ze stopu z pamięcią kształtu nie tylko mogą przenosić obciążenia lecz mogą także pełnić rolę mechanizmów, które jeśli byłyby zbudowane z tradycyjnych materiałów inżynierskich wymagałyby do ich konstrukcji kilku elementów pozostających w skomplikowanym układzie.

Zastosowaniom stopów z pamięcią kształtu w przemyśle medycznym jako wszczepów poświęcona jest książka, której redaktorem jest Yahia [89]. Przeglądowi zastosowań medycznych stopów SMA poświęcona jest praca Dueriga [21], zaś przeglądu zastosowań nie medycznych dokonali Otsuka i Kakeshita [53]. Zakres oraz obszar zastosowań stopów z pamięcią kształtu rośnie niezwykle dynamicznie. Pole to jest już obecnie wyjątkowo szerokie począwszy od niezwykle prostych zastosowań jak na przykład kołki mocujące SMA, które posiadają korzystne charakterystyki przy zastosowaniu ich do konserwacji starych budowli architektonicznych [43]; poprzez bardziej złożone konstrukcje np. opracowane ostatnio urządzenie do automatycznej likwidacji nadmiernego zwisu linii energetycznych wysokiego napięcia [74]; kończąc na wysoce odpowiedzialnych urządzeniach, takich jak mikro pompy medyczne [33], czy też stenty wydzielające lekarstwa zapobiegające ponownemu zarastaniu naczyń krwionośnych [97].

Proste technicznie urządzenia zawierające elementy wykonane ze stopów z pamięcią kształtu, takie jak anteny telefonów komórkowych, oprawki okularowe, supersprężyste pilniki ortodontyczne wykonane ze stopu NiTi, jak również medyczne druty prowadzące, prawie wcale nie wymagają lub wymagają w niewielkim zakresie prowadzenia projektowych obliczeń inżynierskich. Bardziej zaawansowane produkty, takie jak kriogeniczne złączki rurowe lub termomechaniczne zawory sterujące czy zawory bezpieczeństwa np.

przeciwoaparzeniowe, w których elementem roboczym jest sprężyna SMA, wymagają stosunkowo prostych procedur projektowania. Zaawansowane technicznie i odpowiedzialne produkty, takie jak stenty SMA lub „inteligentne” pompy – szczególnie te łączące funkcje czujnika, sterownika i siłownika – wymagają niezawodnych i silnych narzędzi projektowania takich jak np. metoda elementów skończonych.

Metoda elementów skończonych, aby umożliwić projektowanie złożonych konstrukcji inżynierskich, wymaga trójwymiarowego modelu konstytutywnego stopów z pamięcią kształtu. Specjalne własności tych materiałów wynikają z zachodzenia martenzytycznej przemiany fazowej, której towarzyszy wydzielanie się znacznej ilości ciepła utajonego przemiany oraz ciepła wynikającego z dyssypacji pracy mechanicznej. Aby można było poprawnie opisać efekty sprzężeń termomechanicznych, musi być zbudowany model termodynamiczny tego zjawiska fizycznego. Jednym z kluczowych elementów takiego termodynamicznego modelu są, oprócz odpowiedniej postaci potencjału energii swobodnej, tak zwane formalne równania kinetyki termosprężystej martenzytycznej przemiany fazowej.

Jak już wspomniano powyżej, odkształcenia pojawiające się podczas efektów pamięci kształtu są rzędu 10% i zgodnie z powszechnie przyjętą konwencją znajdują się na granicy poniżej której akceptowalne z inżynierskiego punktu widzenia wyniki daje teoria małych odkształceń, a powyżej której należy używać teorii skończonych deformacji. Nawet jeśli odkształcenia pojawiające się podczas nominalnej pracy urządzeń SMA nie są duże to makroskopowe obroty elementów urządzeń czy konstrukcji mogą być duże. Także analiza niektórych warunków zniszczenia może prowadzić do deformacji rzędu 30% i większych. Istnieje zatem potrzeba opracowania modelu konstytutywnego stopów z pamięcią kształtu w formalizmie skończonych deformacji.

1.2. Cel i zakres pracy

1.2.1 Cel pracy

Głównym celem niniejszej rozprawy jest sformułowanie trójwymiarowego makroskopowego termodynamicznego modelu pseudosprężystego zachowania stopów z pamięcią kształtu w formalizmie skończonych deformacji w oparciu o dostępne wyniki doświadczalne i ocenę już istniejących modeli. Celem autora jest zaproponowanie modelu „jak najprostszego”, jednakże umożliwiającego opisanie zachowania stopów z pamięcią kształtu z dokładnością wystarczającą do celów inżynierskich. Z tego powodu, jakkolwiek przy opracowywaniu modelu skorzystano z wielu obserwacji doświadczalnych na poziomie mikroskopowym to jednak świadomie zrezygnowano z wprowadzania w jawny sposób do modelu elementów opisu „mikroskopowego”. Skupiono się przede wszystkim na takim wykorzystaniu informacji z obserwacji zarówno mikro, mezo jak i makroskopowych, aby

zapropnować akceptowalne z punktu widzenia dokładności przewidywań modelowych uśrednione związki makroskopowe.

Cele pomocnicze pracy to weryfikacja doświadczalna podstawowych założeń modelu R_L stanowiącego materiał wyjściowy do sformułowania modelu pseudosprężystości w formalizmie skończonych deformacji. Zbadanie poprawności postulowanej heurystycznie w modelu R_L postaci potencjału termodynamicznego energii swobodnej na gruncie rozważań mikromechanicznych. Weryfikacja doświadczalna równań kinetyki termosprężystej martenzytycznej przemiany fazowej.

Elementy oryginalne pracy to:

- uzasadnienie na gruncie mikroskopowym przyjętej w modelu R_L , opracowanym przez Ranieckiego i Lexcellentę [65], postaci makroskopowego potencjału energii swobodnej,
- przeprowadzenie weryfikacji doświadczalnej modelu R_L dla złożonych stanów naprężenia (proporcjonalne ścieżki obciążenia) w oparciu o szeroki program badań doświadczalnych przeprowadzonych w IPPT, między innymi z udziałem autora niniejszej pracy,
- opracowanie udoskonalonego formalnego modelu kinetyki termosprężystej martenzytycznej przemiany fazowej,
- sformułowanie w formalizmie skończonych deformacji termodynamicznego modelu pseudosprężystego zachowania stopów z pamięcią kształtu w oparciu o multiplikatywny rozkład tensora gradientu deformacji.

1.2.2 Zakres pracy

Niniejsza rozprawa podzielona jest na osiem rozdziałów. Po wprowadzeniu, gdzie określono cel i zakres rozprawy, w rozdziale *drugim* scharakteryzowano specjalne własności stopów z pamięcią kształtu oraz przeanalizowano szczegółowo różne podejścia modelowe zaproponowane do opisu zachowania tych stopów. Rozdział ten ma charakter przeglądowy zaś jego celem jest określenie stanu wiedzy o stopach z pamięcią kształtu, umiejscowienie problemów postawionych i rozwiązanych w dalszych rozdziałach rozprawy.

W rozdziale *trzecim* dokonano przeglądu wyników doświadczalnych jedno i trójwymiarowych poświęconych stopom z pamięcią kształtu dostępnych w literaturze, które były wykorzystywane do sformułowania założeń termodynamicznego modelu pseudosprężystości R_L , rozwijanego przez Ranieckiego i Lexcellentę. W kolejnej sekcji szczegółowo przypomniano ostatnią wersję modelu R_L z roku 1998, przy czym prezentacja modelu odbiega od tej podanej w oryginalnej pracy. Zmieniony sposób prezentacji podyktowany jest jednym z głównych celów niniejszej rozprawy, tj. uogólnieniu modelu na zakres skończonych deformacji. Niektóre kluczowe wnioski wykorzystywane w modelu R_L wymagają założenia

addytywności tensorów małych odkształceń sprężystych i niesprężystych. Przypomniano termiczne równania stanu dla izotropowych materiałów SMA wynikające z założeń modelu R_L , oraz ich postać prędkościową.

Rozdział *czwarty* poświęcono rozważaniom teoretycznym nad pewnym problemem teorii sprężystości z odkształceniami własnymi, których wyniki pozwalają uzasadnić na gruncie mikroskopowym zaproponowaną heurystycznie w modelu R_L makroskopową funkcję energii swobodnej. Jest to praca oryginalna.

Rozdział *piąty* poświęcony jest weryfikacji teoretycznych założeń przyjętych przy opracowywaniu modelu pseudosprężystości R_L . Dokonano tego w oparciu o dane uzyskane po wykonaniu szerokiego programu badań doświadczalnych, między innymi z udziałem autora niniejszej pracy, na próbkach rurkowych wykonanych ze stopu NiTi poddanych złożonym dwuosiowym obciążeniom proporcjonalnym. Jest to praca oryginalna.

W rozdziale *sóstym* zaprezentowano analizę danych doświadczalnych uzyskanych dla stopu NiTi, która pozwoliła na zaproponowanie nowego specyficznego modelu kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej. Jest to praca oryginalna.

W rozdziale *síódmym* zaproponowano makroskopowy termodynamiczny model izotropowego zachowania stopów z pamięcią kształtu w oparciu o multiplikatywny rozkład tensora gradientu deformacji. Punktem wyjściowym do sformułowania tego modelu był opracowany w formalizmie małych odkształceń model Ranieckiego i Lexcellenta z 1998 roku. Niezależnymi zewnętrznymi zmiennymi stanu zaproponowanego modelu, w opisie na konfiguracji aktualnej są przestrzenne tensor odkształcenia Hencky'ego, tensor naprężenia Kirchoffa. Wewnętrzne zmienne stanu to udział masowy fazy martenzytycznej oraz tensor fazowych odkształceń własnych. Model pozwala przewidzieć efekty siłowe, odkształceniowe oraz sprzężeń termomechanicznych występujących w trakcie obciążania stopów z pamięcią kształtu. Jest to praca oryginalna.

Rozdział *ósmym* zawiera wnioski końcowe oraz kilka uwag odnośnie kierunku dalszych prac badawczych jakie zdaniem autora należałoby podjąć.

Rozdział 2. Zjawiska pamięci kształtu w stopach metalicznych

2.1 Rys historyczny

Historia badań naukowych nad efektami z pamięcią kształtu jest nierozzerwalnie związana z historią badań nad termosprężystą przemianą martenzytyczną, zjawiskiem fizycznym odpowiedzialnym za efekty pamięci kształtu w stopach metalicznych. Pierwszej obserwacji struktur martenzytycznych dokonał przy pomocy mikroskopu optycznego Adolf Martens około roku 1890. Według Christiana [17], o początku badań nad efektami pamięci kształtu można mówić wraz z pojawieniem się w pracy Ölandera [49] z 1932 roku wzmianki, o niezwykle sprężystym podobnym do gumy zachowaniu stopu AuCd w temperaturze pokojowej. Według Delaeya i innych [19] pseudosprężyste zachowanie i efekty pamięci kształtu były badane w stopie FeNi przez Scheila już w 1932 roku [73]. Ponownie Christian podaje, że pierwsza obserwacja dotycząca formowania się martenzytu termosprężystego w stopie CuZn była podana przez Greningera i Mooradiana w roku 1938 [24]. Regularne badania nad martenzytem termosprężystym zostały opublikowane przez Kurdjumova i Khandrosa w roku 1949 [35]. O pojawieniu się zjawisk pamięci kształtu w stopach metalicznych jako nowej dziedziny badań można mówić wraz z opublikowaniem w roku 1951 pracy Changa i Reada poświęconej zachowaniu stopu AuCd [14], w której poprawnie wyjaśniono mechanizm zjawiska pseudosprężystości. Wkrótce o występowaniu zjawiska pseudosprężystości w stopach CuZn donoszą Reynolds i Bever w pracy z roku 1952 [69] oraz Hornbogen i Wassermann w pracy z roku 1956 [29]. Efekt pseudosprężystości w stopie InTl został odkryty przez Burkhardta i Reada w roku 1953 [13], zaś przez Basinskiego i Christiana w roku 1954 [4]. Jego występowanie w stopie CuAlNi zostało stwierdzone przez Rachingera w roku 1958 [58]. Dzisiejszy rozkwit zainteresowania stopami z pamięcią kształtu jest wynikiem odkrycia tego zjawiska w stopie NiTi przez Buhlera i innych [12] w roku 1963, które to odkrycie zaowocowało pierwszym komercyjnym zastosowaniem stopów z pamięcią kształtu w roku 1971, jak podaje Melton w [41]. O występowaniu zjawiska pamięci kształtu w stopie Fe₃Pt pierwszy doniósł Wayman w roku 1971 [84]. Maki i inni ogłosili pojawienie się termosprężystego martenzytu w stopie na bazie żelaza FeNiCoTi w roku 1984 [39], zaś Sato i inni jako pierwsi odkryli występowanie zjawisk pamięci kształtu w stopie FeMnSi w roku 1982 [72]. Obecnie znana jest duża liczba stopów metalicznych wykazujących efekty pamięci kształtu na skutek zachodzenia w nich termosprężystej przemiany martenzytycznej i/lub reorientacji wariantów w fazie martenzytycznej. Jednakże, trzy grupy stopów dominują na rynku komercyjnym. Są to stopy na bazie NiTi, stopy na bazie Cu (CuZnX CuAlX) oraz stopy na bazie Fe.

Działalność badawcza poświęcona stopom z pamięcią kształtu oraz przemianie martenzytycznej jest niezwykle ożywiona. Od kilkunastu lat prowadzone są trzy, równoległe, regularne serie międzynarodowych konferencji poświęconych

omawianym zagadnieniom. Konferencje te to: Shape Memory and Superelastic Technologies Conferences – SMST, European Symposia on Martensitic Transformations and Shape Memory Alloys – ESOMAT oraz International Conferences on Martensitic Transformations – ICOMAT. Miało już miejsce siedem konferencji SMST – ostatnia ósma SMST-2006 odbyła się w dniach 7-11 maja 2006 w Pacific Grove, California, USA. Siódma konferencja ESOMAT ma się odbyć w Bochum, Niemcy w dniach 10-15 września, 2006 zaś konferencja ICOMAT 2005 odbyła się w Szanghaju, Chiny w dniach 14-17 czerwca, 2005. Materiały pokonferencyjne z reguły liczą powyżej 500 stron, patrz na przykład informacje zawarte na stronie sieciowej [94].

2.2 Typy zjawisk z pamięcią kształtu – podstawy fizyczne, własności funkcjonalne

Zjawiska pamięci kształtu pojawiają się na skutek zachodzenia termosprężystej przemiany martenzytycznej, patrz np. Otsuka i Wayman [52], czy Funakubo [23].

W wyniku chłodzenia, stabilna w wyższych temperaturach faza posiadająca siatkę krystalograficzną o wyższej symetrii – konwencjonalnie zwana austenitem, przekształca się w stabilną w niższych temperaturach fazę posiadającą siatkę krystalograficzną o niższej symetrii – konwencjonalnie zwaną martenzytem. Martenzytyczna przemiana fazowa zachodzi bezdyfuzyjnie, poprzez skoordynowany ruch wielu atomów – często określa się go jako *wojskowy*. Od rozpoczęcia do zakończenia przemiany względny ruch pojedynczego atomu uczestniczącego w przemianie martenzytycznej nie przekracza jednej odległości międzyatomowej. Na skutek tego skład chemiczny, stopień atomowego uporządkowania (nadstruktury), zdefekowania jest w fazie austenitycznej i martenzytycznej taki sam. Granica rozdziału faz jest granicą koherentną tzn. pole przemieszczeń na tej granicy jest polem ciągłym.

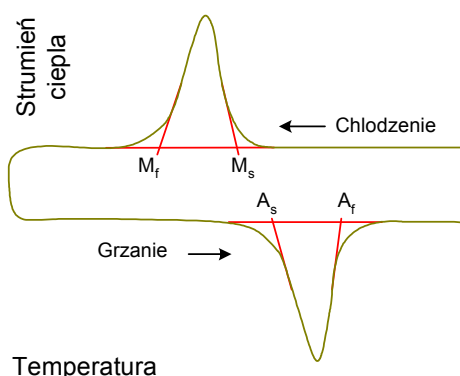
Przemiana martenzytyczna zaklasyfikowana jest jako przemiana fazowa pierwszego rodzaju, gdyż jej zajściu towarzyszy emisja ciepła ukrytego przemiany. Nie zachodzi ona w stałej temperaturze lecz charakteryzuje się ją czterema temperaturami charakterystycznymi M_s^0 , M_f^0 , A_s^0 , A_f^0 wyznaczanymi zazwyczaj metodą kalorymetrii różnicowej. Temperatura M_s^0 oznacza temperaturę, przy której podczas chłodzenia austenit zaczyna przemieniać się w martenzyt, zaś M_f^0 oznacza temperaturę po osiągnięciu której proces ten jest całkowicie zakończony. Temperatry A_s^0 i A_f^0 oznaczają temperatury, przy których rozpoczyna się, i odpowiednio kończy, przemiana odwrotna z martenzytu w austenit. Indeks „⁰” oznacza, że temperatury te wyznaczane są przy zerowym naprężeniu zewnętrznym. Na rysunku 2.1 pokazano typowy wynik testu kalorymetrii różnicowej dla stopu SMA z zaznaczonymi temperaturami charakterystycznymi przemian. Subtelne zmiany składu chemicznego i obróbka termomechaniczna mają silny wpływ na

wartości charakterystycznych temperatur przemiany martenzytycznej w stopach SMA. Martenzytyczna przemiana fazowa jest przemianą heterogeniczną, zachodzącą przez nukleację i wzrost zarodków. Kinetyka martenzytycznej przemiany fazowej jest praktycznie niewrażliwa na szybkość zmian indukujących ją czynników zewnętrznych, np. temperatury. Przemiany o takiej własności nazywane są przemianami atermicznymi.

Przemiana martenzytyczna wprost i odwrotna nie przebiegają po tych samych ścieżkach w przestrzeni stanów termodynamicznych, co objawia się występowaniem większej lub mniejszej pętli histerezy w zamkniętym cyklu przemiany wprost i odwrotnej.

„Klasyczna” przemiana martenzytyczna zachodząca w procesie ulepszenia, hartowania stali zawsze wiąże się z odkształceniem fazy macierzystej (austenitu) przez poślizg plastyczny, gdyż martenzyt w stalach węglowych ma objętość o około 4% większą niż austenit. A zatem, odkształcenie objętościowe związane z przemianą martenzytyczną w stalach wynosi około 4%.

W stopach z pamięcią kształtu zachodzi tzw. termosprężysta przemiana martenzytyczna i powstaje martenzyt termosprężysty. Dominującą część odkształcenia własnego (fazowego), związanego z termosprężystą przemianą martenzytyczną, stanowi odkształcenie postaciowe osiągające wartości kilku, a niekiedy kilkunastu procent. Odkształcenie objętościowe martenzytu termosprężystego jest małe, z reguły nie przekracza ono wartości 0.2%. Taka struktura odkształcenia własnego martenzytu termosprężystego powoduje, że odkształcenia fazowe martenzytu mogą być akomodowane przez fazę macierzystą – austenit, w sposób quasi-sprężysty, właściwie bez odkształcenia plastycznego fazy macierzystej. Powoduje to występowanie istotnych różnic w kinetyce klasycznej martenzytycznej przemiany fazowej i przemiany termosprężystej, pomimo że obie te przemiany są atermiczne. Kinetyka martenzytycznej przemiany w stalach węglowych jest typu wybuchowego. Następuje gwałtowne, dynamiczne uformowanie się płytki martenzytycznej, po czym jej granice nie są już mobilne. Odwrotna przemiana martenzyt–austenit w stalach węglowych zachodzi w ten sposób, że w jednej płytce martenzytu zarodkuje kilka płytek fazy macierzystej, które następnie rosną, nie ma więc tzw. odwracalności krystalograficznej przemiany



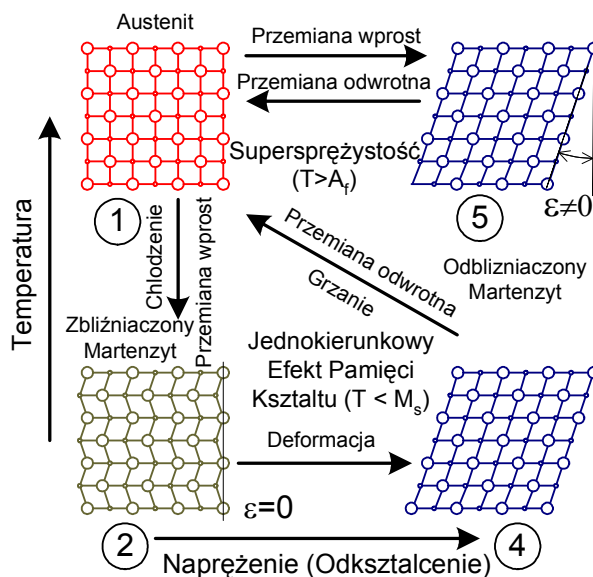
Rys. 2.1 Typowy wynik testu kalometrii różnicowej (DSC) dla materiału podlegającego martenzytycznej przemianie fazowej, w szczególności dla stopu z pamięcią kształtu.

[85]. Przy termosprężystej przemianie martenzytycznej wzrost bądź zanikanie płytek martenzytycznych następuje w sposób ciągły ze zmianą zewnętrznych parametrów stanu, obniżania temperatury bądź zwiększania naprężenia zewnętrznego. Nowe płytki martenzytu powstają dopiero wtedy, gdy już powstałe nie mogą się dalej powiększać ze względu na przykład na napotkanie granicy ziarna. Z kolei przy przemianie odwrotnej płytki martenzytu termosprężystego znikają w odwrotnej kolejności w stosunku do tej w jakiej się pojawiały przy przemianie wprost. Mówi się, że występuje krystalograficzna odwracalność przemiany. Przy przemianie termosprężystej granice bliźniaków zachowują dużą ruchliwość. W przypadku termosprężystej przemiany martenzytycznej, dla cyklu zamkniętego kompletnej przemiany wprost i odwrotnej, pętla histerezy jest znacznie mniejsza niż przy przemianie nie termosprężystej. Jednakże, wielkość pętli histerezy zależy silnie od rodzaju stopu z pamięcią kształtu i jego obróbki termomechanicznej.

Charakterystyczne cechy odróżniające termosprężystą przemianę martenzytyczną – zachodzącą w stopach z pamięcią kształtu, od klasycznej przemiany martenzytycznej – zachodzącej w stalach węglowych, można podsumować następująco,

- dominującą formą odkształceń fazowych są odkształcenia postaciowe
- akomodacja odkształceń fazowych następuje w sposób quasi-sprężysty
- istnieje krystalograficzna odwracalność przemiany
- przemianę można zaindukować obniżaniem temperatury lub zwiększeniem naprężenia.

Jeśli faza martenzytyczna zostanie poddana badaniu mikroskopowemu to można zaobserwować bardzo charakterystyczną mikrostrukturę strzałkową składającą się z naprzemian skośnych płytek. Jeśli faza austenityczna jest chłodzona przy zerowym naprężeniu zewnętrznym to na skutek przemiany fazowej formuje się w stopach z pamięcią kształtu tzw. samoakomodujący się martenzyt o zerowym makroskopowym odkształceniu fazowym. W tym przypadku poszczególne tzw. warianty martenzytu



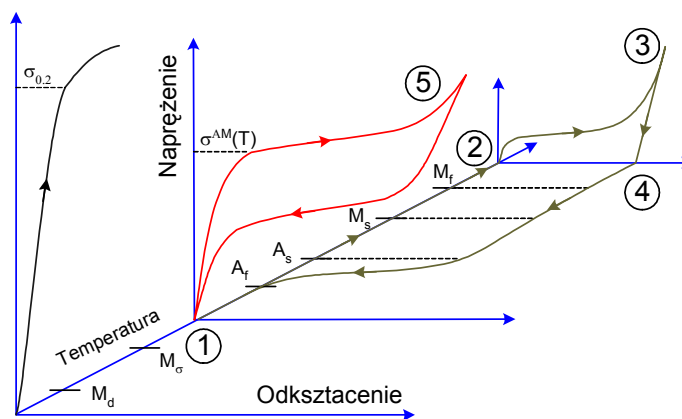
Rys. 2.2 Schematyczna ilustracja mikroskopowego mechanizmu efektów pamięci kształtu.

kompensują wzajemnie swoje mikroskopowe odkształcenia własne. Mechanizm kinematyczny martenzytycznej przemiany fazowej i towarzyszących jej efektów deformacyjnych w skali mikroskopowej zilustrowany jest schematycznie na rysunku 2.2. Jeżeli martenzyt termosprężysty zostanie zaindukowany poprzez przyłożenie obciążenia mechanicznego w zakresie temperatur, w którym fazą stabilną przy zerowym naprężeniu zewnętrznym jest faza austenityczna ($A_f^0 < T$), to w takim przypadku powstanie martenzyt zorientowany (odbliźniaczony) wykazujący makroskopowe odkształcenie fazowe rzędu kilku procent. Martenzyt zorientowany może także powstać z martenzytu samoakomodującego się, tj. takiego, który wykazuje zerowe makroskopowe odkształcenie fazowe, jeśli ten ostatni zostanie poddany obciążeniu mechanicznemu w temperaturach $T < M_s^0$. Makroskopowa deformacja wykazywana przez martenzyt zorientowany powstaje na skutek reorientacji poszczególnych wariantów martenzytu.

Stopy z pamięcią kształtu posiadają kilka specjalnych własności funkcjonalnych, – gdy element wykonany ze stopu z pamięcią kształtu z uprzednio utrwalonym „kształtem wysokotemperaturowym” fazy austenitycznej ① ($A_f^0 < T$) zostanie schłodzony przy zerowym naprężeniu zewnętrznym do temperatury poniżej M_s^0 , to uformuje się samoakomodująca się faza martenzytyczna wykazująca właściwie zerowe odkształcenie makroskopowe ②, patrz rysunek 2.2. oraz 2.3. Element SMA pozostający w stanie martenzytycznym, mieszanym dwufazowym, może być łatwo – przy stosunkowo niskich naprężeniach – zdeformowany, przy czym odkształcenia mogą osiągnąć wartość nawet kilkunastu procent ③. Po zdjęciu z elementu SMA obciążającego naprężenia uzyskuje się „kształt niskotemperaturowy” ④. To jakby się wydawało trwałe odkształcenie plastyczne elementu SMA w stanie zimnym kompletnie znika, a po jego podgrzaniu do temperatury przekraczającej temperaturę A_f^0 ⑤, odzyskiwany

jest przy tym kształt wysokotemperaturowy. Taki efekt nazywany jest *jedno-kierunkowym efektem pamięci kształtu* materiałów SMA.

Aby utrwalić kształt wysokotemperaturowy – fazy austenitycznej, elementu SMA poddaje się go specjalnej obróbce. W wypadku stopów NiTi procedura taka w swej najprostszej



Rys. 2.3 Charakterystyki naprężenie - odkształcenie stopu SMA w różnych temperaturach.

postaci składa się z podgrzania elementu SMA zamocowanego w odpowiednim uchwycie w pożądanym kształcie wysokotemperaturowym do temperatury 400-500°C – znacznie powyżej temperatury A_f^0 dla danego stopu – i utrzymywaniu go w tej temperaturze przez czas 15÷60 minut, krótszy czas w wypadku wyższej temperatury. Jest to jednorazowa procedura, którą trzeba powtórzyć jeśli trzeba elementowi SMA nadać nowy kształt wysokotemperaturowy.

– Inna specjalna obróbka termomechaniczna materiału SMA zwana treningiem, np. odkształcenie elementu SMA w stanie martenzytycznym powyżej granicy plastyczności martenzytu, prowadzi do zapamiętania nie jednego lecz dwóch specyficznych kształtów wysokotemperaturowego i niskotemperaturowego. Po takiej obróbce kształt niskotemperaturowy jest uzyskiwany spontanicznie przy ochłodzeniu elementu SMA poniżej temperatury M_f^0 zaś kształt wysokotemperaturowy jest uzyskiwany spontanicznie przy ogrzaniu elementu SMA powyżej temperatury A_f^0 . Taki efekt nazywany jest *dwukierunkowym efektem pamięci kształtu*. Amplituda odkształceń pomiędzy kształtami wysoko- i niskotemperaturowym może dochodzić do 3-4%.

– Jeśli element SMA, poddany obróbce utrwalającej jedynie kształt wysokotemperaturowy ①, zostanie obciążony mechanicznie lub termomechanicznie w temperaturze $A_f^0 \leq T$, wtedy po przekroczeniu pewnego krytycznego naprężenia $\sigma^{AM}(T)$ – naprężenie powodujące rozpoczęcie przemiany martenzytycznej, rozpoczyna się płynięcie pseudosprężyste materiału przy stosunkowo niewielkim wzroście naprężenia. Amplituda tego płynięcia może osiągnąć kilka (a nawet kilkanaście) procent po czym materiał, będący już w stanie martenzytycznym, ponownie zaczyna zachowywać się sprężyste ⑤. Przy zdejmowaniu obciążenia materiał na powrót płynie pseudosprężyste, zachodzi odwrotna przemiana fazowa, by zupełnie odzyskać swój początkowy kształt ①. Zachowanie to jest bardzo podobne do zachowania nieliniowych sprężyste materiałów, jednakże w przypadku stopów SMA zazwyczaj formuje się relatywnie większa pętla histerezy. Taki efekt nazywany jest *supersprężystością (pseudosprężystością)* materiałów SMA.

– Duża pętla histerezy jaka formuje się, w przypadku niektórych stopów z pamięcią kształtu, przy zamkniętym cyklu termosprężystej przemiany martenzytycznej wprost i odwrotnej jest również traktowana jako własność funkcjonalna tych stopów i nazywana *dużą zdolnością tłumienia*. Wielkość pętli histerezy wskazuje jaka część pracy mechanicznej może być rozproszona wewnątrznie przez stop SMA w zamkniętym cyklu przemian fazowych wprost i odwrotnej.

2.3 Charakteryzowanie i własności stopów z pamięcią kształtu

Najważniejsze z punktu widzenia potencjalnego użytkownika są własności efektów pamięci kształtu i własności termomechaniczne stopów SMA. Pewne dodatkowe

własności będą wymagane w zależności od specyficznego obszaru ich zastosowania, np. biogodność, własności zmęczeniowe, odporność na korozję, etc.

Własności stopów SMA są niezwykle wrażliwe na skład chemiczny i obróbkę termomechaniczną. Z tego powodu, informacja wyłącznie o składzie chemicznym nie pozwala w wystarczającym stopniu wnioskować o własnościach danego stopu SMA, np. w grupie stopów z pamięcią kształtu na bazie NiTi bardzo niewielka zmiana składu chemicznego rzędu 0.1% wagowo prowadzi do zmiany charakterystycznych temperatur przemiany fazowej o 10°C . Temperatury przemiany fazowej bardzo silnie zależą od obróbki technologicznej stopu i stanu materiału w jakim są one mierzone, na przykład czy stop został poddany procesowi pełnego wyżarzenia (800 do $850^{\circ}\text{C}/15$ min.), procesowi nadania kształtu wysokotemperaturowego lub innemu procesowi.

Rozsądnym postępowaniem przy wyznaczaniu własności stopów SMA jest pomiar specyficznej własności po wykonaniu wszystkich operacji technologicznych w stanie materiału „gotowym do użycia”. Bardzo pomocnym jest posiadanie szczegółowych informacji odnośnie wszelkich operacji technologicznych jakie zostały przeprowadzone na materiale. Niestety, nie istnieją w chwili obecnej Europejskie normy dotyczące wyznaczania charakterystyk stopów SMA. Opracowanie takich norm jest bardzo pilnym zadaniem. Czasami Europejskie firmy wytwarzające stopy SMA wykorzystują amerykańskie normy ASTM F2004, F2005, F2063, F2082 [102].

Zbiór reprezentatywnych własności charakteryzujących stopy SMA zebrano w tabeli 2.1. Zostały one zebrane z kilku źródeł, głównie z [30] Huang, AMT Company [95] i Memory Metalle GmbH [96]. Wartości własności podane w tabeli 2.1, szczególnie jeśli chodzi o własności funkcjonalne efektów pamięci kształtu, należy raczej traktować jako wskaźniki co może osiągnąć producent materiału SMA poprzez niewielkie zmiany składu chemicznego, włączając w to dodatek pierwiastków trzecich i właściwą obróbkę technologiczną. Niektóre własności bardzo silnie zależą od temperatury, np. moduł Younga stopu NiTi w stanie austenitycznym zmienia się z 60 GPa do 70 GPa przy zmianie temperatury o 15°C , patrz rozdział 5.

Należy być także ostrożnym przy „akceptacji” wartości modułów sprężystości fazy martenzytycznej podawanych w literaturze, gdyż bardzo często podawane wartości zawierają łącznie efekty odkształceniowe wynikające ze sprężystego zachowania fazy i efekty niesprężyste wynikające z procesu odbliźniaczania martenzytu.

2.4 Obszary zastosowań i tryby pracy stopów z pamięcią kształtu

Pierwsze komercyjne wykorzystanie zjawiska pamięci kształtu miało miejsce w przemyśle militarnym w 1971. Była to złączka hydrauliczna wykonana ze stopu NiTi wykorzystana w instalacji hydraulicznej samolotu F-14. Podczas, gdy przemysł obronny i medyczny nadal są głównymi odbiorcami dla stopów SMA, z tego powodu że branże te chętnie akceptują wyższą cenę za lepsze osiągi, to dzisiaj

Tabela 2.1 Wybrane własności stopów SMA – zebrane w oparciu o [30], [95], [96].

Pozycja	Stop NiTi	CuZnAl	CuAlNi	Uwagi
Własności funkcjonalne efektów pamięci kształtu				
Zakres charakterystycznych temperatur przemiany fazowej [$^{\circ}\text{C}$]	-200 - +200	-200 - +150	-200 - +200	
Wielkość pętli histerezy [$^{\circ}\text{C}$]	2 - 50	5 - 20	20 - 40	
Ciepło przemiany fazowej [KJ/kg]	19 - 32	7 - 9	7 - 9	
Maksymalna dopuszczalna temperatura przegrzania [$^{\circ}\text{C}$]	400	150	300	
Maks. wielkość jednokierunkowego efektu pamięci kształtu [%]	8	6	6	
Typowa wielkość dwukierunkowego efektu pamięci kształtu [%]	3	0.8	1	
Maks. wielkość efektu nawrotu naprężenia [MPa]	500 - 900	400 - 700	300 - 600	
Typowa operacyjna wartość naprężenia [MPa]	100-130	40	70	
Typowa ilość cykli termicznych	$>10^5$	$>10^4$	$>5 \times 10^3$	
Zmęczenie własności funkcjonalnych efektu pamięci kształtu, odksz. [%]	6-8	4-6	$>5-6$	N=1
	6-8	4	>4	$N < 10^2$
	2-4			$N < 10^5$
	0.5			$N < 10^7$
Zdolność tłumienia [SDC%]	15 - 20	30 - 85	10 - 20	
Własności fizyczne				
Gęstość [kg/m ³]	6400 - 6500	7540 - 8000	7100 - 7200	
Ciepło właściwe [J/kg* $^{\circ}\text{C}$]	450 - 620	390 - 400	373 - 574	
Przewodność cieplna [W/m* $^{\circ}\text{C}$] ⁽¹⁾	8.6 - 18	84 - 120	30 - 75	
Współ. rozszerz. cieplnej [$10^{-6} \cdot 1/^{\circ}\text{C}$] ⁽¹⁾	6.6 - 11	17	17	
Oporność elektryczna [Ohm*m* 10^{-6}]	05 - 1.1	0.07 - 0.12	0.1 - 014	
Własności mechaniczne				
Moduł Younga [GPa] ⁽¹⁾	28 - 83	70 - 100	80 - 100	
Wytrzymałość na rozciąganie (w stanie wyżarzonym) [MPa]	900	600*	500 - 800*	*Za Wu [87]
Wytrzymałość na rozc. (po przeróbce plastycznej na zimno) [MPa]	1900			
Konwencjonalna granica plastyczności austenitu $Y_{0.2}$ [MPa]	100-800	350*	400*	*Za Wu [87]
Wydłużenie do zerwania (w stanie wyżarzonym) [%]	20-60	-	-	
Wydłużenie do zerwania (po przeróbce plastycznej na zimno) [%]	5-20	15	8-10	

Pozycja	Stop NiTi	CuZnAl	CuAlNi	Uwagi
Klasyczna wytrzymałość zmęczeniowa N=10 ⁶ [MPa]	350	270	350	
Wielkość ziarna [m*10 ⁻⁶]	1 - 100	50 - 150	25 - 100	
Inne				
Odporność korozyjna	Doskonała	Słaba	Dobra	
Zgodność biologiczna	Doskonała	Zła	Zła	
Topienie, odlewanie i kontrola składu chemicznego	Trudne	Słabe	Słabe	
Formowanie (walcowanie, wyciskanie)	Trudne	Łatwe	Trudne	
Obróbka plastyczna na zimno	Dobra	Ograniczona	B. trudna	
Obrabialność skrawaniem	Trudna	B. dobra	Dobra	
Relacje cenowe	10 - 100	1 - 10	1.5 - 20	

¹Niskie wartości dotyczą fazy martenzytycznej, wysokie fazy austenitycznej.

zastosowania stopów z pamięcią kształtu można znaleźć we wszystkich gałęziach przemysłu. Początkowo, „nieinteligentne” zastosowania stopów SMA takie jak złączki i zamocowania, stopniowo ewoluowały w kierunku siłowników, gdzie specjalne własności materiału są wykorzystywane do wykrywania zmiany w warunkach otoczenia i następnie na odpowiedniej reakcji siłowej. „Aktywne” czy też inteligentne działanie jest uzyskiwane dzięki umiejętnemu wbudowaniu w urządzenie właściwych funkcji sterowania, których schemat logiczny może być całkiem prosty lub złożony. Elementy wykonane ze stopów z pamięcią kształtu nie tylko umożliwiają przenoszenie obciążeń lecz mogą także pełnić funkcje mechanizmów, które bez użycia stopu SMA wymagałyby do ich konstrukcji kilku elementów wykonanych z tradycyjnych materiałów inżynierskich będących w skomplikowanym układzie.

Zastosowania stopów z pamięcią kształtu w przemyśle medycznym są szeroko omówione w książce pod redakcją Yahii [89]. Przeglądu ostatnich zastosowań stopów SMA w medycynie dokonał również Duerig [21]. Nie medyczne zastosowania stopów z pamięcią kształtu w ostatnich latach podają Otsuka i Kakeshita [53].

Zastosowania stopów SMA są obecnie tak liczne, że niecelowe byłoby wymienianie ich wszystkich. Dlatego podano kilka reprezentatywnych przykładów. Proste technicznie zastosowania stopów SMA to anteny w telefonach komórkowych, oprawki okularowe, druty usztywniające w biostonoszach [41], druty ortodontyczne NiTi, pilniki, medyczne druty prowadzące [21]. Bardziej zaawansowane technicznie urządzenia to rurkowe złączki kriogeniczne, zamocowania, łączniki, termomechaniczne zawory sterujące, zawory bezpieczeństwa, na przykład przeciwoparzeniowe [48], w których głównym elementem roboczym jest po prostu sprężyna SMA. Zaawansowane i odpowiedzialne produkty zawierające elementy wykonane z materiałów SMA to stenty wydzielające lekarstwa zapobiegające ponownemu zarostaniu naczyń krwionośnych [97], wszczepy medyczne [89],

medyczne mikro pompy [33], systemy zabezpieczeń przed skutkami trzęsienia ziemi [20]. Zakres i obszar zastosowań stopów z pamięcią kształtu rozwija się niezwykle dynamicznie.

W zastosowaniach, można wyróżnić kilka trybów pracy materiałów SMA w zależności od ważności tej czy innej własności funkcjonalnej tych materiałów zapewnionej dzięki występowaniu efektów pamięci kształtu. Te tryby pracy to:

– *Swobodny odzysk kształtu*

W tym trybie pracy jedyną wymaganą własnością funkcjonalną jest przyjęcie przez element SMA określonego kształtu lub wykonanie określonego ruchu wyzwolonego po osiągnięciu zadanych warunków krytycznych, np. przekroczeniu przez temperaturę otoczenia temperatury krytycznej. Dobrym przykładem tego trybu pracy jest samoistne rozwijanie się w naczyniu krwionośnym filtra NiTi wyłapującego skrzepy krwi [21]. Inny przykład to element systemu bezpieczeństwa, w którym element SMA zamyka lub otwiera światłowód optyczny. W tym trybie pracy od elementu SMA nie jest wymagane lub wymagane jest w minimalnym stopniu wykonanie pracy.

– *Nieswobodny odzysk kształtu*

W tym trybie pracy zasadniczym wymogiem funkcjonalnym jest generowanie przez element SMA odzysku, nie relaksującego w czasie, naprężenia powstającego w procesie nieswobodnego odzysku kształtu. Typowy przykład tego trybu pracy to kriogeniczna złączka hydrauliczna [98], lub złącza elektroniczne [99].

– *Wykonanie pracy*

W tym trybie pracy wymogiem funkcjonalnym jest wykonanie pracy przez element SMA. Dobry przykład tego rodzaju trybu pracy to urządzenie SMA do bezdetonacyjnego rozłupywania bloków skalnych [46].

– *Sterowanie*

W tym trybie pracy element SMA pełni funkcje elementu sterującego. Wymagane jest, aby strumień wyjściowy na przykład przepływ cieczy, był sterowany najlepiej w sposób liniowy pewnym sygnałem wejściowym na przykład temperaturą. Odzysk kształtu bądź generacja siły są środkami do osiągnięcia funkcji sterowania w tym trybie pracy. Różnego typu serwo zawory SMA, mechanizmy pozycjonujące pracują w tym trybie. Jako pewien graniczny przypadek można tu zakwalifikować zawory odcinające SMA [53].

– *Pseudosprężystość (Supersprężystość)*

W tym trybie pracy wymogiem funkcjonalnym jest niezwykła sprężystość – podobna do zachowania gumy, oraz zapewnienie stosunkowo dużych sił – niemożliwych do osiągnięcia przy zastosowaniu materiałów gumopodobnych. Typowe zastosowania to oprawki okularowe, druty prowadzące do wprowadzania cewników do ciała pacjenta, patrz np. Melton [41], oraz Miyazaki [52], a także Yahia [89].

– *Silne tłumienie*

W tym trybie pracy wewnętrzne tłumienie materiałów SMA (spowodowane tarcie wewnętrzne) jest wykorzystywane do rozpraszania energii jaka się wyzwala podczas ekstremalnych obciążeń konstrukcji inżynierskich takich jak wypadki samochodowe, trzęsienia ziemi czy wybuchy. Typowy przykład takiego zastosowania obejmuje systemy zabezpieczeń konstrukcji cywilnych przed trzęsieniami ziemi [20].

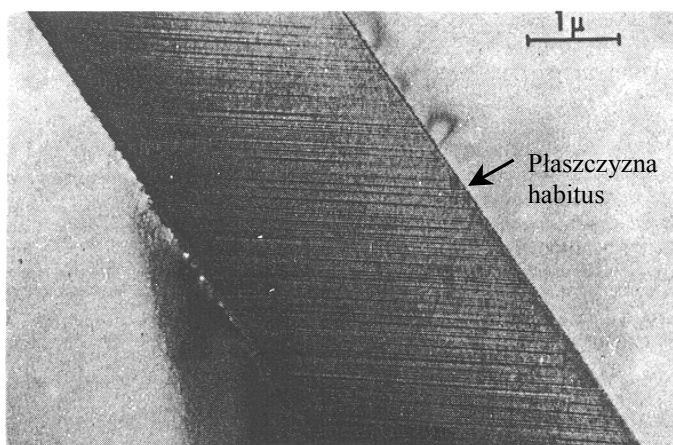
2.5 Modelowanie zachowania stopów z pamięcią kształtu

Modelowanie zachowania stopów z pamięcią kształtu nie można oddzielić od modelowania zjawiska martenzytycznej przemiany fazowej. W niniejszej sekcji zostanie przedstawiony w porządku chronologicznym rozwój koncepcji teoretycznych związanych z próbą opisu samej przemiany martenzytycznej, jak i w późniejszym okresie zjawisk pamięci kształtu. Podane zostaną prace, które ilustrują zdaniem autora pewne główne kierunki i osiągnięcia prac teoretycznych, natomiast z pewnością nie stanowią one wyczerpującego przeglądu wszystkich podejmowanych wysiłków badawczych.

Podczas, gdy pierwsze obserwacje struktur martenzytycznych zostały poczynione przez Adolfa Martensa około roku 1890, w pełni rozwinięta tzw. fenomenologiczna¹ teoria przemiany martenzytycznej została sformułowana dopiero sześćdziesiąt lat później w latach 1953-54, niezależnie przez dwa zespoły badaczy Bowlesa,

McKenzie [9] oraz Wechslera, Liebermana i Reada [86]. Teoria ta często nazywana w literaturze teorią WLR, wyjaśnia szczegółowo kinematyczny

mechanizm formowania się fazy martenzytycznej. Parametrami wejściowymi do teorii są wyłącznie parametry siatki krystalograficznej austenitu (zazwyczaj jest to jeden parametr siatki kubicznej) i martenzytu (tu siatka może być tetragonalna, rombowa,

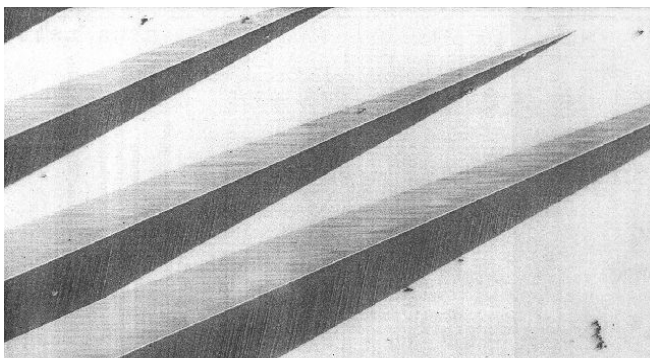


Rys. 2.4 Zdjęcie płytki martenzytycznej w stopie Fe30%Ni0.4%C ujawniające jej substrukturę bliźniaczą, uzyskane metodą elektronowej mikroskopii transmisyjnej. Za Maki i Waymanem [52].

¹ Zwana też często krystalograficzną teorią przemiany martenzytycznej.

monokliniczna, etc.). Zatem w sensie wymiaru charakterystycznego jest to teoria w skali atomowej. Ale powstający wariant martenzytu może być bardzo mały lub wręcz makroskopowy. Wielkościami wyjściowymi z modelu są składowe wektora normalnego do powierzchni habitus, wektor normalny do powierzchni pomiędzy jednorodnymi wariantami martenzytu, udział jednorodnych wariantów w złożonym (niejednorodnym) wariacie martenzytu, wielkość odkształcenia postaciowego i objętościowego, patrz rysunek 2.4 będący reprodukcją oryginalnego zdjęcia Makiego i Waymana z 1976 roku zamieszczonego także w książce [52] na stronie 121. Teoria WLR wyjaśnia kinematyczny mechanizm formowania się fazy martenzytycznej, jednak nie wyjaśnia kinetyki tej przemiany. Pozwala przewidzieć jaką mikrostrukturę będzie miał formujący się martenzyt, jak również pozwala przewidzieć czy możliwe będzie uformowanie się określonych superstruktur martenzytycznych (np. klina czy diamentu). Teoria ta precyzyjnie określa wzajemne związki pomiędzy siatką krystalograficzną martenzytu i austenitu. Teoria WLR obecnie jest wszechstronnie zweryfikowana doświadczalnie i powszechnie zaakceptowana przez wiele środowisk zaangażowanych w badania nad przemianą martenzytyczną, patrz Wayman [85]. Teoria WLR odpowiada na pytanie jak tworzą się struktury martenzytyczne, jednak pytanie dlaczego pozostawia jako otwarte. Próba odpowiedzi na pytanie, dlaczego powstają drobne niejednorodne w skali atomowej mikrostruktury w postaci tzw. złożonych wariantów martenzytu, została z sukcesem podjęta przez Balla i Jamesa w 1987 roku [3]. Autorzy ci założyli że funkcja energii sprężystej fazy martenzytycznej posiada minima dla tzw. odkształceń własnych jednorodnych wariantów martenzytu. Korzystając następnie ze schematów kinematycznych teorii WLR wykazali oni, że energia sprężysta całego systemu składającego się z obszaru austenitu oraz obszaru obejmującego złożony wariant martenzytu zmniejsza się wraz z przyjmowaniem przez ten wariant coraz drobniejszej laminarnej mikrostruktury złożonej z krystalograficznych wariantów martenzytu. Ball i James nie założyli żadnej konkretnej postaci funkcji energii sprężystej, zaś swoje rozważania prowadzili dla systemu przy zerowym naprężeniu zewnętrznym.

Prowadzone są dalsze prace nad rozszerzeniem zakresu stosowalności krystalograficznej teorii przemiany martenzytycznej między innymi, analizowane są warunki krystalograficzne jakie muszą być spełnione



Rys. 2.5 Płytki martenzytyczne w kształcie klinów z uwidocznioną wewnętrzną strukturą bliźniaczą. Za Otsuką i Waymanem [52].

przez fazę macierzystą i martenzytyczną, aby mogły uformować się bardziej skomplikowane mikrostruktury martenzytyczne złożone z zespołów płytek martenzytycznych przyjmujących postać klina lub diamentu, patrz rysunek 2.5.

Klasyczna krystalograficzna teoria przemiany martenzytycznej (WLR) jest teorią wyłącznie kinematyczną. Autorzy tej teorii w oryginalnej pracy jedynie deklarują, że mikrostruktura przewidywana przez ich teorię minimalizuje energię sprężystą sytemu jednak nie wykazują tego formalnie. Nie podają nawet jawnej postaci funkcji energii sprężystej sytemu dwufazowego. Z kolei w rozwinięciach klasycznej teorii przemiany martenzytycznej, w których operuje się już funkcją energii sprężystej minimalizując (ekstremalizując) jej wartość zazwyczaj pomijany jest fakt, że mikrostruktury martenzytyczne na ogół nie formują się w pełnej równowadze termodynamicznej. Doświadczenia zaś wskazują, że przemiana martenzytyczna przebiega po stanach ograniczonej równowagi termodynamicznej, o czym świadczy formowanie się pętli histerezy podczas zamkniętego cyklu przemiany fazowej wprost i odwrotnej.

W świetle powyższego wydaje się pożądanym prowadzenie prac nad bardzo ze sobą blisko związanymi zagadnieniami zachodzenia procesów dyssypatywnych i kinetyki martenzytycznej przemiany fazowej. Ten ostatni obszar szczególnie w wypadku termosprężystej przemiany fazowej jest stosunkowo niezbadany. Pracę przeglądową na temat kinetyki przemiany martenzytycznej opublikował Raghavan [59].

Innym kierunkiem badań wartym podjęcia jest rozszerzenie teorii tak, aby obejmowała ona również sytuacje gdy zewnętrzne pole naprężenia nie jest tożsamościowo równe zeru podczas przemiany fazowej. Prace takie mają szczególne znaczenie w przypadku zachodzącej w stopach z pamięcią kształtu termosprężystej przemiany martenzytycznej, którą można indukować nie tylko obniżaniem temperatury lecz również przyłożeniem obciążenia mechanicznego. Przegląd głównych kierunków prac badawczych i ostatnich osiągnięć w zakresie budowy termodynamicznej krystalograficznej teorii przemiany martenzytycznej można znaleźć w książce Bhattacharyi [6].

Jeżeli za formalne kryterium klasyfikacyjne wybrać charakterystyczny wymiar obiektów stanowiących parametry wejściowe do modelu to teorię WLR można zaklasyfikować do teorii na poziomie atomowym – przy czym pola stanowiące elementy tej teorii są polami ciągłymi.

Osiągnięcia technologii komputerowej i wzrost mocy obliczeniowej komputerów umożliwiły w ostatnich latach inne niż dotychczas podejście do modelowania przemiany martenzytycznej na poziomie atomowym, a mianowicie za pomocą metod tzw. dynamiki molekularnej. W tym wypadku próbka materiału modelowana jest jako system dyskretnych cząstek oddziałujących ze sobą. Oddziaływania te są opisane za pomocą pewnego potencjału oddziaływania, np. Lenarda-Jonesa, zaś różne przyjęte wartości parametrów pozwalają na modelowanie zachowania różnych materiałów. Ruch cząstek w systemie opisywany jest wprost równaniami ruchu Newtona. Przykład wyniku symulacji przemiany martenzytycznej metodą dynamiki

molekularnej przeprowadzonej w ramach działalności Sieci Obliczeniowych Metod Materiałoznawstwa finansowanej przez Amerykański Departament Energii pokazano na rysunku 2.6 [100]. Prace w tym samym nurcie prowadzone są również w Europie patrz np. Arndt i Griebel [101].

Modele dynamiki molekularnej martenzytycznej przemiany fazowej w zasadzie starają się dać odpowiedź na te same pytania co teorie z grupy modeli WLR, przy czym w wypadku tych modeli otrzymuje się dyskretne położenia poszczególnych atomów. Dopiero pewien proces uśredniania pozwala na uzyskanie ciągłych „pól” przemieszczeń a zatem porównanie przewidywań obu teorii. Wydaje się, że metoda MD² posiada duży potencjał, gdyż przynajmniej teoretycznie pozwala dosyć łatwo przewidywać jaki skutek na przemianę martenzytyczną może mieć np. domieszkowanie różnych pierwiastków chemicznych – jedna z głównych metod modyfikacji własności materiałów z pamięcią kształtu.

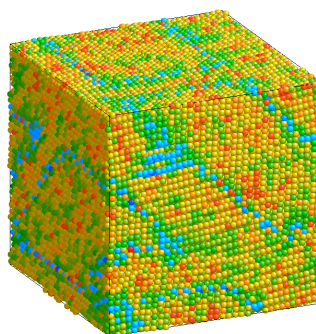
Często modele przemiany martenzytycznej – modele materiałów z pamięcią kształtu, dzieli się z uwagi na charakterystyczny wymiar obiektu opisywanego przez tę teorię – wymiar parametrów wejściowych do modelu. Najczęściej wyróżnia się trzy poziomy charakterystycznych wymiarów

– poziom atomowy – skala obserwacji mikroskopu elektronowego; w tej skali można zaobserwować położenie poszczególnych atomów w sieci krystalicznej materiału, położenie i ruch dyslokacji, wakansów itd.

– poziom mezoskopowy³ – skala obserwacji mikroskopu optycznego; w tej skali rozróżnia się mikrostrukturę występującą w reprezentatywnej objętości materiału np. rozróżnia się poszczególne złożone warianty martenzytu.

– poziom makroskopowy – obserwacja nieuzbrojonym okiem; w tej skali w materiale nie rozróżnia się szczegółów budowy mikrostrukturalnej po prostu wyróżniając tzw. reprezentatywny element objętościowy (RVE) materiału, który traktuje się jako jednorodny. Mikrostruktura opisywana jest pewnymi uśrednionymi parametrami.

Wspomniane powyżej kryterium podziału modeli z uwagi na wymiar charakterystyczny jest do pewnego stopnia mylący. Wspomnieliśmy powyżej, że



Rys. 2.6 Obraz mikrostruktury fazy martenzytycznej jaka powstała podczas symulacji numerycznej przemiany martenzytycznej metodą dynamiki molekularnej [100].

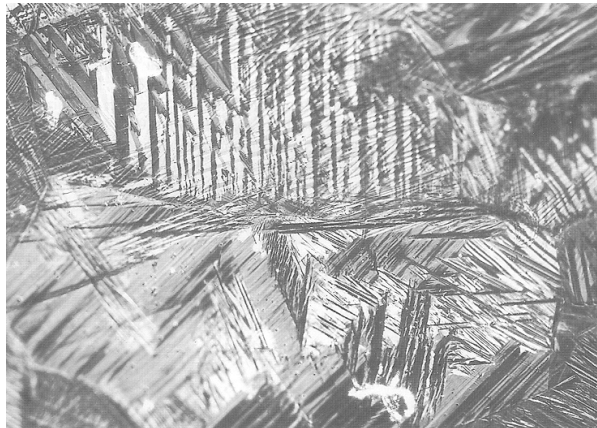
² Dynamiki molekularnej od angielskojęzycznej nazwy Molecular Dynamics.

³ Często używa się też określenia mezoskopowy.

teoria WRL jest teorią na poziomie atomowym, gdyż parametrami wejściowymi do modelu są wymiary elementarnej komórki krystalograficznej. Jednak powstająca płytka martenzytu o przewidywanej przez teorię WLR powierzchni habitus przy starannym zachowaniu warunków prowadzenia eksperymentu z łatwością może osiągnąć wielkość kilku milimetrów i można zakwalifikować ją jako obiekt makroskopowy a zatem i teorię WLR można by nazwać makroskopową, gdyż w pewnych szczególnych warunkach teoria WLR opisuje obiekty makroskopowe.

W istocie zatem podział modeli przemiany martenzytycznej z uwagi na wymiar charakterystyczny ma inne ukryte kryterium. Tym kryterium jest skomplikowanie mikrostruktur martenzytycznych jakie mogą się pojawiać i jakie w założeniu autorów modelu teoria ma opisywać. Teoria na poziomie atomowym jest w stanie opisać powstanie jednej złożonej płytki martenzytu, kilku płytek martenzytu w układzie klina lub diamentu, ale nie da się jej zastosować sensownie gdy płytek martenzytu powstają tysiące, czy setki tysięcy. Zaczynają wtedy odgrywać rolę efekty statystyczne i konieczne staje się dokonywanie uśrednień, aby otrzymać jakikolwiek rozsądny wynik przy określonych nakładach obliczeniowych. W takiej sytuacji znajdują zastosowanie teorie na poziomie mezoskopowym, które za cel stawiają sobie przewidywanie odnośnie powstawania mikrostruktury martenzytu złożonej z setek czy tysięcy płytek martenzytu. Pokonywany jest wtedy dystans od skali 10^{-9} do 10^{-6} . Kolejne uśrednienia prowadzą do modeli makroskopowych, które za cel stawiają sobie opisywanie niezwykle złożonych mikrostruktur składających się z dużej liczby ziaren i zawartych w nich wielu wariantów martenzytu, przejście od skali 10^{-6} do 10^{-3} . Przykład takiej złożonej mikrostruktury pokazano na rysunku 2.7. Wydawałoby się, że wystarczyłoby rozwijać wyłącznie teorie atomowe i poprzez odpowiednie uśrednienia dochodzić do teorii makroskopowych. Jednak stopień pojawiających się komplikacji jest nawet dla obecnych komputerów zbyt duży. Z tego powodu zdaniem autora celowe jest prowadzenie równoległych (pożądana byłaby ich koordynacja) prac nad modelami atomowymi, mezoskopowymi i makroskopowymi.

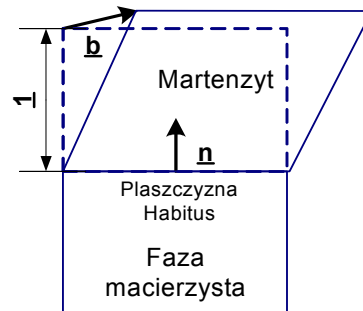
Powróćmy do historii rozwoju modeli zachowania stopów z pamięcią kształtu. Pierwsze modele zachowania stopów z pamięcią kształtu zaczęły się pojawiać na początku lat 1980 – blisko 20 lat po pojawieniu



Rys. 2.7 Samoakomodująca się mikrostruktura fazy martenzytycznej indukowanej temperaturą w polikryształach CuAlNiMn przy zerowym naprężeniu zewnętrznym. Za Leclercqiem i LExcellentem [37].

się artykułu Buehlera i innych, który można uznać za inicjujący erę stopów z pamięcią kształtu. W roku 1983 Falk zaproponował jednowymiarowy termodynamiczny model zachowania stopów z pamięcią kształtu [22], oparty na teorii przemian fazowych Landau'a-Devonshire'a. W modelu tym potencjał energii swobodnej został zaproponowany w postaci wielomianu 6-tego stopnia, którego parametrami są odkształcenie i temperatura. Równania stanu otrzymywane są zgodnie z formalizmem termodynamiki poprzez formalne różniczkowanie funkcji energii swobodnej. W obszarach niestabilności mechanicznej tam gdzie $\partial\sigma/\partial\varepsilon < 0$ Falk proponuje zastąpienie krzywej wynikającej z żądania pełnej równowagi termodynamicznej izostata, co pozwala na modelowanie obserwowanych w doświadczeniach pętli histerezy. Model Falka pozwala w sposób jakościowy opisać zarówno zjawisko pseudosprężystości, jak i jednokierunkowego efektu pamięci kształtu. W modelu tym nie wyodrębniono jawnie żadnej zmiennej opisującej postęp przemiany fazowej. W roku 1986 Tanaka i inni [78] zaproponowali trójwymiarowy makroskopowy model pseudosprężystego zachowania stopów z pamięcią kształtu. Oprócz odkształcenia i temperatury występuje już w tym modelu, jako parametr stanu, masowy udział fazy martenzytycznej, może on być traktowany jako pewien uśredniony parametr opisujący w skali makroskopowej ewolucję mikrostruktury. W modelu Tanaki i innych jawnie zostały podane równania kinetyki przemiany fazowej dla pełnej przemiany wprost i pełnej przemiany odwrotnej. Jest to adaptacja równań Koistinen-Marburgera stosowanych do opisu procesów hartowania stali [34]. Natomiast nie zostały w tym modelu jawnie wyspecyfikowane termodynamiczne warunki kiedy przemiana fazowa może, a kiedy nie może zachodzić. Nie podano również równania ewolucji entropii.

Prawdopodobnie pierwszym mikromechanicznym modelem zachowania stopów z pamięcią kształtu był model zaproponowany przez Patoora i innych w roku 1988 [55]. W modelu tym wykorzystano jeden z głównych wyników krystalograficznej teorii przemiany martenzytycznej a mianowicie, tzw. warunek koherencji wyrażający w istocie żądanie ciągłości pola przemieszczeń na granicy międzyfazowej $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{b}}_i \otimes \underline{\mathbf{n}}_i$. Warunek ten stanowi punkt startowy dla właściwie wszystkich mikromechanicznych modeli zachowania stopów z pamięcią kształtu. $\underline{\mathbf{F}}$ oznacza gradient deformacji przy przejściu z fazy austenitycznej w fazę martenzytyczną (faza austenityczna traktowana jest jako nie odkształcony układ odniesienia), $\underline{\mathbf{b}}_i$ oznacza wektor odkształcenia (głównie postaciowego), $\underline{\mathbf{n}}_i$ to wektor normalny do powierzchni



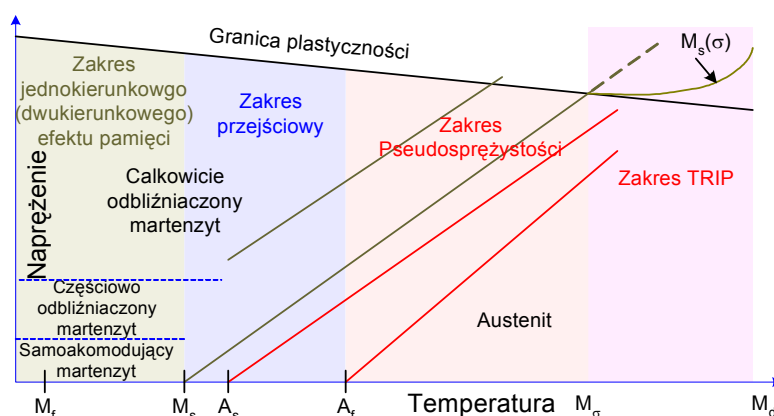
Rys. 2.8 Schematyczna ilustracja odkształcenia własnego związanego z przemianą austenitu w określony złożony wariant martenzytu.

habitus, indeks „ i ” oznacza kolejny wariant martenzytu, patrz rysunek 2.8.

Wartości tych parametrów oraz ilość różnych możliwych wariantów martenzytu N wyznacza się dla danego stopu SMA z wartości parametrów siatki krystalicznej fazy austenitycznej i fazy martenzytycznej. W modelu Patoora i innych zaproponowano jawną postać potencjału Gibbsa dla dwufazowej makrocząstki stopu SMA stanowiącej, tzw. reprezentatywny element objętości materiału (RVE⁴), przy czym początkowo RVE składa się z monokryształu fazy austenitycznej. Parametrami stanu w tym potencjale są tensor naprężenia, temperatura, oraz N udziałów objętościowych wariantów martenzytu traktowanych jako wewnętrzne parametry stanu. Z każdym wariantem martenzytu związane są odkształcenia własne $\mathbf{e} = 0.5(\mathbf{b}_i \otimes \mathbf{n}_i + \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{b}_i)$ zwane także systemami bliźniakowania w analogii do systemów poślizgu występujących w klasycznej krystalograficznej teorii plastyczności. Korzystając z formalizmu termodynamiki autorzy wyprowadzają kryteria jakie muszą być spełnione, aby możliwe było formowanie się poszczególnych wariantów martenzytu. Następnie podają równania ewolucji dla odkształceń związanych z przemianą fazową żądając, aby początkowe kryterium przemiany było spełnione w ciągu całego procesu przemiany fazowej. Aby uzyskać równania dla materiału polikrystalicznego, autorzy przeprowadzają uśrednianie metodą samozgodną. Uzyskane dla polikryształu równania konstytutywne są tak złożone, że w praktyce wymagają obliczeń numerycznych, aby uzyskać jakikolwiek praktyczny wynik. Autorzy dokonują, w bardzo ograniczonym zakresie, weryfikacji doświadczalnej swojego modelu. Porównują przewidywania swojej teorii, uzyskane przy arbitralnym założeniu formowania się wyłącznie jednego wariantu martenzytu, z wynikami prób jednoosiowego izotermicznego rozciągania stopu CuZnAl. Model Patoora i innych z 1988 stanowi ważną pracę z punktu widzenia wskazania metodologii budowy mezoskopowych modeli materiałów SMA. Nurt mikromechanicznego modelowania materiałów SMA rozwija się niezwykle dynamicznie i niemal co roku pojawia się w literaturze nowy mikromechaniczny model materiałów SMA. Różnią się one albo metodą uśredniania, albo przyjmowanymi kryteriami zachodzenia przemiany fazowej, albo kinetyki przemiany fazowej. Chyba najciekawszą pracą, jaka się w tym nurcie ostatnio ukazała, jest praca Ananda i Gurtina [2] sformułowana w formalizmie skończonych deformacji, patrz także praca Thamburaji i Ananda [81]. W zasadzie rozważania są formalnie prowadzone ścieżką wytyczoną przez Patoora i innych, jednak ostateczne wyniki – te porównywane z doświadczeniem – są w tej pracy otrzymywane metodą elementów skończonych. Procedura „uśredniania” jest więc w tej pracy przeprowadzana numerycznie. Takie podejście jest obecnie powszechne wśród autorów budujących mikroskopowe modele materiałów SMA. Jednakże jest ono bardzo kosztowne gdyż wymaga znacznej mocy obliczeniowej. Z tego powodu

⁴ Od angielskojęzycznej nazwy Representative Volume Element.

wykorzystanie modeli mikroskopowych w obliczeniach konstrukcyjnych wydaje się niepraktycznie nawet przy mocy obliczeniowej współczesnych komputerów. Natomiast celowe byłoby prowadzenie wszechstronnych symulacji numerycznych z użyciem modeli mikroskopowych w celu zidentyfikowania efektów, które można by zaniedbać przy budowie makroskopowych modeli zachowania materiałów SMA bez istotnego pogorszenia dokładności przewidywanych wyników. Istotnym przyczynkiem do modelowania materiałów SMA była praca Müllera i Xu z roku 1991 [44], w której zaproponowano jednowymiarowy makroskopowy model pseudosprężystości. W pracy tej autorzy podali jawną postać tzw. energii „koherencji” (energii oddziaływania pomiędzy fazą austenityczną i fazą martenzytyczną zapewniającej ciągłość pola przemieszczeń) $\phi_{ii}(z) = Az(1-z)$, gdzie A oznacza stałą materiałową zaś z oznacza udział objętościowy fazy martenzytycznej. Jej postać uzasadnili rozważaniami statystycznymi, oraz analizą wyników doświadczalnych przeprowadzonych dla stanów jednoosiowego rozciągania monokryształów stopu CuZnAl – między innymi zliczali ilość powierzchni międzyfazowych w trakcie zachodzenia pełnej przemiany martenzytycznej. Wykazali również, że stany pełnej równowagi termodynamicznej materiału SMA w stanie dwufazowym są dla przyjętej przez nich postaci funkcji energii swobodnej stanami niestatecznymi. Stwierdzenie tego faktu pozwoliło im z kolei zaproponować kryterium formowania się wewnętrznych pętli histerezy. Poprawność tego kryterium została potwierdzona doświadczalnie dla monokryształów stopu CuZnAl. Pierwszy, w pewnym sensie kompletny, trójwymiarowy makroskopowy model pseudosprężystości został zaproponowany przez Ranieckiego i innych w roku 1992 [62]. Kompletny, gdyż zawierał wszystkie elementy pozwalające na opisanie najważniejszych efektów związanych ze zjawiskiem pseudosprężystości. Zawierał on jawną postać funkcji energii



Rys. 2.9 Schematyczna mapa zakresu parametrów stanu w jakich dominującą rolę odgrywają różne efekty pamięci kształtu.

swobodnej, w formie matematycznej zostały podane ściśle warunki zachodzenia przemiany fazowej wprost i odwrotnej, podane zostały równania kinetyki przemiany fazowej umożliwiające opisanie formowania się wewnętrznych pętli histerezy, podane zostało równanie ewolucji entropii (temperatury), podano równania ewolucji odkształceń związanych z przemianą fazową pozwalające na opis formowania się i reorientacji fazy martenzytycznej, wyspecyfikowane zostały równania konstytutywne w niezwykle wygodnej do obliczeń numerycznych przyrostowej postaci. Model ten był następnie rozwijany w latach 1994 [63] – fazy austenityczna i martenzytyczna mogą mieć różne własności termosprężyste i 1998 [65] – możliwe jest opisanie materiałów SMA, które wykazują różne granice pseudosprężystości w ściskaniu i rozciąganiu. Rodzina modeli R_L stanowi podstawę dla rozważań zawartych w niniejszej rozprawie i zostanie szczegółowo omówiona w dalszej części pracy. Za wyjątkiem makroskopowego jakościowego modelu Falka wszystkie dyskutowane dotychczas modele materiałów SMA dotyczyły modelowania zjawiska pseudosprężystości. Jednak obszar zjawisk pamięci kształtu jest znacznie szerszy. Na rysunku 2.9 pokazano schematycznie zakresy parametrów stanu temperatury i naprężenia w jakich dominującą rolę odgrywają różne efekty pamięci kształtu.

W roku 1992 Zhang i inni zaproponowali makroskopowy model opisu dwukierunkowego zjawiska pamięci kształtu [90]. W 1996 roku Boyd i Lagoudas [10] podjęli próbę rozszerzenia zakresu stosowalności makroskopowych modeli 3D, tak aby możliwe było opisanie za pomocą jednego modelu zarówno zjawiska pseudosprężystości jak i jednokierunkowego efektu pamięci kształtu. Aby zrealizować ten cel autorzy wprowadzili formalnie do swojego modelu jako wewnętrzne zmienne stanu udziały objętościowe trzech „faz” austenitu, martenzytu samoakomodującego się tj. takiego, który nie wykazuje makroskopowego efektu odkształceniowego oraz martenzytu zorientowanego wykazującego efekt odkształceniowy. Pierwszym jak się wydaje makroskopowym modelem konstytutywnym materiałów SMA sformułowanym w języku skończonych deformacji był model zaproponowany przez Auricchio i Taylora z roku 1997 [1]. Niestety model ten został zaadoptowany do opisu stopów SMA z klasycznej teorii plastyczności. Dlatego też nie umożliwia on przewidywania efektów sprzężeń termomechanicznych wynikających z emisji bądź pochłaniania ciepła właściwego przemiany fazowej i efektów dyssypacji pracy mechanicznej. Trójwymiarowe modele zachowania materiałów SMA są obecnie na etapie weryfikacji eksperymentalnej przyjmowanych założeń, niezbędnej szczególnie jeśli chodzi o złożone stany naprężenia oraz rozszerzania zakresu ich stosowalności. Prowadzone są też dyskusje odnośnie minimalnego zbioru parametrów modeli jaki pozwalałby na rzetelną charakteryzację własności stopów z pamięcią kształtu. Brak jednego powszechnie akceptowanego modelu zachowania materiałów SMA powoduje istotne trudności przy np. opracowaniu norm dla materiałów SMA. Obiecującym i jednocześnie wyzywającym kierunkiem dalszych prac badawczych nad modelowaniem materiałów podlegających martenzytycznej przemianie fazowej

byłaby próba stworzenia jednolitej teorii, efektów pamięci kształtu i zjawiska indukowanej odkształceniem plastycznym przemiany fazowej TRIP⁵. Zakres parametrów stanu w jakim zachodzi to zjawisko zaznaczony jest na rysunku 2.9 temperaturami M_σ i M_d . W istocie historyczna nazwa tego zjawiska TRIP nie odzwierciedla rzeczywistej sytuacji fizycznej, gdyż podobnie jak to ma miejsce w przypadku efektów pamięci kształtu przemiana fazowa w istocie indukowana jest naprężeniem lub temperaturą natomiast odkształcenia plastyczne ułatwiają (umożliwiają) nukleację fazy martenzytycznej. Zatem odzwierciedlająca stan faktyczny nazwa tego zjawiska winna raczej brzmieć „Wspomagana odkształceniem plastycznym indukowana naprężeniem przemiana martenzytyczna”. Temperatura M_σ oznacza temperaturę powyżej której; gdy materiał jest obciążany mechanicznie to najpierw następuje jego deformacja plastyczna przez poślizg i dopiero później dalsze odkształcenie niesprężyste następuje wskutek jednoczesnego poślizgu plastycznego i postępu martenzytycznej przemiany fazowej. Temperatura M_d oznacza temperaturę powyżej której niemożliwe jest spowodowanie zachodzenia martenzytycznej przemiany fazowej przyłożeniem obciążenia mechanicznego. Występowanie w materiale efektu TRIP oferuje interesujące możliwości. Materiał, który pękłby przy stosunkowo niskim odkształceniu rzędu kilku procent – cecha, która występuje dla wielu intermetalików – mógłby mieć potencjalnie znacznie lepsze własności ciągliwe gdyby udało się spowodować, aby zachodziło w nim zjawisko TRIP. Na przykład materiał TRIP (stop SMA użyty w zakresie temperatur $< M_\sigma, M_d >$) zamiast pękania będzie podczas zaawansowanego odkształcenia ulegał jednoczesnemu płynięciu plastycznemu przez poślizg i martenzytycznej przemianie fazowej w ten sposób wykazując znacznie lepszą ciągliwość niż materiał nie wykazujący zjawiska TRIP. W roku 1988 Cherkaoui i inni zaproponowali mikromechaniczny trójwymiarowy model opisu zjawiska TRIP dla materiału monokrystalicznego [15]. Zakres stosowania tego modelu został rozszerzony w roku 2000 na materiały polikrystaliczne [16]. Modele wymienione dotychczas w niniejszej sekcji w żadnym razie nie stanowią wyczerpującej listy wszystkich modeli, jednakże dostarczają zdaniem autora pewnego reprezentatywnego zbioru ilustrującego główne trendy w zakresie modelowania stopów SMA. Podsumowując – w chwili obecnej nie istnieje powszechnie zaakceptowana jednolita ilościowa teoria opisująca zachowanie stopów SMA w całym zakresie występujących zjawisk. Zostały opracowane jedynie cząstkowe ilościowe modele teoretyczne mające za zadanie opis zjawisk w węższym zakresie parametrów np. pseudosprężystości, jednokierunkowego lub dwukierunkowego efektu pamięci kształtu [90].

⁵ Od angielskojęzycznej nazwy Transformation Induced Plasticity.

Rozdział 3. Termodynamiczny model pseudosprężystości R_L

3.1 Wprowadzenie

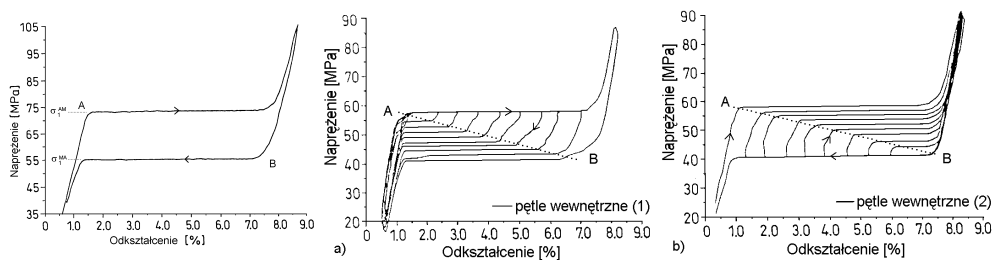
W niniejszym rozdziale szczegółowo omówiono rodzinę termodynamicznych modeli pseudosprężystości rozwijanych przez Ranieckiego, Lexcelenta i Tanakę [62], [63], [65]. Opracowane w sposób syntetyczny i podane w niniejszym rozdziale informacje stanowią niezbędny wprowadzający materiał teoretyczny i doświadczalny dla dalszych prowadzonych w pracy rozważań.

Mechanizmem fizycznym powodującym występowanie zjawiska pseudosprężystości jest termosprężysta martenzytyczna przemiana fazowa. Procesy tej przemiany fazowej nie zawsze przebiegają po stanach pełnej równowagi termodynamicznej na co wskazuje występowanie pętli histerezy na wykresach naprężenie-odkształcenie. Z tego powodu wygodnym do opisu teoretycznego tego zjawiska jest wykorzystanie formalizmu termodynamiki nierównowagowej z wewnętrznymi parametrami stanu, na przykład tej opracowanej przez Rice'a [70]. Przyjmuje się, że lokalnie stan termodynamiczny reprezentatywnej objętości materiału – makroskopowego punktu materialnego, traktowanego jako system termodynamiczny, może być jednoznacznie opisany poprzez wartości odpowiedniego zbioru istotnych dla danej sytuacji fizycznej zewnętrznych i wewnętrznych zmiennych stanu. Równania konstytutywne będące wynikiem zastosowania formalizmu termodynamiki nierównowagowej z wewnętrznymi parametrami stanu można podzielić wtedy na dwie grupy. Pierwsza grupa to termiczne równania stanu wynikające z przyjętej postaci potencjału termodynamicznego. Otrzymywane są one poprzez formalne zróżniczkowanie potencjału termodynamicznego względem kanonicznych zewnętrznych zmiennych stanu. Gdy wykorzystywanym potencjałem termodynamicznym jest funkcja Gibbsa to w przypadku stopów z pamięcią kształtu jako niezależne zewnętrzne zmienne stanu można przyjąć naprężenie i temperaturę. Druga grupa to równania ewolucji wewnętrznych zmiennych stanu. Jest to pewna liczba związków pomiędzy strumieniami wewnętrznych zmiennych stanu i odpowiadających im termodynamicznych sił. Przeważnie związki te podaje się w postaci sprzężonego układu prędkościowych różniczkowych równań zwyczajnych, będących funkcjami zewnętrznych zmiennych stanu i wszystkich wewnętrznych zmiennych stanu. Ponieważ iloczyny strumieni termodynamicznych występują w wyrażeniu na produkcję entropii więc równania wewnętrznych zmiennych stanu muszą spełniać specjalne kryteria tak, aby zgodnie z drugą zasadą termodynamiki podczas aktywnych procesów dyssypatywnych, zawsze spełniona była nierówność Clausiusa Duhema.

3.2 Przegląd wyników doświadczalnych 1D i częściowo 3D

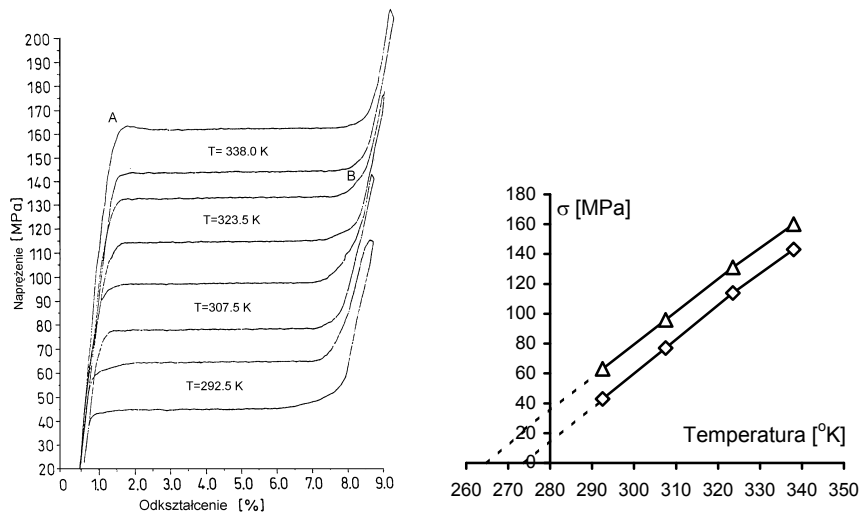
W celu zbudowania makroskopowej termodynamicznej teorii pseudosprężystości należy dokonać wyboru odpowiednich, tj. mających istotny wpływ na zachowanie materiału, termodynamicznych parametrów stanu pozwalających na opisanie

stwierdzonych doświadczalnie sposobów zachowania stopów SMA. Jest to możliwe po zebraniu odpowiedniej ilości danych doświadczalnych. Obecnie istnieje niezwykle bogata literatura dokumentująca zachowanie stopów z pamięcią kształtu w stanach jednowymiarowych. Uporządkowany program eksperymentalny, którego celem było dostarczenie danych eksperymentalnych do budowy modelu teoretycznego zachowania stopów SMA w zakresie pseudosprężystym $A_f^0 < T < M_\sigma$, patrz rysunek 2.9, został zrealizowany przez Müllera i jego współpracowników [31], [44]. Doświadczenia zostały wykonane na monokrystalicznych próbkach CuZnAl dla stanów jednoosiowego rozciągania w warunkach izotermicznych. Na rysunku 3.1a pokazano wykres rozciągania $\sigma_1 - \varepsilon_1$ otrzymany z próby izotermicznej wykonanej w temperaturze $T = 300^0\text{K}$. W trakcie rozciągania próbka początkowo odkształca się wyłącznie sprężysto, aż do momentu gdy w charakterystycznym punkcie A – wartość naprężenia wynosi wtedy σ_1^{AM} – rozpoczyna się martenzytyczna przemiana fazowa wprost $A \rightarrow M$. Rozpoczęcie się przemiany fazowej autorzy stwierdzali optycznie, gdyż pojawiała się pierwsza płytka martenzytu. Następnie próbka płynie przy właściwie stałej wartości naprężenia. Jednocześnie autorzy stwierdzali optycznie pojawianie się coraz większej ilości płytek martenzytu – postęp przemiany fazowej. Procesowi temu towarzyszyła ewolucja mikrostruktury fazy martenzytycznej, jak również wydzielanie się ciepła. Jeśli próbka została poddana dostatecznie dużemu odkształceniu to przy pewnej wartości odkształcenia następowało zakończenie przemiany – nie pojawiały się dalsze płytki martenzytu. Po czym przy dalszym odkształcaniu, faza martenzytyczna zachowywała się sprężysto dopóki nie została przekroczona granica plastyczności martenzytu σ_M^Y . Jeżeli dalsze obciążanie próbki zostanie przerwane przed osiągnięciem naprężenia σ_M^Y , to podczas odciążania próbki faza martenzytyczna zachowuje się sprężysto, aż do momentu rozpoczęcia martenzytycznej przemiany odwrotnej $M \rightarrow A$ w punkcie B – wartość naprężenia



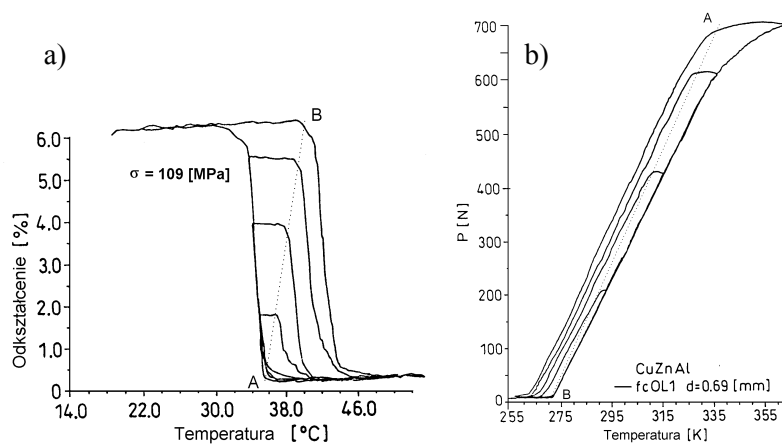
Rys. 3.1 a) Wykres jednoosiowego rozciągania próbki monokrystalicznej CuZnAl w temperaturze $T = 300^0\text{K}$ – graniczna pętla histerezy. b) Formowanie się wewnętrznych pętli histerezy przy częściowych przemianach fazowych wprost i odwrotnych wynikających z nawrotu obciążenia odciążenia, odpowiednio. Za Huo i Müllerem [31].

wynosi wtedy $\sigma_1^{MA} \neq \sigma_1^{AM}$. Przemiana odwrotna przebiega znów przy właściwie stałym naprężeniu, zaś po jej zakończeniu następuje sprężyste zachowanie fazy austenitycznej. Po całkowitym zdjęciu obciążenia próbka nie wykazuje praktycznie żadnego odkształcenia trwałego podobnie jak ma to miejsce w przypadku obciążania materiałów gumopodobnych. Jednak w wyniku zamkniętego cyklu obciążenie-odciążenie pojawia się pętla histerezy – pętla graniczna wyznaczona przez cykl kompletnej przemiany wprost i kompletnej przemiany odwrotnej. Z tego względu taki typ zachowania materiału nazwano pseudosprężystością. Przy bardziej złożonych programach obciążeń próbki – przerywania obciążenia przed całkowitym zakończeniem przemiany wprost – patrz rysunek 3.1b, bądź ponownym dociążaniu próbki przed zakończeniem przemiany odwrotnej – patrz rysunek 3.1c, można zaobserwować sposób formowania się wewnętrznych pętli histerezy w warunkach izotermicznych. Mianowicie, jeżeli proces płynięcia pseudosprężystego przy przemianie wprost zostanie przerwany odciążeniem przed całkowitym zakończeniem przemiany to próbka początkowo zachowuje się sprężysto, zaś dopiero w pobliżu linii diagonalnej A-B rozpoczyna się przemiana odwrotna. W analogiczny sposób, jeżeli przemiana odwrotna zostanie przerwana na skutek ponownego dociążania próbki, to początkowo reakcja materiału dwufazowego jest sprężysta, zaś ponowna przemiana wprost rozpoczyna się dopiero po osiągnięciu stanu znajdującego się w pobliżu linii diagonalnej A-B. Wskazuje to na specjalny charakter stanów (σ, T) znajdujących się na linii diagonalnej A-B. Istnienie takich stanów jest ważne z teoretycznego punktu widzenia. Analiza teoretyczna wskazuje



Rys. 3.2 a) Wykresy izotermicznego jednoosiowego rozciągania próbki monokrystalicznej CuZnAl dla kilku temperatur – graniczne pętli histerezy. b) Linie Clausiusa-Clapeyrona dla przemiany wprost i przemiany odwrotnej odpowiednio. Za Huo i Müllerem [31].

na specjalny charakter stanów znajdujących się na linii A-B; można je traktować jako stany pełnej równowagi termodynamicznej względem wszystkich zmiennych stanu. Na rysunku 3.2a pokazano izotermiczne wykresy rozciągania $\sigma_1 - \varepsilon_1$ dla kilku temperatur. Jak widać pole powierzchni pojawiających się granicznych pętli histerezy w zasadzie nie zależy od temperatury, zaś zależność krytycznych naprężeń płynięcia pseudosprężystego $\sigma_1^{AM}(T)$, $\sigma_1^{MA}(T)$ z dobrym przybliżeniem zależy od temperatury w sposób liniowy. Na rysunku 3.2b zaznaczono symbolami trójkąta i rombu, wyznaczone doświadczalnie z wykresów pokazanych na rysunku 3.2a, wartości naprężeń krytycznych płynięcia pseudosprężystego przy przemianie fazowej wprost i odwrotnej σ_1^{AM} , σ_1^{MA} , odpowiednio. Na rysunku 3.3a pokazano graniczną i wewnętrzne pętle histerezy we współrzędnych $\varepsilon_1 - T$ jakie można zaobserwować przy obciążaniu cyklami temperaturowymi, próbki utrzymywanej pod stałym naprężeniem $\sigma_1 = const$ – izostatyczne cykle temperaturowe [31]. Ponownie widać występowanie specjalnych stanów na diagonalu A-B, gdzie znajdują się stany początku cząstkowych przemian odwrotnych $M \rightarrow A$. Na rysunku 3.3b pokazane jest występowanie zjawiska nawrotu (odzysku) siły. Próbka, utrzymywana pod stałym odkształceniem $\varepsilon_1 = const$ poddawana jest obciążaniu cyklami temperaturowymi. Na skutek zablokowania możliwości odkształcania się, w materiale indukowane jest naprężenie. W punkcie B następuje wzrost siły wewnętrznej związany z przemianą fazową $M \rightarrow A$, zaś w punkcie A spadek tej siły na skutek przemiany $A \rightarrow M$. Przedstawione powyżej wyniki doświadczalne

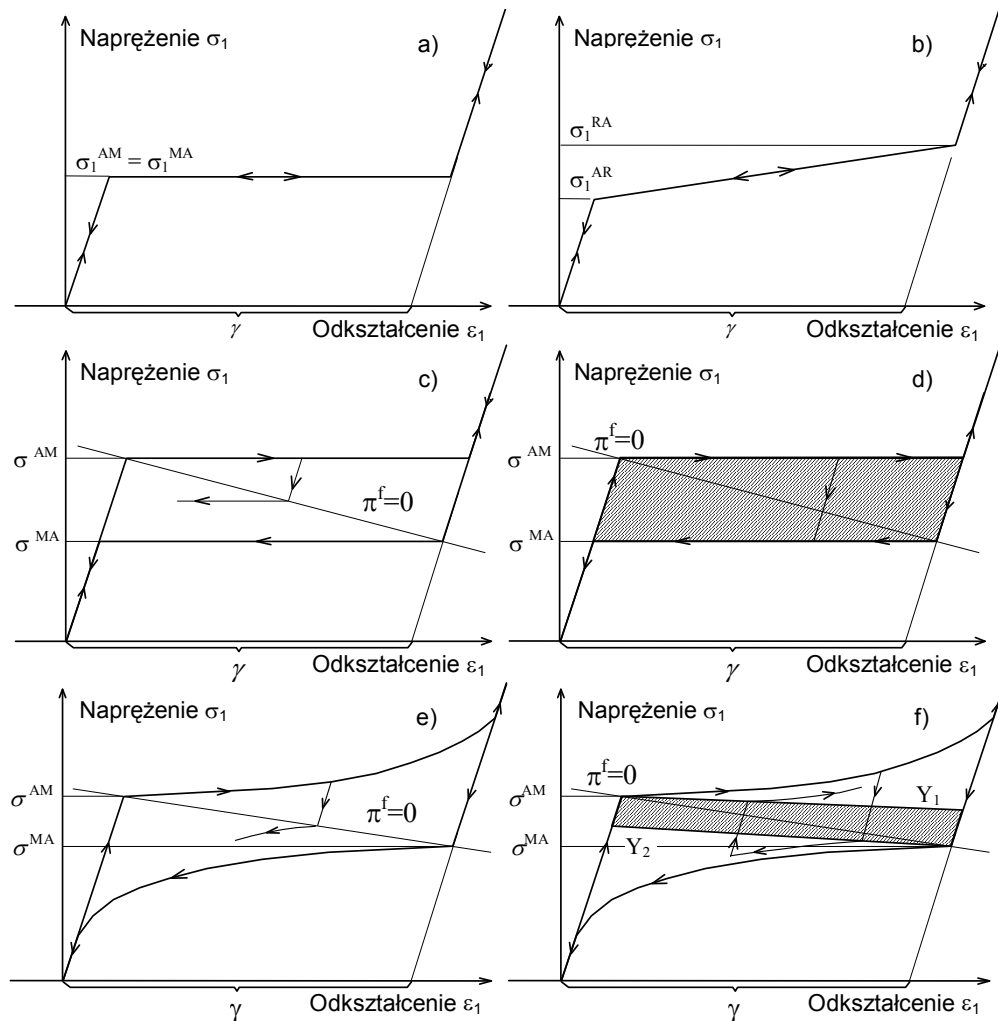


Rys. 3.3 a) Graniczna i wewnętrzne pętle histerezy we współrzędnych odkształcenie-temperatura dla próbki CuZnAl wynikające z obciążania próbki utrzymywanej pod stałym naprężeniem cyklami temperaturowymi – izostatyczne cykle temperaturowe. b) Zjawiska nawrotu (odzysku) siły występujące na skutek ogrzewania próbki CuZnAl. Za Huo i Müllerem [31].

dotyczą próbek monokrystalicznych. W przypadku próbek polikrystalicznych na ogół nie obserwuje się idealnego płynięcia pseudosprężystego lecz występuje umocnienie w trakcie postępu przemiany fazowej. W przypadku stopów polikrystalicznych SMA częstym zjawiskiem jest „nie zamykanie się” pętli histerezy podczas pierwszych kilkunastu cykli obciążenia. Dopiero po wstępnym programie kilkunastu (kilkudziesięciu) cykli obciążenia wstępnego odpowiedź materiału stabilizuje się i następne pętle histerezy przy dalszych cyklach obciążania i odciążania są już zamknięte.

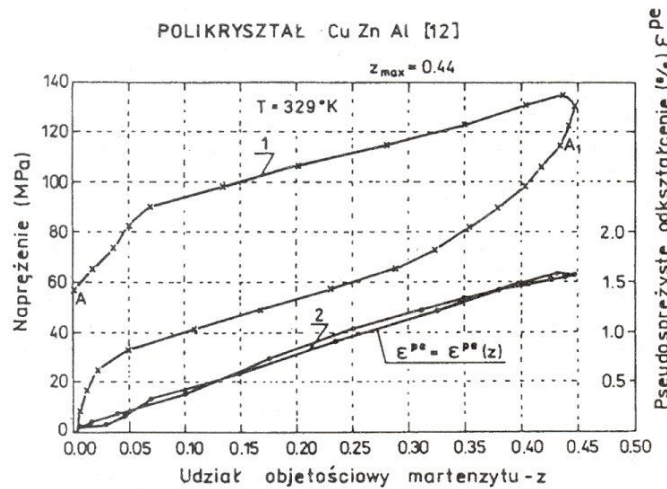
Przegląd doświadczalnych prac poświęconych jednowymiarowemu rozciąganiu próbek wykonanych z różnych stopów wykazujących zjawisko pseudosprężystości pozwala na sporządzenie zbiorczego zestawienia schematycznych typów ich zachowania, przedstawionych na rysunku 3.4. Jak widać na rysunku 3.4 stopy z pamięcią kształtu wykazują dużą różnorodność typów zachowania. Na przykład monokrystaliczna próbka AuCd wykazuje idealne płynięcie pseudosprężyste w zasadzie bez pętli histerezy, monokrystaliczna próbka CuZnAl płynie idealnie ale wykazuje pętlę histerezy. Polikrystaliczna próbka NiTi ulegająca przemianie R-fazowej, sieć krystaliczna martenzytu powstającego podczas przemiany R-fazowej jest romboedryczna, wykazuje umocnienie podczas płynięcia pseudosprężystego. Pętla histerezy towarzysząca przemianie R-fazowej jest mała, i często można jej istnienie zaniedbać. Ta sama próbka ulegająca przemianie monoklinicznej, sieć krystaliczna martenzytu powstającego podczas tej przemiany jest monokliniczna, wykazuje umocnienie i dużą pętlę histerezy. Różne są też sposoby formowania się wewnętrznych pętli histerezy. W przypadku stopu CuZnAl niekompletne przemiany fazowe (wprost i odwrotne) rozpoczynają się w okolicy przekątnej pętli histerezy, na rysunku 3.4c oznaczonej jako $\pi^f = 0$. W przypadku poddanego odpowiedniej obróbce stopu NiTi niekompletne przemiany fazowe (wprost i odwrotne) rozpoczynają się nie na przekątnej $\pi^f = 0$ lecz dopiero po osiągnięciu pewnych krzywych progowych Y_a , patrz rysunek 3.4f. Symbol π^f oznacza termodynamiczną siłę napędową przemiany fazowej, zaś linia $\pi^f = 0$ zgodnie z termodynamicznym modelem pseudosprężystości R_L wyznacza stany pełnej równowagi termodynamicznej. Wnętrza obszarów zakreskowanych na rysunkach 3.4d i 3.4f określają stany termodynamiczne, z których nie może zachodzić aktywna przemiana fazowa.

Wyniki eksperymentu wykonanego przez Vachera i Lexcellenta na próbce wykonanej ze stopu CuZnAl [82], patrz także [64], dostarczają dowodu eksperymentalnego wprost, że za efekty odkształceniowe pamięci kształtu odpowiedzialna jest martenzytyczna przemiana fazowa. Próbkę poddano izotermicznemu rozciąganiu, jednocześnie mierząc naprężenie $\sigma(t)$, odkształcenie $\varepsilon(t)$ i zmianę jej oporności elektrycznej. Na podstawie pomiaru oporności



Rys. 3.4 Zbiorcze zestawienie schematycznych typów zachowania stopów z pamięcią kształtu przy jednoosiowym rozciąganiu. a) Wyidealizowane zachowanie stopu AuCd. b) Wyidealizowane zachowanie stopu NiTi ulegającego przemianom R-fazowej. c) Wyidealizowane zachowanie monokrystalicznego stopu CuZnAl. d) Wyidealizowane zachowanie stopu FeNi. e) Wyidealizowane zachowanie stopu polikrystalicznego stopu NiTi. f) Wyidealizowane zachowanie stopu NiTi poddanego specjalnej obróbce technologicznej.

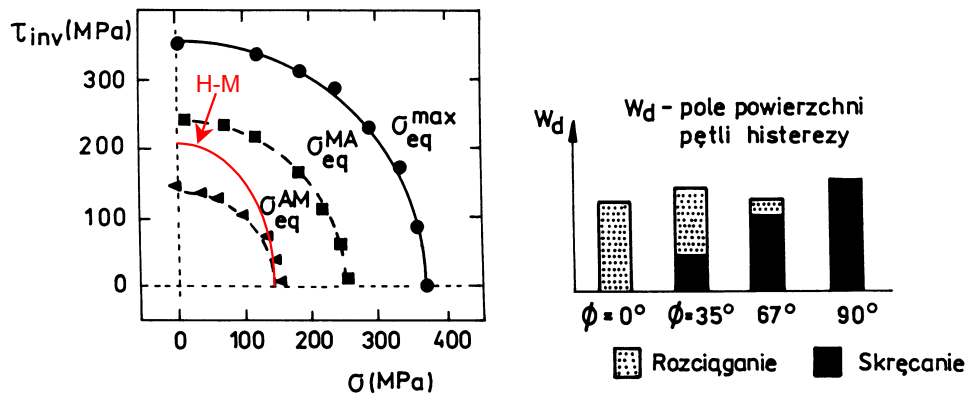
elektrycznej wyznaczono zmianę zawartości fazy martenzytycznej w próbce $z(t)$. Znając przebiegi $\sigma(t)$, $\varepsilon(t)$, $z(t)$ wyznaczono zależność $\varepsilon^{pe}(z) = \varepsilon(z) - \sigma(z)/E$, gdzie E oznacza moduł Younga, zaś ε^{pe} odkształcenie niesprężyste związane z przemianą fazową. Na podstawie tych danych sporządzono krzywe $\sigma - z$, oraz



Rys. 3.5 Wykres naprężenie – odkształcenie i odpowiadający mu wykres udział objętościowy fazy martenzytycznej – odkształcenie. Udział fazy martenzytycznej wyznaczono z pomiarów oporności elektrycznej. Za Vacherem i LExcellentem [82], patrz także [64].

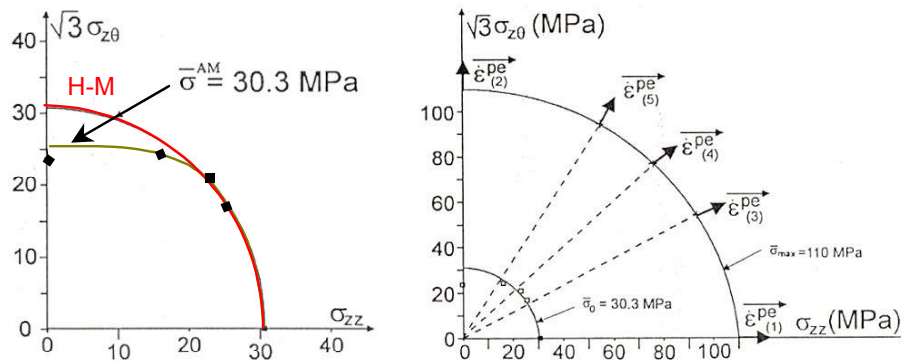
$\varepsilon^{pe} - z$ pokazane na rysunku 3.5. Krzywa $\sigma - z$ wykazuje pętlę histerezy, zaś krzywa $\varepsilon^{pe} - z$ takiej pętli nie wykazuje i jest w przybliżeniu linią prostą. Można stąd wyciągnąć wniosek, że makroskopowe odkształcenie fazowe jest wprost proporcjonalne do zaawansowania przemiany fazowej z , jeśli przemiana ta jest indukowana naprężeniem.

W czasie opracowywania modelu R_L w literaturze dostępnych było stosunkowo niewiele wyników badań zachowania stopów SMA w złożonych stanach naprężenia. Można tu wymienić prace Sittnera i Tokudy [75] oraz Sittnera – por. [76], w których podano wyniki eksperymentalne otrzymane dla próbek polikrystalicznych wykonanych ze stopu CuZnAlMn poddanych jednoczesnemu skręcaniu i rozciąganiu wzdłuż proporcjonalnych i nieproporcjonalnych ścieżek obciążenia. Na rysunku 3.6a pokazano otrzymane eksperymentalnie powierzchnie krytycznych naprężeń początku przemiany martenzytycznej i przemiany odwrotnej we współrzędnych $\sigma - \tau^{inv}$, gdzie σ oznacza składową rozciągającą tensora naprężenia zaś współrzędna $\tau^{inv} = 1.2\tau$, gdzie τ oznacza składową ścinającą tensora naprężenia. Współczynnik skalowania 1.2 w definicji tej współrzędnej został tak dobrany, aby pseudo naprężenie efektywne zdefiniowane jako $\tilde{\sigma}_{eq} = [\sigma^2 + (1.2\tau)^2]^{1/2}$ dawało na wykresie kształt koła podobnie jak to ma miejsce w przypadku tradycyjnej teorii plastyczności i akceptowalności hipotezy Hubera-Misesa (H-M). Na rysunku 3.6a dla porównania wykreślono również powierzchnie oznaczone symbolem „H-M”, tj. takie jakie uzyskano by, gdyby krytyczne



Rys. 3.6 a) Naprężenia krytyczne płynięcia pseudosprężystego w przestrzeni naprężeń otrzymane dla próbek cylindrycznych wykonanych ze stopu CuZnAlMn poddanych obciążeniom proporcjonalnym. b) Wielkości pętli histerezy dla tych samych próbek i obciążeń. Za Sittnerem, Tokudą i innymi [75], [76]. Symbolem H-M oznaczono dla porównania hipotetyczne powierzchnie Hubera-Misesa.

naprężenia płynięcia pseudosprężystego stopu z pamięcią kształtu CuZnAlMn podlegały teorii Hubera-Misesa. Linia oznaczona na rysunku 3.6a jako σ_{eq}^{max} odpowiada pseudo naprężeniom ekwiwalentnym $\tilde{\sigma}_{eq}$ jakie wystąpiły przy maksymalnym stosowanym w trakcie eksperymentów odkształceniu $\varepsilon_{eq}^{max} = 0.03$. Na rysunku 3.6b pokazano, jak wielkość pętli histerezy wyrażona w jednostkach energii zależy od sposobu odkształcenia (kąt $\phi = const$ określa stosunek składowych tensora naprężenia przy obciążeniu proporcjonalnym). Z dość dobrym przybliżeniem można przyjąć, że wielkość pętli histerezy nie zależy od ścieżki odkształcenia, jednak różnie się rozkłada na poszczególne składowe odkształcenia. Podobne badania do tych wykonanych przez Sittnera i innych choć w znacznie mniejszym zakresie zostały przeprowadzone przez Roguedę i innych na rurkowych próbkach polikrystalicznych wykonanych ze stopu CuZnAl poddawanych rozciąganiu i skręcaniu [71]. Zasadniczą różnicą pomiędzy badaniami Roguedy i innych oraz Sittnera i innych jest to, że w tym pierwszym wypadku obciążenie próbki było sterowane siłami, zaś w tym drugim obciążenie próbki było sterowane odkształceniami. Na rysunku 3.7 czarnymi rombami zaznaczono otrzymane punkty eksperymentalne początku przemiany austenit-martenzyt $\sigma_{eq}^{AM} = [\sigma^2 + 3\tau^2]^{1/2}$, zaś dla porównania symbolem H-M oznaczono powierzchnię Hubera-Misesa. Jakościowo wyniki otrzymane przez Roguedę i innych dla stopu CuZnAl są podobne do tych otrzymanych przez Sittnera i innych dla stopu CuZnAlMn, tj. oba te materiały łatwiej płyną pseudosprężystość przy obciążeniach ścinających niż przewiduje to teoria Hubera-Misesa i odchyłki od teorii H-M są znaczne, rzędu

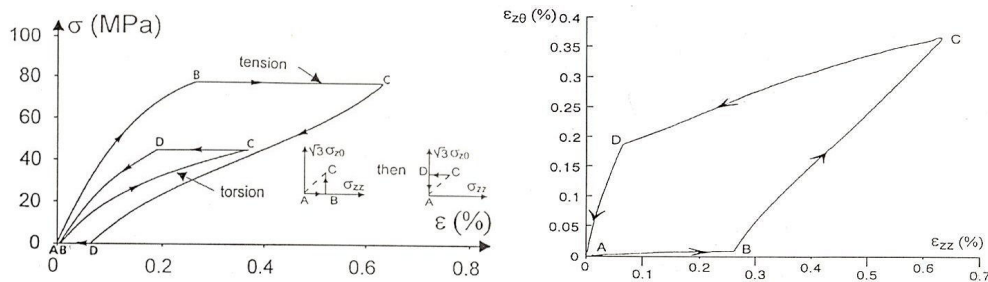


Rys. 3.7 a) Naprężenia krytyczne płynięcia pseudosprężystego w przestrzeni naprężeń otrzymane dla próbek cylindrycznych wykonanych ze stopu CuZnAl poddanych obciążeniom proporcjonalnym. b) Kierunki wektorów prędkości odkształceń pseudosprężystych dla tych samych próbek i obciążeń. Za Roguedą i innymi [71].

40%. Rogueda i inni badali również kierunki prędkości odkształceń pseudosprężystych przy obciążeniach proporcjonalnych. Wyniki tych badań pokazano na rysunku 3.7b. Autorzy stwierdzają, iż w przypadku obciążeń proporcjonalnych prędkości $\dot{\epsilon}^{pe}$ są ortogonalne do powierzchni płynięcia pseudosprężystego. Rogueda i inni przeprowadziła również szereg doświadczeń dla różnych typów nieproporcjonalnych ścieżek obciążenia. Przykładowy wynik dla nieproporcjonalnego obciążenia próbki CuZnAl pokazano na rysunku 3.8. Autorzy stwierdzają, iż wyniki testów nieproporcjonalnych dostarczyły im dużej ilości danych, których nie byli w stanie zinterpretować.

Proporcjonalne testy skręcania-rozciągania-ściskania na próbkach wykonanych ze stopu NiTi wykonali Orgeas i Favier [51]. Również oni stwierdzili, znaczne różnice pomiędzy krytycznym efektywnym naprężeniem początku przemiany martenzytycznej w przypadku rozciągania i ściskania. Inne obserwacje jakie Orgeas i Favier poczynili dla stopu NiTi to:

– naprężenie krytyczne w rozciąganiu σ_{comp}^{AM} jest niższe w ściskaniu σ_{tens}^{AM} ,



Rys. 3.8 Test dwuosiowego nieproporcjonalnego rozciągania-skręcania próbki polikrystalicznej CuZnAl. Za Roguedą i innymi [71].

- wartości krytyczne σ_{comp}^{AM} , σ_{tens}^{AM} zależą liniowo od temperatury,
- amplituda pływnięcia pseudosprężystego w rozciąganiu γ_{tens} jest większa niż amplituda pływnięcia pseudosprężystego w ściskaniu γ_{comp} ,
- energie wyrażone iloczynem $\sigma_{eq} \cdot \gamma$, z dobrym przybliżeniem, są takie same i zależne tylko od temperatury $(\sigma_{tens}^{AM} \cdot \gamma_{tens}) \cong (\sigma_{comp}^{AM} \cdot \gamma_{comp}) = C(T)$,

Podawane w literaturze dane dotyczące zachowania stopów SMA w złożonych (dwuosiowych) stanach naprężenia dostarczyły przesłanek do sformułowania założeń dla budowy kolejnej wersji modelu R_L z 1998, przypomnianego w zwartej postaci w następnej sekcji. Jednak ukierunkowana i dobrze zaplanowana weryfikacja założeń teoretycznych modelu R_L , dla stanów dwuosiowych i ścieżek proporcjonalnych, została dokonana dopiero w późniejszych latach na skutek realizacji szerokiego programu badań doświadczalnych przeprowadzonych przy współudziale autora niniejszej pracy. Częściowe wyniki tych prac zostaną podane w rozdziale 5 niniejszej rozprawy.

3.3 Termodynamiczny model pseudosprężystości R_L

W latach 1992-1998 Raniecki, Lexcellent i Tanaka opracowali w ramach teorii małych odkształceń rodzinę termodynamicznych modeli pseudosprężystości R_L bazując między innymi na wynikach doświadczalnych dotyczących zachowania stopów z pamięcią kształtu w zakresie pseudosprężystym opisanych w poprzedniej sekcji [62], [63], [65]. W niniejszej sekcji zostanie przypomniana ostanía wersja modelu R_L z roku 1998.

W intencji autorów model R_L ma zastosowanie do opisu makroskopowego pseudosprężystego zachowania zarówno mono- jak i polikrystalicznych stopów SMA, tzn. dla temperatur pozostających w zakresie $A_f^0 < T < M_\sigma$ patrz rysunek 2.9, poddawanych złożonym termomechanicznym stanom obciążenia – model 3D. Dla pewnych ścieżek obciążenia model pozwala na przewidywanie zachowania stopu SMA również w zakresie temperatur $A_s^0 < T < A_f^0$. Autorzy ograniczyli się do opisu takich sytuacji fizycznych, w których dominujące znaczenie ma zachowanie tylko dwóch faz, czyli istotną rolę odgrywa tylko jedna przemiana fazowa. W takim wypadku reprezentatywny element objętości (RVE) materiału może znajdować się albo w stanie czysto austenitycznym albo w stanie czysto martenzytycznym albo w stanie dwufazowym.

Aby móc opisać pojawianie się pętli histerezy autorzy modelu R_L korzystają za Rice'm z koncepcji tzw. stanów ograniczonej równowagi termodynamicznej. Przyjęli oni, że w ogólnym przypadku makroelement stopu SMA pozostaje zawsze w stanie pełnej w sensie termodynamicznym równowagi

i) mikromechanicznej – oznacza to, przyjęcie założenia że parcjalne naprężenia Cauchego obu faz są w stanach dwufazowych RVE równe sobie i równe całkowitemu naprężeniu makroskopowemu RVE $\underline{\sigma}_{(1)} = \underline{\sigma}_{(2)} = \underline{\sigma}$. Korzystając z tej własności można stwierdzić, że wtedy również parcjalne odkształcenia sprężyste obu faz są takie same.

ii) termicznej – oznacza to przyjęcie założenia, że entropia RVE może być wyznaczona jako formalna pochodna cząstkowa potencjału energii swobodnej względem temperatury $s \equiv -\partial \Phi / \partial T$.

iii) mikrostrukturalnej – ten warunek równowagi doprowadził autorów modelu R_L do koncepcji „optymalnego uporządkowania mikrostruktury”, którego konsekwencje zostaną omówione nieco poniżej.

Autorzy modelu R_L założyli, że makroelement SMA

iv) nie pozostaje na ogół w pełnej termodynamicznej równowadze fazowej.

Właśnie tej nierównowadze w dominującym stopniu przypisywane są efekty dyssypatywne w zakresie pseudosprężystego zachowania stopów SMA. Konieczne staje się podanie dodatkowej informacji, oprócz jawnej postaci potencjału energii swobodnej, w postaci tzw. równań kinetyki przemiany fazowej. Te dodatkowe równania domykają konstytutywny model zachowania stopów z pamięcią kształtu – model R_L czyniąc go kompletnym od strony matematycznej i fizycznej.

Przyjęto, że stan punktu materialnego traktowanego jako system termodynamiczny w stanach ograniczonej równowagi termodynamicznej jest całkowicie scharakteryzowany przez następujący zbiór niezależnych parametrów termodynamicznych

$\underline{\epsilon}$ – tensor małych odkształceń całkowitych RVE,

T – temperaturę,

z – udział objętościowy fazy martenzytycznej, traktowany jako parametr wewnętrzny ($z = V^{(2)} / V$; gdzie V oznacza całkowitą objętość makroelementu RVE, zaś $V^{(2)}$ chwilową objętość fazy martenzytycznej),

$\underline{\kappa}(H_i)$ – tensor odkształceń własnych. Zakłada się, że tensor $\underline{\kappa}$ zależy od zbioru wzajemnie niezależnych tutaj niewyspecyfikowanych jawnie mikroskopowych parametrów wewnętrznych H_i ; $i = 1..N$, które pozwalają na opis ewolucji mikrostruktury makroelementu stopu z pamięcią kształtu. Tensor $\underline{\kappa}(H_i)$ charakteryzuje od strony makroskopowej efekty odkształceniowe związane w szerokim sensie z przemianą fazową, tj. z ewolucją mikrostruktury RVE na skutek postępu przemiany, ale również z jej ewolucją na skutek zmian stanu obciążenia bez postępu przemiany fazowej (wynikającej np. z reorientacji fazy martenzytycznej). Makroskopowe odkształcenia fazowe i odkształcenia sprężyste makroelementu z pamięcią kształtu opisane są wzorami

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = z \underline{\boldsymbol{\kappa}}(H_i), \quad \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^T. \quad (3.1)$$

Aby uzyskać te wzory założono, że niesprężyste odkształcenia w fazie austenitycznej są równe zeru – $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(1)}^{in} = 0$, zaś w fazie martenzytycznej wynoszą one – $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(2)}^{in} = \underline{\boldsymbol{\kappa}}(H_i)$.

Przyjęto uproszenia natury fizycznej a mianowicie, że tensory „energetyczne” modułów sprężystości $\underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^{(\alpha)}/\rho$ ($\underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^{(\alpha)}$ oznaczają klasyczne tensory sprężystości występujące w prawie Hooke’a wiążącym tensor naprężenia Cauchego z tensorem odkształcenia), tensory współczynników rozszerzalności termicznej $\underline{\boldsymbol{\alpha}}^{(\alpha)}$, i ciepła właściwe przy stałym odkształceniu $c_v^{(\alpha)}$, poszczególnych faz traktowane są jako stałe fizyczne niezależne od stanu termodynamicznego i identyczne dla obu faz. Jak wskazują obserwacje doświadczalne różnica gęstości martenzytu termosprężystego i austenitu z reguły nie przekracza 0.2% dlatego przyjęto również, że gęstości fazy austenitycznej i martenzytycznej są zawsze takie same,

$$\underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}/\rho = \underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^{(\alpha)}/\rho = const, \quad \underline{\boldsymbol{\alpha}} = \underline{\boldsymbol{\alpha}}^{(\alpha)} = const, \quad c_v = c_v^{(\alpha)} = const, \quad \rho^{(1)} = \rho^{(2)} = \rho \quad (3.2)$$

Przyjęcie powyższych założeń stanowi dobre przybliżenie modelowe znacząco upraszczając sformułowanie matematyczne modelu. Przypadek, gdy moduły sprężystości są różne dla poszczególnych faz i zależne liniowo od temperatury rozpatrzono w pracy Raniecki, Lexcellent [63].

Postać funkcji energii swobodnej właściwej na jednostkę masy RVE w stanach ograniczonej równowagi (bez równowagi fazowej), tj. przy spełnieniu warunków i) ÷ iii) postulowana jest następująco

$$\overline{\Phi}_c(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, T, z, \underline{\boldsymbol{\kappa}}(H_i)) = \Phi_0(T) + \Phi_{im}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, T, z, \underline{\boldsymbol{\kappa}}) + \Phi_{it}(z, T), \quad (3.3)$$

$$\Phi_0(T) = u_0^{*(1)} - Ts_0^{*(1)} - z\pi_0^{chem}(T) + c_v[(T - T_0) - T \ln(T/T_0)],$$

$$\Phi_{im}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, T, z, \underline{\boldsymbol{\kappa}}(H_i)) = (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - z\underline{\boldsymbol{\kappa}}) \cdot \underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - z\underline{\boldsymbol{\kappa}})/(2\rho) - (T - T_0)\underline{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - z\underline{\boldsymbol{\kappa}})/\rho,$$

$$\Phi_{it}(z, T) = (1 - z)z\phi_{it}(T) + W^{(st)}z,$$

$$\phi_{it}(T) = (\bar{u}_0 - T\bar{s}_0) > 0, \quad W^{(st)} = \Delta u_{(s)}^* - T \cdot \Delta s_{(s)}^*.$$

Człony $\Phi_0(T)$ i $\Phi_{im}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, T, z, \underline{\boldsymbol{\kappa}})$ oznaczają termosprężystą i termiczną część energii swobodnej makroelementu, zaś $\Phi_{it}(z, T)$ oznacza tzw. energię oddziaływań wewnętrznych. Energia ta składa się z tzw. energii koherencji $(1 - z)z\phi_{it}$ oraz energii zmagazynowanej $W^{(st)}z$, $W^{(st)}$ oznacza energię zmagazynowaną w makroelementie po zakończeniu martenzytycznej przemiany fazowej, a jest ona generowana na skutek powstawania samorównoważących się naprężeń resztkowych. Funkcja energii swobodnej może być także podzielona w inny bardziej tradycyjny sposób $\overline{\Phi}_c = (1 - z)\Phi^{(1)} + z\Phi^{(2)} + \Phi_{it}$, gdzie $\Phi^{(1)}$ oznacza termosprężystą energię

swobodną fazy austenitycznej, $\Phi^{(2)}$ oznacza termosprężystą energię swobodną fazy martenzytycznej, zaś Φ_{it} energię oddziaływań wewnętrznych.

Człon energii zmagazynowanej $W^{(st)}$ i człon π_0^{chem} zwany często w literaturze metalurgicznej chemiczną siłą napędową przemiany fazowej mogą być połączone by utworzyć

$$\pi_0^f(T) \equiv -\pi_0^{chem}(T) + W^{(st)} = \Delta u^* - T\Delta s^*, \quad (3.4)$$

$$\Delta u^* = (u_0^{*(1)} - u_0^{*(2)}) + \Delta u_{(s)}^*, \quad \Delta s^* = (s_0^{*(1)} - s_0^{*(2)}) + \Delta s_{(s)}^*.$$

Stałe materiałowe $u_0^{*(1)}, s_0^{*(1)}$ oznaczają energię wewnętrzną i entropię formowania się fazy austenitycznej w termodynamicznym stanie odniesienia, tj. w stanie bez naprężeniowym ($\underline{\sigma}$) w temperaturze odniesienia $T = T_0$. Stałe $u_0^{*(2)}, s_0^{*(2)}$ określają energię i entropię formowania się fazy martenzytycznej w termodynamicznym stanie odniesienia. Ponieważ w procedurze identyfikacji stałych materiałowych modelu konstytutywnego od razu wyznacza się wartości $\Delta u^*, \Delta s^*$ z wyników doświadczalnych dla przemiany fazowej indukowanej naprężeniem ($A_0^f < T$) więc wielkości te od razu zawierają również człony związane z energią zmagazynowaną $W^{(st)}$. Wielkości \bar{u}_0, \bar{s}_0 stanowią stałe materiałowe.

Warunek termodynamicznej równowagi mikrostrukturalnej *iii*), na którego obowiązywanie wskazują obserwacje eksperymentalne, umożliwia wprowadzenie koncepcji „optymalnego uporządkowania mikrostruktury”. Mówi się, że mikrostruktura RVE jest optymalna przy zadanych warunkach obciążenia jeżeli wartości zmiennych wewnętrznych ją charakteryzujących H_i minimalizują funkcję energii swobodnej $\bar{\Phi}_c$. Równowagowe wartości parametrów H_i dla których $\bar{\Phi}_c$ osiąga ekstremum mogą być wyznaczone z równań wyznaczających warunki konieczne osiągnięcia ekstremum

$$(\partial \bar{\Phi}_c / \partial H_i = 0) \Rightarrow ((\underline{\sigma} / \rho) \cdot \partial \underline{\kappa}(H_i) / \partial H_i = 0) \Rightarrow \quad (3.5)$$

$$(H_i = H_i^{eq}(\underline{\sigma}, T)), \quad H_i \quad i = 1, N.$$

Z powyższego wynika, że równowagowe wartości H_i^{eq} mogą zależeć tylko od makroskopowego naprężenia $\underline{\sigma}$ i temperatury T . Wtedy wartość równowagowa makroskopowych odkształceń własnych martenzytu $\underline{\kappa}^{eq}$ musi być funkcją naprężenia i temperatury

$$\underline{\kappa}(H_i) \Big|_{H_i = H_i^{eq}} = \underline{\kappa}^{eq}(H_i^{eq}(\underline{\sigma}, T)) = \underline{\kappa}^{eq}(\underline{\sigma}, T), \quad (3.6)$$

i musi ona spełniać warunek

$$\sum_{\alpha i} \underline{\sigma} \cdot \frac{\partial \underline{\kappa}}{\partial H_\alpha} \frac{\partial H_\alpha^{eq}}{\partial \underline{\sigma}} = \underline{\sigma} \cdot \frac{\partial \underline{\kappa}^{eq}}{\partial \underline{\sigma}} = 0 \Leftrightarrow (\sigma_{ij} \frac{\partial \kappa_{ij}^{eq}}{\partial \sigma_{mn}} = 0), \quad (3.7)$$

wynikający z przemnożenia N równań (3.5)₂ przez $\partial H_\alpha^{eq} / \partial \underline{\sigma}$, odpowiednio a następnie ich zsumowania. Jeśli tensor $\underline{\sigma} \cdot (\partial \underline{\kappa}^{eq} / \partial \underline{\sigma})$ zostanie zwięziony z tensorem prędkości naprężenia $\dot{\underline{\sigma}}$, to otrzymana zostanie kolejna istotna w dalszych rozważaniach zależność, która jest zawsze spełniona w warunkach równowagi mikrostrukturalnej

$$(\underline{\sigma} \cdot \frac{\partial \underline{\kappa}^{eq}}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \dot{\underline{\sigma}} = \underline{\sigma} \cdot \dot{\underline{\kappa}}^{eq} = 0) \Leftrightarrow (\sigma_{ij} \frac{\partial \kappa_{ij}^{eq}}{\partial \sigma_{mn}} \dot{\sigma}_{mn} = 0). \quad (3.8)$$

Autorzy modelu R_L postulują, że dla równowagowych wartości $\underline{\kappa}^{eq}(\underline{\sigma}, T)$ istnieje potencjał $g^{ph}(\underline{\sigma}, T) \geq 0$

$$\rho g^{ph}(\underline{\sigma}, T) = \underline{\kappa}^{eq} \cdot \underline{\sigma}, \quad \underline{\kappa}^{eq}(\underline{\sigma}, T) = \rho \frac{\partial g^{ph}(\underline{\sigma}, T)}{\partial \underline{\sigma}},$$

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \kappa_{ij}^{eq}}{\partial \sigma_{mn}} = \sigma_{ij} \frac{\rho \partial^2 g^{ph}}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{mn}} = \sigma_{ij} \frac{\partial \kappa_{mn}^{eq}}{\partial \sigma_{ij}} = 0. \quad (3.9)$$

Potencjał ρg^{ph} musi być funkcją jednorodną stopnia pierwszego względem $\underline{\sigma}$, aby spełniony był tożsamościowo warunek (3.7). Wtedy $\underline{\kappa}^{eq}(\underline{\sigma}, T)$ będzie funkcją jednorodną stopnia zerowego względem $\underline{\sigma}$. Tożsamościowe spełnienie warunku (3.7) oznacza, że na skutek procesu reorientacji mikrostruktury, a zatem ewolucji tensora $\underline{\kappa}$ nie następuje produkcja entropii.

Stosując transformację Legendre'a do potencjału energii swobodnej $\bar{\Phi}_c$ można uzyskać odpowiadający jej potencjał Gibbsa \bar{g}_c

$$\bar{g}_c \equiv \bar{\Phi}_c(\underline{\epsilon}, T, z) - (1/\rho) \underline{\sigma} \cdot \underline{\epsilon}. \quad (3.10)$$

Po zastąpieniu wyrażenia $\underline{\kappa}^{eq} \cdot \underline{\sigma} / \rho$ przez $g^{ph}(\underline{\sigma}, T)$ potencjał Gibbsa w stanach ograniczonej równowagi, bez termodynamicznej równowagi fazowej, staje się wyłącznie funkcją $(\underline{\sigma}, T, z)$ i przyjmuje postać

$$\bar{g}_c(\underline{\sigma}, T, z) = u_0^{*(1)} - Ts_0^{*(1)} - z\pi_0^f(T) + c_p [(T - T_0) - T \ln(T/T_0)] +$$

$$- \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathcal{M}} \underline{\sigma} / (2\rho) - (T - T_0) \underline{\alpha} \cdot \underline{\sigma} / \rho - \underbrace{z \underline{\kappa} \cdot \underline{\sigma} / \rho}_{= g^{ph}(\underline{\sigma}, T)} + \phi_u(T)(1 - z)z, \quad (3.11)$$

gdzie $\underline{\mathcal{M}} = \underline{\mathcal{L}}^{-1}$ jest klasycznym tensorem podatności sprężystych, zaś c_p oznacza ciepło właściwe przy stałym naprężeniu. Powyżej wykorzystano tożsamość

$$c_p \ln(T/T_0) = c_v \ln(T/T_0) + \underline{\alpha} \cdot \underline{\mathcal{L}} \underline{\alpha} (T - T_0) / \rho, \quad (3.12)$$

$$c_v / T \equiv \partial \psi_c / \partial T \Big|_{\underline{\varepsilon} = \text{const}}, \quad c_p / T = \partial \psi_c / \partial T \Big|_{\underline{\varepsilon} = \text{const}}.$$

Termiczne równania stanu makroelementu SMA wynikające z funkcji entalpii swobodnej $\bar{g}_c(\underline{\sigma}, T, z)$ są następujące

$$\underline{\varepsilon} = -\rho \partial \bar{g}_c / \partial \underline{\sigma} = \underline{\mathcal{M}} \underline{\sigma} + \underline{\varepsilon}^T + \underline{\alpha} (T - T_0), \quad \underline{\varepsilon}^T = z \rho \partial g^{ph} / \partial \underline{\sigma} = z \underline{\mathbf{k}}, \quad (3.13)$$

$$s \equiv -\partial \bar{g}_c / \partial T = c_p \ln(T/T_0) + s_0^{*(1)} - z \Delta s^* + \bar{s}_0 (1 - z) z + \underline{\alpha} \cdot \underline{\sigma} / \rho,$$

$$\pi^f \equiv -\partial \bar{g}_c / \partial z = \pi_0^f(T) - (1 - 2z) \phi_{it}(T) + g^{ph}(\underline{\sigma}, T).$$

Warunek $\pi^f = 0$ określa stany pełnej równowagi termodynamicznej RVE

$$\pi^f = \pi_0^f(T) - (1 - 2z) \phi_{it} + \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\sigma} / \rho = 0. \quad (3.14)$$

Korzystając z powyższego warunku można wyznaczyć równowagowe wartości udziału objętościowego fazy martenzytycznej z^{eq} w zależności od zewnętrznych parametrów stanu $(\underline{\varepsilon}, T)$

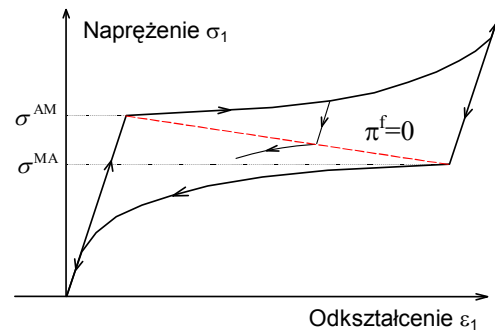
$$z^{eq} = \frac{\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathcal{L}} [(\underline{\varepsilon} - \underline{\alpha} (T - T_0))] + \rho (\pi_0^f(T) - \phi_{it})}{\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\mathcal{L}} \underline{\mathbf{k}} - 2 \phi_{it} \rho}.$$

Położenie stanów pełnej równowagi termodynamicznej RVE – pozostającego w stanie dwufazowym, w przestrzeni naprężenie–odkształcenie ($T = \text{const}$) pokazano na rysunku 3.9 linią przerywaną, oznaczoną $\pi^f = 0$. Stany pełnej równowagi termodynamicznej są niestabilne gdy $\partial \pi^f / \partial z \equiv -(\partial^2 \bar{g}_c / \partial z^2) = 2 \phi_{it}(T) \geq 0$.

Jak wskazują wyniki doświadczalne warunek ten jest spełniony dla wielu stopów z pamięcią kształtu. Gdy $\phi_{it}(T) = 0$ równowaga fazowa jest równowagą obojętną. Niestabilność stanów pełnej równowagi termodynamicznej powoduje, że nie obserwuje się w praktyce procesów termodynamicznych przebiegających w sposób ciągły po tych stanach. Autorzy modelu R_L na podstawie powyższych rozważań doszli do wniosku, iż *niestabilność stanów termodynamicznej równowagi fazowej stanowi podstawową przyczynę formowania się pętli histerezy*.

Warunek $\pi^f = 0$ jest wykorzystywany

w modelu R_L jako kryterium do określenia stanów krytycznych, w których rozpoczynają się procesy związane z



Rys. 3.9 Stany pełnej równowagi termodynamicznej zaznaczono linią przerywaną oznaczoną symbolem $\pi^f = 0$.

aktywną przemianą fazową

$$F^{AM} = \pi^f(\underline{\sigma}, T, z=0) = g^{ph}(\underline{\sigma}, T) - (\Delta s^* - \bar{s}_0)(T - M_s^0) = 0, \quad (3.15)$$

$$F^{MA} = \pi^f(\underline{\sigma}, T, z=1) = g^{ph}(\underline{\sigma}, T) - (\Delta s^* + \bar{s}_0)(T - A_s^0) = 0.$$

Równania powyższe stanowią odpowiedniki znanego z teorii mechaniki cieczy równania Clausiusa-Clapeyrona dla martenzytycznej przemiany wprost i odwrotnej. Temperatury M_s^0 i A_s^0 to teoretyczne temperatury początku przemiany martenzytycznej i austenitycznej odpowiednio, indukowanej zmianą temperatury w stanie bez naprężeniowym $\underline{\sigma} = 0$

$$M_s^0 = (\Delta u^* - \bar{u}_0) / (\Delta s^* - \bar{s}_0), \quad A_s^0 = (\Delta u^* + \bar{u}_0) / (\Delta s^* + \bar{s}_0). \quad (3.16)$$

Stanowią one liniową ekstrapolację założeń modelu R_L poza formalny zakres jego obowiązywania, tj. zakres temperatur $A_f^0 \leq T$. Doświadczalne wartości M_s^0 i A_s^0

wyznaczane są zazwyczaj techniką DSC.

Gdyby przemiana fazowa była indukowana temperaturą bez obecności makroskopowego naprężenia zewnętrznego $\underline{\sigma} = 0$, a energia oddziaływania pomiędzy fazami byłaby równa zero $\phi_{ii} = 0$, to jak wynika z warunku $\pi^f(\underline{\sigma} = 0, \phi_{ii} = 0) = \pi_0^f(T^{eq}) = 0$ przemiana fazowa wprost i przemiana odwrotna rozpoczynałyby się i zachodziły aż do zakończenia, w tej samej „równowagowej” temperaturze przemiany określonej wzorem $T^{eq} = \Delta u^* / \Delta s^*$.

Z powyższej obserwacji można wywnioskować, że to pole samorównoważących się mikronaprężeń (pewną makroskopową miarą wielkości tych naprężeń jest energia koherencji ϕ_{ii}) stanowi bezpośrednią przyczynę rozdawiania się temperatury równowagowej T^{eq} na obserwowane doświadczalnie dwie charakterystyczne temperatury martenzytycznej przemiany fazowej M_s^0 i A_s^0 – por. (3.16). Gdy $\bar{s}_0 \ll \Delta s^*$ to $T^{eq} \cong (M_s^0 + A_s^0) / 2$.

Jeżeli można przyjąć, że funkcja $g^{ph}(\underline{\sigma})$ nie zależy od temperatury to kryteria (3.15) pozwalają łatwo wyznaczyć krytyczne temperatury przemian fazowych indukowanych temperaturą w obecności makroskopowego naprężenia $\underline{\sigma} = const$ ze wzorów poniżej

$$M_s(\underline{\sigma}) = M_s^0 + g^{ph}(\underline{\sigma}, T) / (\Delta s^* - \bar{s}_0), \quad A_s(\underline{\sigma}) = A_s^0 + g^{ph}(\underline{\sigma}, T) / (\Delta s^* + \bar{s}_0).$$

Ponieważ potencjał $g^{ph}(\underline{\sigma}) \geq 0$ jest zawsze nieujemny, więc makroskopowe naprężenia zewnętrzne mogą powodować wyłącznie wzrost charakterystycznych temperatur przemiany fazowej. Pierwszą zasadę termodynamiki można zapisać w postaci prędkościowej następująco

$$\dot{u} = \dot{w} - \dot{q}, \quad \dot{u} = \dot{\Phi} + \dot{s}T + \dot{T}s, \quad (3.17)$$

$$\dot{w} = (\underline{\sigma} / \rho) \cdot \dot{\underline{\epsilon}},$$

gdzie \dot{u} oznacza prędkość zmiany energii wewnętrznej właściwej makroelementu, \dot{w} moc zewnętrznej pracy mechanicznej właściwej (wykonywanej nad makroelementem), \dot{q} moc energii właściwej wymienianej z otoczeniem w postaci ciepła (\dot{q} ma znak dodatni, gdy energia jest odprowadzana od makroelementu), $\dot{\Phi}$ prędkość zmiany energii swobodnej właściwej makroelementu, \dot{s} prędkość zmiany entropii właściwej, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ prędkość zmiany całkowitego odkształcenia makroelementu.

Nierówność Clausiusa-Duhema wyrażająca II zasadę termodynamiki stwierdza, że entropia w dowolnym procesie termodynamicznym nie może maleć. Zapisana dla procesów termodynamicznych zachodzących w makroelemente w sposób termicznie jednorodny ($\nabla T \equiv 0$) przyjmuje postać

$$\dot{w}_{Disp} \equiv T\dot{s} + \dot{q} \geq 0, \quad \dot{w}_{Disp} = \dot{w} - \dot{w}_0, \quad (3.18)$$

gdzie \dot{w}_{Disp} oznacza moc dyssypacji pracy mechanicznej właściwej na jednostkę masy, \dot{s} moc entropii właściwej. Alternatywnie \dot{w}_{Disp} może być wyrażona jako różnica pomiędzy mocą pracy mechanicznej właściwej \dot{w} , faktycznie wykonywanej nad makroelementem i mocą pracy mechanicznej właściwej jaka musiałaby być wykonana nad makroelementem w równoważnym procesie odwracalnym termodynamicznie \dot{w}_0 .

Fundamentalne równanie Gibbsa wyrażające zmianę energii swobodnej makroelementu SMA w procesach odwracalnych termodynamicznie zapisane dla funkcji energii swobodnej $\bar{\Phi}_c$ postulowanej w modelu R_L ma postać

$$\dot{\bar{\Phi}}_c(\boldsymbol{\varepsilon}, T, z) = (\boldsymbol{\sigma} / \rho) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - s\dot{T} - \pi^f \dot{z}. \quad (3.19)$$

Eliminując z równań (3.17)₁, (3.17)₂ i (3.19) \dot{q} oraz \dot{s} a następnie podstawiając otrzymany wynik do (3.18)₁ otrzymuje się następujące wyrażenie na moc dyssypacji pracy

$$\dot{w}_{Disp} = \pi^f \dot{z} \geq 0. \quad (3.20)$$

Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki musi być ona, w dowolnym procesie termodynamicznym, większa lub równa zero. Równanie powyższe wskazuje, że aktywna przemiana fazowa wprost $\dot{z} > 0$, austenit \rightarrow martenzyt, może być zainicjowana tylko z tych stanów w których $\pi^f \geq 0$, zaś aktywna przemiana odwrotna $\dot{z} < 0$, martenzyt \rightarrow austenit, może być zainicjowana tylko z tych stanów w których $\pi^f \leq 0$.

Ponieważ zgodnie z założeniami modelu R_L przemiany fazowe nie przebiegają po stanach pełnej równowagi termodynamicznej. Kompletna specyfikacja modelu od strony opisu zjawisk fizycznych i domknięcia sformułowania matematycznego wymaga zaproponowania tzw. równań kinetyki przemiany fazowej. We współczesnym podejściu do formułowania modeli kinetyki przemian fazowych

można wyróżnić dwa elementy. Pierwszy to, tzw. „ogólne równania” kinetyki przemiany fazowej wynikają one z wymagań II zasady termodynamiki ($\pi^f \dot{z} \geq 0$), oraz ewentualnie innych uwarunkowań zaobserwowanych doświadczalnie np. istnienia wartości progowych dla rozpoczęcia przemiany fazowej. Drugi element to, tzw. „specyficzne równania” kinetyki przemiany fazowej. Mają one zazwyczaj postać zestawu parametrycznych funkcji stanu. W przypadku modelu R_L są one wyrażone poprzez konkretną postać matematyczną funkcji stanu $\lambda_{(\alpha)}^\sigma(\underline{\sigma}, T, z)$ – por. (3.25). To właśnie specyficzne równania kinetyki przemiany faktycznie określają konkretny kształt ścieżek „kompletnej” i „cząstkowych” przemian fazowych.

Ogólne równania kinetyki termosprężystej martenzytycznej przemiany fazowej zapisane w postaci prędkościowej zaproponowane przez autorów modelu R_L mają następującą postać – por. Raniecki, Lexcellent [63]

$$\dot{z} = \lambda_{(1)}^\sigma \dot{\tilde{\pi}}_\sigma^f \text{ jeśli } \{\pi^f(\underline{\sigma}, T, z) \geq Y_{(1)} \geq 0 \text{ i } \dot{\tilde{\pi}}_\sigma^f(\underline{\sigma}, \dot{T}) > 0\} \text{ (A} \rightarrow \text{M)}, \quad (3.21)$$

$$\dot{z} = -\lambda_{(2)}^\sigma \dot{\tilde{\pi}}_\sigma^f \text{ jeśli } \{\pi^f(\underline{\sigma}, T, z) \leq Y_{(2)} \leq 0 \text{ i } \dot{\tilde{\pi}}_\sigma^f(\underline{\sigma}, \dot{T}) < 0\} \text{ (M} \rightarrow \text{A)},$$

$\dot{z} = 0$ w pozostałych przypadkach.

Równania powyższe można zapisać w bardziej zwartej postaci

$$\dot{z} = \lambda_{(1)}^\sigma \bar{H}(\pi^f - Y_{(1)}) < \dot{\tilde{\pi}}_\sigma^f > - \lambda_{(2)}^\sigma \bar{H}(-\pi^f - Y_{(2)}) < -\dot{\tilde{\pi}}_\sigma^f > \quad (3.22)$$

Korzystając z własności funkcji $\bar{H}(x)$ i $\langle x \rangle$ zdefiniowanych następująco,

$$\bar{H}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}, \quad \langle x \rangle = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases} \quad (3.23)$$

Tutaj $Y_{(\alpha)}(\underline{\sigma}, T, z) \geq 0$, $\alpha = 1, 2$ oznaczają funkcje wartości progowych, po osiągnięciu, których może się rozpocząć aktywna przemiana fazowa, patrz rysunek 3.4f. Funkcje te spełniają warunki $Y_{(1)}|_{z=0} = Y_{(2)}|_{z=1} = 0$. Moc indukująca proces aktywnej przemiany fazowej $\dot{\tilde{\pi}}_\sigma^f$ wprost (A \rightarrow M) lub odwrotnej (M \rightarrow A) jest zdefiniowana następująco

$$\dot{\tilde{\pi}}_\sigma^f \equiv (\partial \pi^f / \partial \underline{\sigma}) \cdot \dot{\underline{\sigma}} + (\partial \pi^f / \partial T) \dot{T} = (\mathbf{k} / \rho) \cdot \dot{\underline{\sigma}} - [\Delta s^* - (1 - 2z) \bar{s}_0] \dot{T} \quad (3.24)$$

Ostatnia równość po prawej stronie została obliczona przy wykorzystaniu wzoru na termodynamiczną siłę przemiany fazowej $\pi^f(\underline{\sigma}, T, z)$ – por. (3.14).

Specyficzne równania kinetyki przemiany fazowej są zdefiniowane funkcjami stanu $\lambda_{(\alpha)}^\sigma$ spełniającymi warunki $0 \leq \lambda_{(\alpha)}^\sigma(\underline{\sigma}, T, z) < \infty$ oraz $\lambda_{(1)}^\sigma|_{z=1} = \lambda_{(2)}^\sigma|_{z=0} = 0$

$$\lambda_{(1)}^\sigma = \frac{(m_1 / 2)(1 - z) < D >^{m_1 - 1}}{\bar{u}_0 [p_1(1 - z) + r_1] - m_1(1 - z) \phi_{ii}(T) < D >^{m_1 - 1}}, \quad (3.25)$$

$$\lambda_{(2)}^{\sigma} = \frac{(m_2/2)z(<-D>)^{m_2-1}}{\bar{u}_0[p_2z+r_2]-m_2z\phi_{it}(T)(<-D>)^{m_2-1}},$$

$$D \equiv \pi^f / 2\bar{u}_0,$$

gdzie $D \equiv \pi^f / 2\bar{u}_0$ oznacza bezwymiarową („unormowaną”) termodynamiczną siłę napędową przemiany fazowej, zaś $m_1, r_1, p_1, m_2, r_2, p_2$ stanowią stałe materiałowe równań kinetyki. Stałe te należy zidentyfikować na podstawie krzywych doświadczalnych dla każdego stopu z pamięcią kształtu.

Alternatywnie, można równania kinetyki zapisać w postaci bardziej dogodnej do obliczeń metodą elementów skończonych, tj. w zależności od prędkości parametrów zewnętrznych $(\dot{\boldsymbol{\epsilon}}, \dot{T})$, a nie parametrów $(\boldsymbol{\epsilon}, T)$

$$\dot{z} = \lambda_{(1)}^{\epsilon} \bar{H}(\pi^f - Y_{(1)}) <\dot{\tilde{\pi}}_{\epsilon}^f> - \lambda_{(2)}^{\epsilon} \bar{H}(-\pi^f - Y_{(2)}) <-\dot{\tilde{\pi}}_{\epsilon}^f>, \quad (3.26)$$

$$\lambda_{(1)}^{\epsilon} = \frac{m_1(1-z)<D>^{m_1-1}}{2\bar{u}_0[p_1(1-z)+r_1] - (1-z)m_1<D>^{m_1-1}[2\phi_{it}(T) - \mathbf{k} \cdot \mathcal{L}\mathbf{k} / \rho]},$$

$$\lambda_{(2)}^{\epsilon} = \frac{m_2z(<-D>)^{m_2-1}}{2\bar{u}_0[p_2z+r_2] - m_2z(<-D>)^{m_2-1}[2\phi_{it}(T) - \mathbf{k} \cdot \mathcal{L}\mathbf{k} / \rho]},$$

$$\dot{\tilde{\pi}}_{\epsilon}^f \equiv (\partial\pi^f / \partial\boldsymbol{\epsilon})\dot{\boldsymbol{\epsilon}} + (\partial\pi^f / \partial T)\dot{T} = (\mathbf{k} / \rho) \cdot \mathcal{L}\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - [\Delta s^* - (1-2z)\bar{s}_0]\dot{T} + (\mathbf{k} / \rho) \cdot \mathcal{L}\boldsymbol{\alpha}\dot{T},$$

$$D \equiv \pi^f(\boldsymbol{\epsilon}, T, z) / 2\bar{u}_0, \quad \pi^f = \pi_0^f(T) - (1-2z)\phi_{it}(T) + (\mathbf{k} / \rho) \cdot \mathcal{L}[(\boldsymbol{\epsilon} - z\mathbf{k} - \boldsymbol{\alpha}(T - T_0))]$$

Eliminując \dot{w}_{Disp} z równań (3.18)₁ i (3.20) otrzymuje się $\dot{q} = \pi^f \dot{z} - T\dot{s}$. Eliminując następnie z tak otrzymanej zależności człon $T\dot{s}$ po obliczeniu pochodnej materialnej (3.13)₂ otrzymuje się następujące równanie na moc ciepła, jaka musi być wymieniona z otoczeniem makroelementu SMA w trakcie zachodzenia dowolnego procesu termodynamicznego

$$\dot{q} = -c_p \dot{T} + \dot{q}_{tr}, \quad \dot{q}_{tr} \equiv -T\boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} / \rho + c_f^* \dot{z} + \pi^f \dot{z}, \quad (3.27)$$

$$c_f^*(z) \equiv T[\Delta s^* - (1-2z)\bar{s}_0].$$

Człon $-c_p \dot{T}$ opisuje efekty cieplne związane z pojemnością cieplną materiału. Wyrażenie \dot{q}_{tr} opisuje efekty związane z wewnętrzną (lokalną) generacją ciepła w materiale na skutek zachodzących w nim procesów fizycznych. Człon $\pi^f \dot{z}$ opisuje dyssypację pracy mechanicznej, człon $T\boldsymbol{\alpha} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}} / \rho$ opisuje efekt piezokaloryczny, zaś człon $c_f^* \dot{z}$ określa moc cieplną jaka byłaby wygenerowana w wirtualnym nieskończenie małym odwracalnym termodynamicznie procesie przemiany fazowej na skutek istnienia ciepła utajonego przemiany fazowej. Wyrażenie $l_f^* = \int_{z=0}^{z=1} c_f^* dz$

nazywane jest także „pozornym” ciepłem przemiany fazowej. Korzystając z równań (3.13)₃, (3.9) i (3.27)₃ można wyrazić siłę termodynamiczną przemiany fazowej następująco

$$\pi^f = c_f - c_f^*, \quad (3.28)$$

$$c_f(\underline{\sigma}, z) \equiv g^{ph}(\underline{\sigma}) + \Delta u^* - (1 - 2z)\bar{u}_0.$$

Wyrażenie $c_f \dot{z}$ określa rzeczywistą moc cieplną jaka zostałaby wygenerowana w rzeczywistym nieodwracalnym infinitezmalnym procesie przemiany fazowej na skutek istnienia ciepła utajonego przemiany fazowej i dyssypacji pracy mechanicznej.

Wyrażenie $l_f = \int_{z=0}^{z=1} c_f dz$ określa tzw. rzeczywiste ciepło ukryte przemiany fazowej. Wykorzystując wzór (3.28)₁ można \dot{q}_{tr} wyrazić wzorem – por. (3.27)₂

$$\dot{q}_{tr} = -T \underline{\alpha} \cdot \dot{\underline{\sigma}} / \rho + c_f \dot{z}. \quad (3.29)$$

W większości przypadków dotyczących stopów z pamięcią kształtu moc cieplna \dot{q} (dodatnia gdy ciepło jest odprowadzane do otoczenia) wymieniana jest pomiędzy makroelementem SMA i otoczeniem poprzez przewodzenie. Dla izotropowych materiałów SMA prowadzi to do następującego równania wymiany ciepła w przypadku problemu brzegowo początkowego

$$c_p \partial T(\underline{x}, t) / \partial t + (1 / \rho) \operatorname{div}(-\lambda \nabla T(\underline{x}, t)) - \dot{q}_{tr}(\underline{x}, t) = 0, \quad (3.30)$$

gdzie λ oznacza izotropowy współczynnik przewodzenia ciepła.

Ogólna specyfikacja modelu R_L podana powyżej w dalszej części ograniczona jest do izotropowych stopów z pamięcią kształtu. Wtedy tensory modułów sprężystości i rozszerzalności termicznej $\underline{\mathcal{L}}$, $\underline{\alpha}$ mają następujące składowe

$$\mathcal{L}_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \delta_{ij}\delta_{kl}(K - 2\mu/3); \quad (\alpha)_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad (3.31)$$

gdzie $\mu = E/2(1+\nu)$ oznacza moduł sprężystości postaciowej, $K = E/(3(1-2\nu))$ moduł sprężystości objętościowej, zaś ν współczynnik Poissona.

Jawna postać potencjału (3.9) definiująca tensor odkształceń fazowych $\underline{\kappa}^{eq}$ jest postulowana następująco

$$\rho g^{ph}(\underline{\sigma}) = \gamma f(y) \sigma_{ef}, \quad (3.32)$$

gdzie γ oznacza amplitudę płynięcia pseudosprężystego traktowaną jako stała materiałowa, σ_{ef} oznacza klasyczny efektywny tensor naprężenia Cauchego, $\bar{\sigma}$ dewiator tensora naprężenia

$$\sigma_{ef} \equiv [(3/2)\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ij}]^{1/2}, \quad \sigma' \equiv [\bar{\sigma}_{ij}\bar{\sigma}_{ij}]^{1/2}, \quad \sigma_{ef} = \sqrt{3/2} \sigma', \quad (3.33)$$

$$\bar{\sigma} = \operatorname{dev}(\underline{\sigma}), \quad \bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - (1/3)\sigma_{ii}\delta_{ij}, \quad \gamma = \sqrt{2/3} \eta, \quad \gamma \sigma_{ef} = \eta \sigma'.$$

Funkcja $f(y)$ określa kształt powierzchni granicznej płynięcia pseudosprężystego w przestrzeni dewiatorów $\underline{\sigma}$. W dalszej części jest ona nazywana funkcją „kształtu”, a zdefiniowana jest następująco

$$f(y) \equiv \sigma^{AM}(0, T) / \sigma^{AM}(y, T), \quad f(y=0) = 1, \quad (3.34)$$

gdzie $\sigma^{AM}(0, T)$ oznacza krytyczne naprężenie efektywne przy jakim rozpoczyna się przemiana fazowa A→M podczas czystego ścinania, zaś $\sigma^{AM}(y, T)$ oznacza krytyczne naprężenie efektywne przy jakim rozpoczyna się przemiana fazowa A→M gdy tensor naprężenia ma „kierunek” y . Funkcja $f(y)$ stanowi parametr wejściowy modelu R_L i musi być każdorazowo wyznaczona dla danego materiału SMA z badań doświadczalnych.

Wykorzystując wzór (3.32) na potencjał g^{ph} , termodynamiczną siłę napędową przemiany fazowej π^f można dla izotropowych materiałów SMA wyrazić następująco

$$\pi^f = \pi_0^f(T) - (1-2z)\phi_{it}(T) + \gamma \sigma_{ef} f(y) / \rho, \quad (3.35)$$

$$D = \pi^f(\sigma_{ef}, T, z) / 2 \bar{u}_0 = D_T \cdot (M_s^0 - T) + D_\sigma \cdot f(y) \cdot \sigma_{ef} + D_z \cdot z,$$

$$D_T = [\Delta s^* - \bar{s}_0(1-2z)] / 2 \bar{u}_0, \quad D_\sigma = \gamma / (2 \bar{u}_0 \rho), \quad D_z = [1 - M_s^0 \bar{s}_0 / \bar{u}_0],$$

$$\text{lub } D_T = (\Delta s^* - \bar{s}_0) / 2 \bar{u}_0, \quad D_\sigma = \gamma / (2 \bar{u}_0 \rho), \quad D_z = [1 - T \bar{s}_0 / \bar{u}_0].$$

Eksperymentalna znajomość funkcji $f(y)$ pozwala wyznaczać modelowe wartości krytycznych efektywnych naprężeń przemiany fazowej σ^{AM} i σ^{MA} w temperaturze T przy jakich rozpoczyna się przemiana fazowa wprost i odwrotna, gdy tensor naprężenia ma „kierunek” y

$$\pi^f(\underline{\sigma}, T, z=0) = 0 \Rightarrow \sigma_{ef} = \sigma^{AM}(y, T) = \rho(\Delta s^* - \bar{s}_0)(T - M_s^0) / [\gamma f(y)], \quad (3.36)$$

$$\pi^f(\underline{\sigma}, T, z=1) = 0 \Rightarrow \sigma_{ef} = \sigma^{MA}(y, T) = \rho(\Delta s^* + \bar{s}_0)(T - A_s^0) / [\gamma f(y)].$$

Równania te stanowią odpowiedniki klasycznych związków Clausiusa-Clapeyrona określających wrażliwość naprężeń krytycznych płynięcia pseudosprężystego na temperaturę. Argumentem funkcji kształtu jest parametr y określający kierunek tensora naprężenia w przestrzeni dewiatorów zdefiniowany następującym wzorem

$$y = 27 J_3' / (2 \sigma_{ef}^3), \quad -1 \leq y \leq 1, \quad J_3' = \text{tr}(\underline{\sigma}^3) / 3. \quad (3.37)$$

Dla przykładu wartość argumentu $y = -1$ odpowiada ścisaniu, $y = 1$ odpowiada rozciąganiu, zaś $y = 0$ oznacza czyste ścinanie.

Związek pomiędzy naprężeniem i odkształceniem przyjmuje teraz postać

$$\varepsilon_v = \sigma_m / K + 3\alpha(T - T_0), \quad \bar{\varepsilon} = \underline{\sigma} / 2\mu + \underline{\varepsilon}^T, \quad \underline{\varepsilon}^T = z \underline{\kappa}, \quad (3.38)$$

$$\bar{\varepsilon} = \text{dev}(\underline{\varepsilon}), \quad \underline{\sigma} = \text{dev}(\underline{\sigma}), \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\sigma}), \quad \varepsilon_v = \text{tr}(\underline{\varepsilon}).$$

Tensor odkształceń fazowych $\underline{\kappa}$ zgodnie z definicją (3.9) wynosi

$$\underline{\kappa} = \partial(\gamma f(y)\sigma_{ef}) / \partial \underline{\sigma} = \underline{\bar{\kappa}} + \underline{\bar{\bar{\kappa}}}, \quad (3.39)$$

$$\underline{\bar{\kappa}} = (\sqrt{3/2} \gamma) f(y) \underline{n}_\sigma, \quad \underline{\bar{\bar{\kappa}}} = 3(\sqrt{3/2} \gamma) \frac{df}{dy} [\sqrt{6}((\underline{n}_\sigma)^2 - \underline{1}/3) - y \underline{n}_\sigma],$$

$$\underline{n}_\sigma = \underline{\bar{\sigma}} / (\underline{\bar{\sigma}} \cdot \underline{\bar{\sigma}})^{1/2}.$$

Jak łatwo sprawdzić tensory $\underline{\bar{\kappa}}$ i $\underline{\bar{\bar{\kappa}}}$ są do siebie wzajemnie ortogonalne w tym sensie, że $tr(\underline{\bar{\kappa}} \cdot \underline{\bar{\bar{\kappa}}}) \equiv 0$ gdyż $tr(\underline{\bar{\kappa}} \cdot \underline{n}_\sigma) \equiv 0$. Wyniki doświadczalne wskazują, że zmiany objętościowe wynikające z termosprężystej przemiany fazowej są w pierwszym przybliżeniu do pominięcia. Zgodnie z tym przyjęta postać potencjału g^{ph} powoduje, że ślad tensora $\underline{\kappa}$ jest tożsamościowo równy zeru $tr(\underline{\kappa}) = 0$, a zatem tensor odkształceń fazowych $\underline{\varepsilon}^T$ jest tensorem dewiatorowym. Ekwiwalentne odkształcenia związane z przemianą fazową ε_{eq}^T wynoszą

$$\varepsilon_{eq}^T = [(2/3) \underline{\varepsilon}^T \cdot \underline{\varepsilon}^T]^{1/2} = z \bar{\gamma}(y), \quad \bar{\gamma}(y) = \varepsilon_{eq}^T(y, z=1) = \gamma F(y), \quad (3.40)$$

$$F(y) \equiv [(2/3) tr(\underline{\kappa}^2)]^{1/2} = [f^2 + 9(1-y^2)(df/dy)^2]^{1/2},$$

$\bar{\gamma}(y)$ oznacza amplitudę efektywnych makroskopowych odkształceń związanych z kompletną ($z=1$) przemianą fazową stowarzyszoną z kierunkiem naprężenia y .

Intensywność naprężenia Cauchego σ' wyraża się wzorem – por. (3.33)₂

$$\sigma' / 2\mu = [(\varepsilon')^2 - [3\eta z df(y)/dy]^2 (1-y^2)]^{1/2} - \eta f(y) z, \quad (3.41)$$

$$(\varepsilon')^2 = [(\sigma' / 2\mu) + \eta f(y) z]^2 + [3\eta z df(y)/dy]^2 (1-y^2),$$

$$\varepsilon' \equiv [\bar{\varepsilon}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij}]^{1/2}, \quad \varepsilon_{eq} = \sqrt{2/3} \varepsilon'.$$

Należy zwrócić uwagę, że w ogólnym przypadku $\varepsilon_{ij} / \varepsilon' \neq \sigma_{ij} / \sigma'$. Zatem tensor kierunku naprężenia \underline{n}_σ – por. (3.39)₄, jest różny od tensora kierunku odkształcenia $\underline{n}_\varepsilon$ ($\underline{n}_\varepsilon = \underline{\bar{\varepsilon}} / (\underline{\bar{\varepsilon}} \cdot \underline{\bar{\varepsilon}})^{1/2}$), chociaż są one współosiowe $\underline{n}_\sigma \underline{n}_\varepsilon = \underline{n}_\varepsilon \underline{n}_\sigma$. Tylko wtedy, gdy funkcja kształtu równa jest tożsamościowo jedynie $f(y) \equiv 1$ obowiązuje relacja $\varepsilon_{ij} / \varepsilon' = \sigma_{ij} / \sigma'$, a zatem jest wtedy również $\underline{n}_\sigma = \underline{n}_\varepsilon$ i $\sigma' = 2\mu[\varepsilon' - \eta z]$.

Występującą w równaniu kinetyki przemiany fazowej moc indukującą proces aktywnej przemiany fazowej $\dot{\tilde{\pi}}_\sigma^f$ – por. (3.24), dla materiałów izotropowych można obecnie wyrazić następująco

$$\dot{\tilde{\pi}}_\sigma^f = (1/\rho)(\underline{\bar{\kappa}} + \underline{\bar{\bar{\kappa}}}) \cdot \dot{\underline{\sigma}} - [\Delta s^* - (1-2z)\bar{s}_0] \dot{T}, \quad (3.42)$$

$$\dot{\tilde{\pi}}_\varepsilon^f = (1/\rho)(\underline{\bar{\kappa}} + \underline{\bar{\bar{\kappa}}}) \cdot \underline{\mathcal{L}} \dot{\underline{\varepsilon}} - [\Delta s^* - (1-2z)\bar{s}_0] \dot{T}.$$

Gdy $f(y) \equiv 1$ to wzór na $\dot{\tilde{\pi}}_\sigma^f$ upraszcza się do $\dot{\tilde{\pi}}_\sigma^f = (2\mu\eta/\rho)\dot{\varepsilon}' - [\Delta s^* - (1-2z)\bar{s}_0] \dot{T}$.

Wzór określający wielkość efektów cieplnych związanych z przemianą fazową i efektem piezokalorycznym przyjmuje obecnie postać – por. (3.29)

$$\dot{q}_{tr} \equiv [\gamma f(y)\sigma_{ef} + \Delta u^* - (1 - 2z)\bar{u}_0] \dot{z} - (3T\alpha / \rho) \dot{\sigma}_m. \quad (3.43)$$

Domknięty matematycznie układ prędkościowych równań konstytutywnych modelu R_L dla izotropowych materiałów SMA ważny w zakresie ich pseudosprężystego zachowania składa się ze zróżniczkowanych po czasie równań (3.38), (3.13)₂, równania (3.22) z pomocniczymi równaniami (3.35), (3.42) oraz równania (3.43).

Pełna specyfikacja modelu R_L dla izotropowych materiałów SMA wymaga dla każdego takiego materiału zidentyfikowania następującego kompletu danych na podstawie badań doświadczalnych

$$\left. \begin{array}{l} (\alpha \rightarrow \underline{\alpha}), (E, \nu \rightarrow \underline{\mathcal{L}}), \bar{u}_0, \bar{s}_0, \Delta u^*, \Delta s^*, \rho, c_p, \lambda_c \\ \gamma, f(y) \rightarrow g^{ph}(\underline{\sigma}, T) \end{array} \right\} \rightarrow \rho g(\underline{\sigma}, T, z) - \text{por. (3.11)}, \quad (3.44)$$

$$m_1, m_2, r_1, r_2, p_1, p_2 - \text{por. (3.26)}.$$

Rozdział 4. Mikroskopowe uzasadnienie przyjętej w modelu R_L makroskopowej postaci funkcji energii swobodnej

4.1 Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale przeprowadzono rozważania mikromechaniczne ciała sprężystego właściwe dla opisu efektów naprężeniowych i odkształceniowych, obserwowanych w mezoskali obserwacji w trakcie termosprężystej przemiany martenzytycznej. Przyjęto, iż ciało takie traktowane jako makroelement stopu z pamięcią kształtu z założenia spełnienia warunku pozwalające traktować je jako, tzw. reprezentatywny element objętości¹ (RVE). Obserwowane metodami mikroskopowymi cechy charakterystyczne mikrostruktur martenzytycznych dostarczają podstaw doświadczalnych dla zidentyfikowania odpowiednich zmiennych z mezoskali obserwacji i przyjęcia postulatu odnośnie postaci wyrażonych w tych zmiennych mikroskopowych równań konstytutywnych. W celu oceny energii sprężystej zmagazynowanej w makroelemencie – RVE stopu z pamięcią kształtu sformułowano problem brzegowy liniowej teorii sprężystości dla ciała o niejednorodnych własnościach sprężystych i z niejednorodnym polem odkształceń własnych. Zadawane na brzegu ciała siłowe warunki brzegowe z założenia spełniają postulat Hilla co pozwala na jednoznaczne określenie, tzw. własności efektywnych. Przy założeniu znajomości rozwiązania tego problemu, którego znalezienie w ogólnym przypadku jest ogromnie trudne, zrealizowano procedurę symbolicznych uśrednień. W procesie tym dokonano hierarchicznego podziału rozwiązania pierwotnego problemu, podobnie jak hierarchiczne są obserwowane doświadczalnie mikrostruktury martenzytyczne. Pewne rezultaty otrzymano w najbardziej ogólnym przypadku niejednorodnego ciała sprężystego, by w dalszej części ograniczyć się do ciała dwufazowego. Otrzymana w wyniku powyższej procedury postać energii sprężystej, jakkolwiek ujawnia występowanie określonych członów matematycznych, to nadal zależna jest od szeregu parametrów wewnętrznych H_i charakteryzujących mikrostruktury martenzytyczne – nie specyfikowanych tutaj w jawny sposób. W badaniach doświadczalnych nad przemianami martenzytycznymi zaobserwowano, że mikrostruktury martenzytyczne adaptują się do zmieniających się termomechanicznych warunków obciążenia, co dało podstawę fizyczną do sformułowania postulatu o dążeniu materiału do osiągnięcia termodynamicznej równowagi mikrostrukturalnej – tendencji do optymalnego dostosowywania się mikrostruktury martenzytycznej do zmiennego obciążenia. Obserwację tę wykorzystano do otrzymania bardziej użytecznej postaci wzoru na energię sprężystą makroelementu SMA, poprzez zmniejszenie ilości występujących w modelu parametrów wewnętrznych. Symboliczne obliczenie

¹ Szeroka dyskusja na temat koncepcji reprezentatywnego elementu objętości – RVE od angielskojęzycznej nazwy Representative Volume Element, jego własności, kryteriów doboru zawarta jest w monografii Nemata-Nasera i Horiego [45].

średniej energii sprężystej makroelementu SMA po jego objętości dostarcza mikromechanicznego uzasadnienia dla heurystycznego postulowania makroskopowej postaci funkcji energii swobodnej. Dostarcza również informacji do zaplanowania odpowiednich eksperymentów umożliwiających doświadczalną weryfikację czynionych na poziomie makroskopowym założeń teoretycznych.

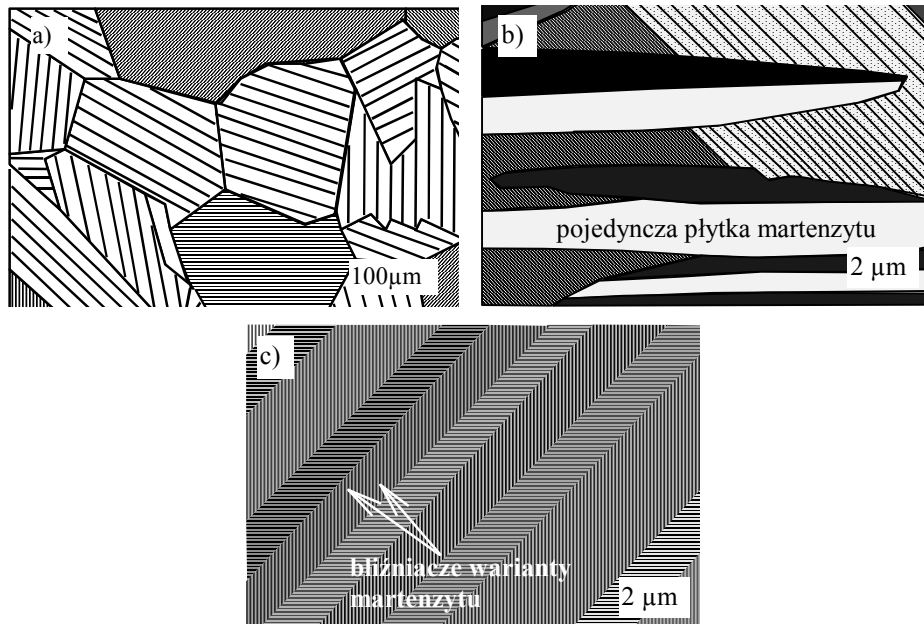
Praca przedstawiona w niniejszym rozdziale jest pracą oryginalną wykonaną w współpracy z profesorem Ranieckim. Niektóre koncepcje i cząstkowe wyniki przedstawione w niniejszym rozdziale zostały opublikowane w pracy [92].

4.2 Obserwacje mikroskopowe cech charakterystycznych mikrostruktur martenzytycznych

W chwili obecnej istnieje niezwykle bogata literatura poświęcona obserwacjom mikroskopowym struktur metalograficznych powstających w trakcie zachodzenia martenzytycznej przemiany fazowej, patrz np. Christian [18], Olson, Owen [50] lub Warlimont, Delaey [83]. Poniżej zostaną przypomniane wybrane wyniki obserwacji eksperymentalnych istotne z punktu widzenia rozważań zmierzających do oszacowania energii sprężystej zmagazynowanej w takich strukturach.

Faza martenzytyczna na ogół posiada hierarchiczną strukturę wewnętrzną. W trakcie martenzytycznej przemiany fazowej zazwyczaj początkowo pojawiają się duże płytki martenzytyczne, a następnie coraz mniejsze płytki wypełniają miejsca pomiędzy już utworzonymi płytkami, i tak aż do wyczerpania się fazy austenitycznej. W przypadku materiałów polikrystalicznych wielkość największych płytek ograniczona jest wielkością ziarna. Zazwyczaj orientacja zespołów płytek martenzytu jest różna w różnych ziarnach, co pokazano schematycznie na rysunku 4.1a. Wewnątrz ziarna w trakcie przemiany fazowej powstają złożone dwufazowe mikrostruktury austenityczno-martenzytyczne, zanim uformowana zostanie końcowa struktura martenzytyczna po zakończeniu przemiany. Przykład takiej mikrostruktury pokazano schematycznie na rysunku 4.1b. Mikrostruktury takie, w przypadku martenzytu termosprężystego, łatwo ewoluują pod wpływem zmieniającego się obciążenia termomechanicznego na skutek dużej ruchliwości granic bliźniaczych. Mówi się wtedy o *akomodacji mikrostruktury* do zmieniającego się obciążenia, zmienia się wtedy orientacja płytek martenzytu. Pojedyncza płytka martenzytu może z kolei składać się z kilku tzw. „złożonych”² wariantów martenzytu tworzących substrukturę, np. w kształcie diamentu lub klina. Z kolei złożone warianty martenzytu również mają swoją strukturę wewnętrzną. Struktura ta widoczna przy dużych powiększeniach, zazwyczaj składa się z dwóch jednorodnych tzw. krystalograficznych wariantów martenzytu, patrz rysunek 4.1c. Niektórzy badacze każdy krystalograficzny wariant martenzytu traktują jako odrębną fazę. W przypadku martenzytu nie termosprężystego, w strukturze takiej występują liczne

² W literaturze angielskojęzycznej – Compound Martensitic Variant.



Rys. 4.1 a) Schematyczny obraz polikrystalicznej mikrostruktury martenzytycznej w stopie Cu-Al. b) Schematyczny obraz formowania się grup płytek martenzytu. c) Schematyczny obraz wewnętrznej struktury pojedynczej płytki martenzytycznej. Przerysowano ze zdjęć Warlimonta i Delaeya [83].

defekty siatki krystalograficznej w postaci poślizgów plastycznych lub błędów ułożenia. Jak wskazują obserwacje doświadczalne przemiana martenzytyczna jest przemianą koherentną, tzn. pole przemieszczeń generowane na skutek tej przemiany jest polem ciągłym. Jednak na granicach rozdziału faz występują skoki odkształcenia związane z odkształceniami własnymi fazy martenzytycznej.

4.3 Opis termosprężystej przemiany martenzytycznej w języku mechaniki ośrodków ciągłych

Przypomniane obserwacje eksperymentalne dostępne w literaturze metalurgicznej wskazują, iż dla oszacowania energii sprężystej zmagazynowanej w makroelemencie – RVE stopu z pamięcią kształtu celowym jest rozważenie zachowania liniowo sprężystego ciała \mathcal{B} , w którym zadane jest niejednorodne pole modułów podatności sprężystych $\hat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ ($\hat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathcal{L}}^{-1}(\mathbf{x})$) oraz niejednorodne pole odkształceń własnych $\hat{\Gamma}(\mathbf{x})$, patrz rysunek 4.2. Z założenia pola te są takie, że zapewniają istnienie ciągłego w całej objętości ciała $\mathbf{x} \in V$ ograniczonego pola przemieszczeń $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ stanowiącego rozwiązanie problemu brzegowego statycznej równowagi mechanicznej, przy założeniu niewystępowania sił objętościowych. Żądanie ciągłości pola przemieszczeń podyktowane jest wspomnianą już,

stwierdzoną doświadczalnie, własnością koherencji przemiany martenzytycznej. W ogólnym przypadku lokalne pola własności sprężystych i odkształceń własnych są z założenia obszarami ciągle jednak mogą one doznawać skokowych zmian wartości na pewnych powierzchniach, granicach rozdziału faz \mathcal{S} . Z tego powodu pole odkształcenia $\underline{\hat{\epsilon}}(\mathbf{x})$ generowane polem przemieszczeń $\underline{\hat{u}}(\mathbf{x})$ i pole naprężenia $\underline{\hat{\sigma}}(\mathbf{x})$, stanowiące rozwiązanie problemu sprężystości dla makroelementu SMA, również mogą doznawać skokowych zmiany wartości, na powierzchniach silnych nieciągłości \mathcal{S} . Przy czym muszą być wtedy spełnione statyczne i geometryczne warunki zgodności, odpowiednio

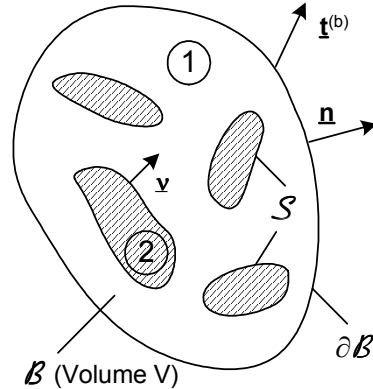
$$\llbracket \underline{\hat{\sigma}} \rrbracket \cdot \underline{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = [\underline{\hat{\sigma}}_2(\mathbf{x}) - \underline{\hat{\sigma}}_1(\mathbf{x})]_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} \cdot \underline{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{0}}, \quad (4.1)$$

$$\llbracket \underline{\hat{\epsilon}} \rrbracket = [\underline{\hat{\epsilon}}_2(\mathbf{x}) - \underline{\hat{\epsilon}}_1(\mathbf{x})]_{\mathbf{x} \in \mathcal{S}} = 0.5[\underline{\lambda}(\mathbf{x}) \otimes \underline{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) + \underline{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) \otimes \underline{\lambda}(\mathbf{x})],$$

gdzie $\underline{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ oznacza jednostkowy wektor normalny do powierzchni granicy rozdziału faz \mathcal{S} skierowany jak na rysunku 4.2, wektor $\underline{\lambda}$ określa wielkość skoku odkształceń. Naprężenia $\underline{\hat{\sigma}}_1(\mathbf{x})$, $\underline{\hat{\sigma}}_2(\mathbf{x})$ stanowią graniczne wartości pola naprężenia $\underline{\hat{\sigma}}(\mathbf{x})$ przy zbliżaniu się do punktu \mathbf{x} leżącego na powierzchni \mathcal{S} pozostając w obszarze ① oraz pozostając w obszarze ②, odpowiednio. Analogicznie jest w przypadku pól $\underline{\hat{\epsilon}}_1(\mathbf{x})$, $\underline{\hat{\epsilon}}_2(\mathbf{x})$. Warunek (4.1)₁ umożliwia spełnienie siłowych warunków równowagi, zaś warunek (4.1)₂ umożliwia wygenerowanie pola odkształceń przez ciągłe pole przemieszczeń.

Tutaj przyjmuje się, że pole odkształceń własnych $\underline{\hat{\Gamma}}(\mathbf{x})$ generowane jest wyłącznie na skutek zachodzenia martenzytycznej przemiany fazowej. W ogólnym przypadku, pole to może mieć różną naturę fizyczną. Na przykład może być rezultatem rozszerzalności termicznej lub trwałych odkształceń plastycznych powstałych na skutek procesu „treningu” materiału, prowadzącego do uzyskania dwukierunkowego efektu pamięci kształtu. Zatem prowadzone rozważania mogą znaleźć szersze zastosowanie, niż tylko do rozważanej obecnie termosprężystej przemiany martenzytycznej w zakresie pseudosprężystego zachowania stopów SMA.

Zakłada się, że mikrostruktura ciała \mathcal{B} pozostaje cały czas ustalona. Z tego powodu pola $\underline{\hat{\mathcal{M}}}(\mathbf{x})$ i $\underline{\hat{\Gamma}}(\mathbf{x})$ traktowane są jako niezmiennie. Zakłada się również, że makroelement pozostaje cały czas w pełnej równowadze termicznej i ma jednorodną



Rys. 4.2 Schematyczny obraz mikrostruktury ciała liniowo sprężystego \mathcal{B} .

temperaturę $T = const$. W związku z tym, w dalszym ciągu rozważań temperatura będzie traktowana jako ustalony parametr i w większości wzorów nie będzie jawnie występowała. W czasie rzeczywistej przemiany martenzytycznej temperatura i mikrostruktura ewoluuje w czasie. Rozpatrywany tutaj problem brzegowy liniowej teorii sprężystości można więc traktować jako pewien chwilowy „zamrożony” stan występujący podczas rzeczywistej termosprężystej martenzytycznej przemiany fazowej.

4.3.1 Problem brzegowy makroelementu o niejednorodnych własnościach sprężystych i z niejednorodnym polem odkształceń własnych

Rozważmy następujący problem równowagi mechanicznej ciała \mathcal{B} dla pól $\underline{\hat{u}}(\underline{x})$, $\underline{\hat{\epsilon}}(\underline{x})$, $\underline{\hat{\sigma}}(\underline{x})$ – problem elastostatyki bez obecności sił objętościowych

$$\nabla \cdot \underline{\hat{\sigma}} = 0, \quad \underline{\hat{\sigma}} = \underline{\hat{\sigma}}^T, \quad \underline{x} \in V, \quad (4.2)$$

z zadanymi na całym brzegu ciała \mathcal{B} siłowymi warunkami brzegowymi – patrz rysunek 4.2

$$\underline{\hat{t}}^{(b)}(\underline{x}) = \underline{\hat{n}}(\underline{x}) \underline{\hat{\sigma}}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \partial V, \quad \underline{\hat{F}} = \oint_{\partial V} \underline{\hat{t}}^{(b)}(\underline{x}) ds = \underline{\hat{\theta}}, \quad (4.3)$$

przy czym pole $\underline{\hat{t}}^{(b)}(\underline{x})$ z założenia jest polem samorównoważącym się, tak by ciało \mathcal{B} mogło pozostawać w statycznej równowadze mechanicznej.

Lokalne pole odkształceń całkowitych $\underline{\hat{\epsilon}}(\underline{x})$ związane jest z lokalnym polem naprężeń $\underline{\hat{\sigma}}(\underline{x})$ liniowym związkiem konstytutywnym

$$\underline{\hat{\epsilon}}(\underline{x}) = \underline{\hat{\mathcal{M}}}(\underline{x}) \underline{\hat{\sigma}}(\underline{x}) + \underline{\hat{\Gamma}}(\underline{x}), \quad \underline{\hat{\epsilon}}(\underline{x}) = 0.5[(\nabla \otimes \underline{\hat{u}}) + \nabla \otimes \underline{\hat{u}}]^T, \quad \underline{x} \in V, \quad (4.4)$$

$$\underline{\hat{\epsilon}}_{(e)}(\underline{x}) = \underline{\hat{\mathcal{M}}}(\underline{x}) \underline{\hat{\sigma}}(\underline{x}), \quad \underline{\hat{\epsilon}}_{(e)}(\underline{x}) = \underline{\hat{\epsilon}}(\underline{x}) - \underline{\hat{\Gamma}}(\underline{x}),$$

gdzie symbolem $\underline{\hat{\epsilon}}_{(e)}(\underline{x})$ oznaczono lokalne pole małych odkształceń sprężystych.

Z uwagi na dopuszczalność skokowych zmian wartości pola odkształceń własnych $\underline{\hat{\Gamma}}(\underline{x})$ na granicach silnych nieciągłości \mathcal{S} . Pola $\underline{\hat{\sigma}}(\underline{x})$ i $\underline{\hat{\epsilon}}(\underline{x})$ również mogą doznawać skokowych zmian, jednak z założenia spełniają one warunki zgodności statycznej i geometrycznej określone wzorami (4.1).

Niejednorodne pola własności sprężystych i odkształceń własnych są z założenia takie, że istnieje ciągle pole przemieszczeń $\underline{\hat{u}}(\underline{x})$ stanowiące rozwiązanie problemu równowagi mechanicznej, związane z polem odkształceń relacją (4.4)₂ – obowiązującą w ramach teorii małych odkształceń.

W naturalny sposób makroskopowe wartości naprężenia $\underline{\sigma}$ i odkształcenia $\underline{\epsilon}$, tj. te które występują w opisie zachowania materiału na poziomie makroskopowym, definiuje się jako średnie z pól mikroskopowych po całej objętości RVE. Korzystając z tego, że mikroskopowe pole naprężenia spełnia warunki równowagi mechanicznej i statyczne warunki zgodności można pokazać, że wartość

makroskopowego naprężenia jest całkowicie określona przez wartości wektora naprężenia zadanego na całym brzegu ciała – tutaj siłowe warunki brzegowe.

Wykorzystując dla pola $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})$ (4.2)₁, (4.1)₁, (4.3)₁ jest³

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &\equiv \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \rangle_v = \frac{1}{V} \oint_V \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) dv = \frac{1}{V} \oint_V [\nabla \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{x})]^T dv = \\ &= \frac{1}{V} \oint_{\partial V} [\hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{x})]^T ds + \frac{1}{V} \oint_{S_i} \underbrace{[\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{x})]^T}_{=0} ds = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \mathbf{x} \otimes \hat{\mathbf{t}}^{(b)}(\mathbf{x}) ds,\end{aligned}\quad (4.5)$$

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = [(\nabla \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})) \otimes \mathbf{x} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{I}^{(2)}]^T = [\nabla \cdot (\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x})]^T,$$

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_i \partial / \partial x_i, \quad \mathbf{I}^{(2)} = \nabla \otimes \mathbf{x}.$$

Podobnie wartość makroskopowego odkształcenia jest całkowicie określona przez wartości brzegowe ciągłego w całym ciele \mathcal{B} pola przemieszczeń $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, stanowiącego rozwiązanie problemu równowagi mechanicznej (4.2)÷(4.4) – ogólniej stanowiącego kinematycznie dopuszczalne pole przemieszczeń⁴

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} &\equiv \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) \rangle_v = \frac{1}{V} \oint_V \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}) dv = \frac{1}{V} \oint_V 0.5[\nabla \otimes \hat{\mathbf{u}} + (\nabla \otimes \hat{\mathbf{u}})^T] dv = \\ &= \frac{1}{V} \oint_{\partial V} 0.5[\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{u}} + (\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{u}})^T] ds = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} 0.5[\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{u}}^{(b)} + \hat{\mathbf{u}}^{(b)} \otimes \hat{\mathbf{n}}] ds,\end{aligned}\quad (4.6)$$

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \langle \hat{\boldsymbol{\omega}} \rangle_v = \frac{1}{V} \oint_V \hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}) dv = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} 0.5[\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{u}}^{(b)} - \hat{\mathbf{u}}^{(b)} \otimes \hat{\mathbf{n}}] ds.$$

Ostatni wzór, na średnią wartość spinu $\boldsymbol{\omega}$, otrzymuje się po skorzystaniu z definicji spinu, tj. $\hat{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{x}) = 0.5[(\nabla \otimes \hat{\mathbf{u}}) - \nabla \otimes \hat{\mathbf{u}}]^T$.

Korzystając ze wzoru na wartość średnią pola naprężenia można wyrazić warunki brzegowe (4.3) następująco

$$\hat{\mathbf{t}}^{(b)}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{t}}^{(u)}(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{t}}^f(\mathbf{x}), \quad \hat{\mathbf{t}}^{(u)}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}, \quad (4.7)$$

$$\langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}^f(\mathbf{x}) \rangle_v = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \mathbf{x} \otimes \hat{\mathbf{t}}^f(\mathbf{x}) ds = \mathbf{0},$$

³ Przy wyprowadzaniu wzoru (4.5) skorzystano z twierdzenia Gaussa w postaci

$$\oint_V \nabla \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) dv = \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) ds + \oint_{S_i} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \|\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\| ds, \quad \|\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x})\| \equiv \hat{\mathbf{A}}_2(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{A}}_1(\mathbf{x}).$$

⁴ Przy wyprowadzaniu wzorów (4.6) skorzystano z twierdzenia Greena-Gaussa w postaci

$$\oint_V \nabla \otimes \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) dv = \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \otimes \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) ds.$$

gdzie $\tilde{\mathbf{t}}^{(u)}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\sigma}$ nazywane są jednorodnymi siłowymi warunkami brzegowymi związanymi ze średnią wartością pola naprężenia, $\boldsymbol{\sigma}$, zaś $\tilde{\mathbf{t}}^f(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{t}}^{(b)}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\boldsymbol{\sigma}$ oznacza fluktuację wektora naprężenia na brzegu ciała \mathcal{B} . Analogicznie przemieszczenia na brzegu ciała \mathcal{B} , stanowiące odpowiedź materiału na zadawane na brzegu obciążenia siłowe można przedstawić za pomocą wartości średniej odkształcenia następująco

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}}^{(b)}(\mathbf{x}) &= \underline{\mathbf{u}}^{(u)}(\mathbf{x}) + \underline{\mathbf{u}}^f(\mathbf{x}), \quad \underline{\mathbf{u}}^{(u)}(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{h}}\mathbf{x} = (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega})\mathbf{x}, \\ \underline{\mathbf{h}} &= \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{u}}^{(b)} ds, \quad \langle \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^f \rangle_V = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} 0.5[\hat{\mathbf{n}} \otimes \underline{\mathbf{u}}^f + \underline{\mathbf{u}}^f \otimes \hat{\mathbf{n}}] ds = \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.8)$$

gdzie $\underline{\mathbf{u}}^{(u)}(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{h}}\mathbf{x} = (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega})\mathbf{x}$ nazywane są liniowymi przemieszczeniowymi warunkami brzegowymi związanymi ze średnimi wartościami pola odkształcenia i pola spinu $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\omega}$, zaś $\underline{\mathbf{u}}^f(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{u}}^{(b)}(\mathbf{x}) - \underline{\mathbf{h}}\mathbf{x}$ oznacza fluktuację wektora przemieszczenia na brzegu ciała \mathcal{B} .

Pracę całkowitą wykonaną nad ciałem \mathcal{B} na skutek zadanych, stałych w czasie, brzegowych obciążeń siłowych $\tilde{\mathbf{t}}^{(b)}(\mathbf{x})$ na odpowiadających im brzegowych przemieszczeniach $\underline{\mathbf{u}}^{(b)}(\mathbf{x})$ można wyrazić wzorem⁵

$$\begin{aligned} \rho W^{(Tot)} &= \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_V = \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_V \cdot \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_V + \rho W^f, \\ \rho W^f &= \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \tilde{\mathbf{t}}^f \cdot \underline{\mathbf{u}}^f ds, \end{aligned} \quad (4.9)$$

gdzie ρW^f oznacza pracę pola fluktuacji wektora naprężenia – tutaj traktowanego jako kontrolowany parametr obciążenia, na odpowiadającym mu polu fluktuacji przemieszczenia stanowiącym odpowiedź ciała \mathcal{B} . Wzór (4.9) obowiązuje bez względu na prawo konstytutywne jakiemu podlega materiał, z którego wykonane jest ciało \mathcal{B} . Jak z niego wynika, praca $\rho W^{(Tot)}$ zależy nie tylko od wartości średnich pól naprężenia i odkształcenia – makroskopowych parametrów stanu, ale również od niezależnej od tych parametrów pracy fluktuacji ρW^f . Sytuacja taka stwarza problem, gdyż uniemożliwia wprowadzenie w sposób jednoznaczny, tzw. efektywnych własności sprężystych materiału. Oryginalne rozwiązanie tego problemu zaproponował Hill [26]. Postulował on aby, przy rozpatrywaniu problemów mikromechaniki zmierzających do wyznaczenia własności efektywnych materiału, rozważać tylko takie warunki brzegowe nałożone na ciało \mathcal{B} , dla których spełniona jest, tzw. zasada kompatybilności energii mechanicznej wyrażona warunkiem

⁵ Wyprowadzenie wzoru (4.9) oraz nieco szersze omówienie konsekwencji postulatu (4.10) znajduje się w Aneksie 4.2.

$$\rho W^f = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \widehat{\underline{\mathbf{t}}}^f \cdot \widehat{\underline{\mathbf{u}}}^f ds = \underline{\mathbf{0}} \Leftrightarrow \rho W^{(Tot)} = \langle \underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \rangle_V = \langle \underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}} \rangle_V \cdot \langle \underline{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \rangle_V. \quad (4.10)$$

Zasada kompatybilności energii mechanicznej nazywana również postulatem Hilla nakłada więzy na pola fluktuacji warunków brzegowych. Gdy warunki brzegowe spełniają postulat Hilla to praca całkowita wykonana nad ciałem \mathcal{B} , jak również energia sprężysta zmagazynowana w ciele \mathcal{B} – w przypadku ciała liniowo sprężystego określona wzorem $2\rho W = \langle \underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \underline{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{(e)} \rangle_V$, zależy w sposób parametryczny od średniego naprężenia $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ umożliwiając wprowadzenie pojęcia sprężystych własności efektywnych w sposób jednoznaczny.

4.3.2 Energia sprężysta makroelementu (RVE) w obecności odkształceń własnych

W niniejszej sekcji zakłada się, że znane są pola $\underline{\widehat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x})$, $\underline{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{x})$, $\underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x})$ stanowiące rozwiązanie problemu sprężystości (4.2), (4.3), (4.4). Z uwagi na to, że problem ten jest problemem liniowej teorii sprężystości. Jego rozwiązanie można przedstawić jako addytywną sumę rozwiązań innych równoważnych problemów sprężystości. Tutaj dokonano specjalnego podziału pierwotnego problemu na dwa równoważne problemy, rozwiązanie pierwszego opisuje efekty związane z „zewnętrznymi” warunkami brzegowymi zaś rozwiązanie drugiego opisuje efekty pojawiające się na skutek istnienia pola odkształceń własnych z zerowymi siłowymi warunkami brzegowymi. Pola $\underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x})$ i $\underline{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{x})$ stanowiące rozwiązanie pierwotnego problemu można przedstawić następująco

$$\underline{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{x}) = \underline{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(ex)}(\mathbf{x}) + \underline{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(in)}(\mathbf{x}), \quad \underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}(\mathbf{x}) = \underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}^{(ex)}(\mathbf{x}) + \underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}^{(in)}(\mathbf{x}). \quad (4.11)$$

Para $I = \{\underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}^{(ex)}, \underline{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(ex)}\}$ z założenia spełnia warunki równowagi mechanicznej, liniowe prawo Hooke'a bez odkształceń własnych i zewnętrzne siłowe warunki brzegowe pierwotnego problemu

$$\underline{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(ex)}(\mathbf{x}) = \underline{\widehat{\mathcal{M}}}(\mathbf{x}) \underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}^{(ex)}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in V, \quad (4.12)$$

$$\underline{\widehat{\mathbf{t}}}^{(b)}(\mathbf{x}) = \underline{\widehat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}) \underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}} + \underline{\widehat{\mathbf{t}}}^f(\mathbf{x}) = \underline{\widehat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}) \underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}^{(ex)}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial V,$$

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(ex)} \equiv \langle \underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}^{(ex)} \rangle_V = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \underline{\widehat{\mathbf{x}}} \otimes \underline{\widehat{\mathbf{t}}}^{(b)}(\mathbf{x}) ds = \underline{\boldsymbol{\sigma}}.$$

Para $II = \{\underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}^{(in)}, \underline{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(in)}\}$ z założenia spełnia warunki równowagi mechanicznej, liniowe prawo Hooke'a z odkształceniami własnymi i jednorodne zerowe siłowe warunki brzegowe

$$\underline{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(in)}(\mathbf{x}) = \underline{\widehat{\mathcal{M}}}(\mathbf{x}) \underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}^{(in)}(\mathbf{x}) + \underline{\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in V, \quad (4.13)$$

$$\underline{\mathbf{0}} = \underline{\widehat{\mathbf{t}}}^{(b)(in)}(\mathbf{x}) = \underline{\widehat{\mathbf{n}}}(\mathbf{x}) \underline{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}}^{(in)}(\mathbf{x}) = \underline{\widehat{\mathbf{t}}}^f(in)(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial V,$$

$$\underline{\sigma}^{(in)} \equiv \langle \widehat{\underline{\sigma}}^{(in)}(\mathbf{x}) \rangle_V = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \underline{\mathbf{x}} \otimes \widehat{\underline{\mathbf{t}}}^{(b)(in)}(\mathbf{x}) ds = \underline{\mathbf{0}}.$$

Zatem samorównoważące się, rezydualne – w tym sensie, że jego średnia wartość po całej objętości ciała \mathcal{B} jest zawsze równa zero, pole naprężeń wewnętrznych $\widehat{\underline{\sigma}}^{(in)}$ jest generowane wyłącznie przez zadany rozkład odkształceń własnych $\widehat{\underline{\Gamma}}(\mathbf{x})$. Jest ono tożsamościowo równe zero jeśli pole odkształceń własnych nie występuje ($\widehat{\underline{\Gamma}}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \widehat{\underline{\sigma}}^{(in)}(\mathbf{x}) = 0$) bądź, jeśli pole $\widehat{\underline{\Gamma}}(\mathbf{x})$ jest polem kompatybilnym. Wtedy bowiem istnieje ciągłe pole przemieszczeń generujące pole odkształcenia $\widehat{\underline{\varepsilon}}^{(in)}(\mathbf{x}) = \widehat{\underline{\Gamma}}(\mathbf{x})$.

Z założenia pole obciążeń zewnętrznych $\widehat{\underline{\mathbf{t}}}^{(b)}(\mathbf{x})$ jest takie, że dla pary pól zewnętrznych $I = (\underline{\sigma}^{(ex)}, \underline{\varepsilon}^{(ex)})$ spełniona jest zasada kompatybilności energii – postulat Hilla

$$\frac{1}{V} \oint_{\partial V} \widehat{\underline{\mathbf{t}}}^{f(ex)} \otimes \underline{\mathbf{u}}^{f(ex)} ds = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \widehat{\underline{\mathbf{t}}}^f \otimes \underline{\mathbf{u}}^{f(ex)} ds \equiv \underline{\mathbf{0}}. \quad (4.14)$$

Na skutek tego założenia energia sprężysta zmagazynowana w ciele \mathcal{B} zależy wyłącznie od wartości średnich zewnętrznych pól naprężenia i odkształcenia. Pozwala to wprowadzić dla pól zewnętrznych pojęcie efektywnych modułów sprężystości – por. (4.12)₁

$$\underline{\varepsilon}_E \equiv \langle \widehat{\underline{\mathcal{M}}}(\mathbf{x}) \widehat{\underline{\sigma}}^{(ex)}(\mathbf{x}) \rangle_V = \underline{\mathcal{M}}^{ef} \underline{\sigma}^{(ex)} = \underline{\mathcal{M}}^{ef} \underline{\sigma}, \quad (4.15)$$

$$\underline{\varepsilon}_E \equiv \langle \widehat{\underline{\varepsilon}}^{(ex)}(\mathbf{x}) \rangle_V,$$

gdzie $\underline{\mathcal{M}}^{ef}$ oznacza tensor efektywnych modułów podatności sprężystej $\underline{\mathcal{M}}^{ef} = (\underline{\mathcal{L}}^{ef})^{-1}$.

Uśredniając (4.11)₁ i (4.13)₁ po całej objętości ciała \mathcal{B} otrzymuje się zależności

$$\underline{\varepsilon}_E = \underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_T, \quad \underline{\varepsilon}_T \equiv \langle \widehat{\underline{\varepsilon}}^{(in)}(\mathbf{x}) \rangle_V, \quad (4.16)$$

$$\underline{\varepsilon}_T \equiv \langle \widehat{\underline{\mathcal{M}}}(\mathbf{x}) \widehat{\underline{\sigma}}^{(in)}(\mathbf{x}) \rangle_V + \underline{\Gamma}, \quad \underline{\Gamma} \equiv \langle \widehat{\underline{\Gamma}}(\mathbf{x}) \rangle_V.$$

Jak wynika z (4.16) makroskopowe odkształcenie związane z polem odkształceń własnych $\underline{\varepsilon}_T$ równe jest średniej wartości z pola odkształceń własnych $\underline{\Gamma}$ ($\underline{\varepsilon}_T = \underline{\Gamma}$), wtedy gdy pole $\widehat{\underline{\Gamma}}(\mathbf{x})$ jest polem kompatybilnym, bowiem w takim wypadku $\widehat{\underline{\sigma}}^{(in)}(\mathbf{x}) = \underline{\mathbf{0}}$ lub wtedy gdy pole modułów podatności jest polem jednorodnym ($\widehat{\underline{\mathcal{M}}}(\mathbf{x}) = \underline{\mathcal{M}} = const$), bowiem w takim wypadku $\langle \widehat{\underline{\mathcal{M}}}(\mathbf{x}) \widehat{\underline{\sigma}}^{(in)} \rangle_V = \underline{\mathcal{M}} \langle \widehat{\underline{\sigma}}^{(in)} \rangle_V = \underline{\mathbf{0}}$.

Uśredniając (4.4)₃, (4.4)₄ i korzystając z (4.16) otrzymuje się następujące zależności

$$\underline{\varepsilon}_{(e)} \equiv \langle \widehat{\underline{\mathcal{M}}} \widehat{\underline{\sigma}} \rangle_V \equiv \langle \widehat{\underline{\mathcal{M}}} \widehat{\underline{\sigma}}^{(ex)} + \widehat{\underline{\mathcal{M}}} \widehat{\underline{\sigma}}^{(in)} \rangle_V = \underline{\varepsilon}_E + \langle \widehat{\underline{\mathcal{M}}} \widehat{\underline{\sigma}}^{(in)} \rangle_V, \quad (4.17)$$

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(e)} \equiv \langle \widehat{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{(e)} \rangle_V = \langle \widehat{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{x}) - \widehat{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}}(\mathbf{x}) \rangle_V = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underline{\boldsymbol{\Gamma}} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_E + \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T - \underline{\boldsymbol{\Gamma}}.$$

Energię sprężystą zmagazynowaną w ciele \mathcal{B} (RVE) można wyrazić następująco, wykorzystując podział (4.11) na pola zewnętrzne i wewnętrzne

$$\begin{aligned} 2\rho W &= \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(e)} \rangle_V = \langle \widehat{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{(e)} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{(e)} \rangle_V = \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{M}}}\underline{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_V = \\ &= \langle (\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(ex)} + \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)}) \cdot (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ex)} + \widehat{\underline{\boldsymbol{M}}}\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)}) \rangle_V = \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(ex)} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ex)} \rangle_V + \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ex)} \rangle_V + \\ &+ \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(ex)} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{M}}}\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \rangle_V + \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{M}}}\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \rangle_V = \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(ex)} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ex)} \rangle_V + \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{M}}}\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \rangle_V. \end{aligned} \quad (4.18)$$

przy czym informację o zerowaniu się wyrażenia $\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ex)} \rangle_V$ uzyskuje się po zastosowaniu wzoru (4.9)₁ do pól $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)}$, $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ex)}$ oraz wykorzystaniu warunku (4.13)₂

$$\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ex)} \rangle_V = \underbrace{\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \rangle_V}_{=0} \cdot \langle \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ex)} \rangle_V + \underbrace{\int_{\partial V} \underline{\boldsymbol{t}}^{f(in)} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^{f(ex)} ds}_{=0} = 0, \quad (4.19)$$

zaś zerowanie się członu $\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(ex)} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{M}}}\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \rangle_V$ wynika z założonej symetrii tensora $\widehat{\underline{\boldsymbol{M}}}$, (4.12)₁ i (4.19)

$$\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(ex)} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{M}}}\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \rangle_V = \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{M}}}\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(ex)} \rangle_V = \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ex)} \rangle_V = 0. \quad (4.20)$$

Zatem całkowitą energię sprężystą zmagazynowaną w makroelemencie \mathcal{B} można przedstawić w postaci – por (4.18)

$$W = W^{(ex)}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_E) + W^{(in)}, \quad (4.21)$$

przy czym funkcję $W^{(ex)}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_E) = W^{(ex)}(\underline{\boldsymbol{\sigma}})$ można wyrazić w równoważnych formach

$$\begin{aligned} 2\rho W^{(ex)}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_E) &\equiv \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(ex)} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ex)} \rangle_V = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(ex)} = \\ &= (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T) \cdot \underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^{ef} (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T) = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{M}}}^{ef} \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_E \cdot \underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^{ef} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_E \geq 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Energia ta pochodzi tylko od obciążeń zewnętrznych i pełni funkcję potencjału dla „makroskopowego” naprężenia – por. (4.15)

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \rho \partial W^{(ex)}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_E) / \partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_E = \rho \partial W^{(ex)}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T) / \partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (4.23)$$

Energia $W^{(in)}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)})$ zdefiniowana jak poniżej

$$\rho W^{(in)} \equiv 0.5 \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{M}}}\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \rangle_V = -0.5 \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}} \rangle_V \geq 0, \quad (4.24)$$

zależna jest tylko od naprężeń wewnętrznych i znika tylko wtedy gdy pole $\widehat{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}}(\mathbf{x})$ jest polem kompatybilnym. Z tego powodu często nazywana jest energią niekompatybilności pola odkształceń własnych. Ostatnia równość w (4.24) wynika z następujących zależności – por. (4.13)

$$\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(in)} \rangle_V = \underbrace{\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \rangle_V}_{=0} \cdot \langle \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(in)} \rangle_V + \underbrace{\int_{\partial V} \underline{\boldsymbol{t}}^{f(in)} \cdot \underline{\boldsymbol{u}}^{f(in)} ds}_{=0} = 0, \quad (4.25)$$

$$\langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(in)} \rangle_V = \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{M}}}\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \rangle_V + \langle \underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\boldsymbol{\Gamma}}} \rangle_V = 0.$$

W istocie energia $W^{(in)}$ nie zależy od średniej wartości pola odkształceń własnych $\underline{\Gamma}$ lecz od jego fluktuacji $\underline{\Gamma}^f(\mathbf{x}) = \widehat{\underline{\Gamma}}(\mathbf{x}) - \underline{\Gamma}$ gdyż

$$-2\rho W^{(in)} = \langle \widehat{\underline{\sigma}}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\Gamma}} \rangle_V = \underbrace{\langle \widehat{\underline{\sigma}}^{(in)} \cdot \underline{\Gamma} \rangle_V}_{=0} + \langle \widehat{\underline{\sigma}}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\Gamma}}^f \rangle_V = \langle \widehat{\underline{\sigma}}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\Gamma}}^f \rangle_V. \quad (4.26)$$

4.3.3 Problem brzegowy i energia sprężysta makroelementu dwufazowego

W niniejszej sekcji zakłada się, że ciało \mathcal{B} stanowi ośrodek dwufazowy, to jest że całą objętość ciała \mathcal{B} można podzielić na dwa podobszary o objętościach V_1, V_2 ($V_1 + V_2 = V$). Indeks $\alpha = 1$ będzie w dalszym ciągu oznaczana faza macierzysta – austenit, zaś indeksem $\alpha = 2$ faza wynikowa – martenzyt. Wielkość tych obszarów scharakteryzowana jest udziałami objętościowymi $z_\alpha = V_\alpha / V$ ($z_1 + z_2 = 1$). Poza założeniem, że w RVE mogą być rozróżnione obszary zajmowane przez poszczególne fazy, mikrostruktura RVE (kształt wtrąceń jednej fazy w drugiej, ich wzajemne rozłożenie i inne parametry charakteryzujące mikrostrukturę) pozostaje niewyspecyfikowana. Mikrostruktura ta z założenia scharakteryzowana jest zestawem parametrów wewnętrznych o charakterze deformacyjnym H_i , $i = 1..N$, które nie będą tu jawnie specyfikowane. Zakłada się, że pola własności sprężystych i odkształceń własnych każdej fazy mogą być niejednorodne. Wtedy pola te w całym ciele \mathcal{B} można przedstawić następująco

$$\widehat{\underline{\mathcal{M}}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \widehat{\underline{\mathcal{M}}}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in V_1 \\ \widehat{\underline{\mathcal{M}}}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in V_2 \end{cases}, \quad \widehat{\underline{\Gamma}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \widehat{\underline{\Gamma}}_1(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in V_1 \\ \widehat{\underline{\Gamma}}_2(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in V_2 \end{cases}. \quad (4.27)$$

Zakłada się, że pole odkształceń własnych $\widehat{\underline{\Gamma}}(\mathbf{x})$ doznaje skokowych zmian na granicach rozdziału faz \mathcal{S} – patrz rysunek 4.2, zaś pole własności sprężystych może ale nie musi doznawać skokowych zmian na tych powierzchniach.

W dalszym ciągu oprócz pojęcia średniej pola tensorowego $\underline{\underline{A}}(\mathbf{x})$ po całej objętości V ciała \mathcal{B} oznaczonej symbolem $\underline{\underline{A}} = \langle \widehat{\underline{\underline{A}}}(\mathbf{x}) \rangle_V$ i pojęcia fluktuacji tego pola $\widehat{\underline{\underline{A}}}^f(\mathbf{x})$ wokół tej wartości średniej $\underline{\underline{A}}$ określonych wzorami

$$\underline{\underline{A}} = \langle \widehat{\underline{\underline{A}}}(\mathbf{x}) \rangle_V \equiv \frac{1}{V} \oint_V \widehat{\underline{\underline{A}}}(\mathbf{x}) dv, \quad \widehat{\underline{\underline{A}}}^f(\mathbf{x}) \equiv \widehat{\underline{\underline{A}}}(\mathbf{x}) - \underline{\underline{A}}, \quad \langle \widehat{\underline{\underline{A}}}^f(\mathbf{x}) \rangle_V = 0, \quad (4.28)$$

dla ciała dwufazowego celowym jest wprowadzenie pojęcia średniej fazowej $\underline{\underline{A}}_{(\alpha)}$ pola tensorowego $\widehat{\underline{\underline{A}}}(\mathbf{x})$ i fluktuacji tego pola $\widehat{\underline{\underline{A}}}^f_{(\alpha)}(\mathbf{x})$ wokół średniej fazowej $\underline{\underline{A}}_{(\alpha)}$

$$\underline{\underline{A}}_{(\alpha)} = \langle \widehat{\underline{\underline{A}}}(\mathbf{x}) \rangle_{V_\alpha} \equiv \frac{1}{V_\alpha} \oint_{V_\alpha} \widehat{\underline{\underline{A}}}(\mathbf{x}) dv, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (4.29)$$

$$\widehat{\mathbf{A}}_{(\alpha)}^f(\mathbf{x}) \equiv \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) - \langle \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \rangle_{V_\alpha} = \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}_{(\alpha)} \quad \mathbf{x} \in V_\alpha, \quad \langle \widehat{\mathbf{A}}_{(\alpha)}^f(\mathbf{x}) \rangle_{V_\alpha} = 0.$$

Istnieją proste związki pomiędzy średnią i fluktuacją po całej objętości ciała \mathcal{B} oraz średnimi i fluktuacjami fazowymi obliczonymi po objętościach poszczególnych faz

$$\mathbf{A} = \langle \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \rangle_V = z_1 \langle \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \rangle_{V_1} + z_2 \langle \widehat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) \rangle_{V_2} = z_1 \mathbf{A}_{(1)} + z_2 \mathbf{A}_{(2)}, \quad (4.30)$$

$$\widehat{\mathbf{A}}^f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \widehat{\mathbf{A}}_{(1)}^f(\mathbf{x}) - z_2 \Delta \mathbf{A} & \mathbf{x} \in V_1 \\ \widehat{\mathbf{A}}_{(2)}^f(\mathbf{x}) + z_1 \Delta \mathbf{A} & \mathbf{x} \in V_2 \end{cases}.$$

Łatwo można pokazać, że

$$\mathbf{A}_{(1)} = \mathbf{A} - z_2 \Delta \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}_{(2)} = \mathbf{A} + z_1 \Delta \mathbf{A}, \quad \Delta \mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_{(2)} - \mathbf{A}_{(1)}. \quad (4.31)$$

Gdy średnia po całym ciele \mathcal{B} znika to

$$\mathbf{A}_{(1)} = -z_2 \Delta \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}_{(2)} = z_1 \Delta \mathbf{A}. \quad (4.32)$$

Wykorzystanie wprowadzonych powyżej pojęć średnich i fluktuacji fazowych oraz ich związków ze średnimi i fluktuacjami po całej objętości ciała \mathcal{B} – por. (4.29) (4.31), do pola odkształceń własnych $\widehat{\Gamma}(\mathbf{x})$ prowadzi do następujących wzorów

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma} &= z_1 \underline{\Gamma}_{(1)} + z_2 \underline{\Gamma}_{(2)}, \quad \widehat{\Gamma}^f(\mathbf{x}) = \begin{cases} \widehat{\Gamma}_{(1)}^f(\mathbf{x}) - z_2 \Delta \underline{\Gamma} & \mathbf{x} \in V_1 \\ \widehat{\Gamma}_{(2)}^f(\mathbf{x}) + z_1 \Delta \underline{\Gamma} & \mathbf{x} \in V_2 \end{cases}, \\ \Delta \underline{\Gamma} &= \underline{\Gamma}_{(2)} - \underline{\Gamma}_{(1)} \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\widehat{\Gamma}^f(\mathbf{x}) = \widehat{\Gamma}(\mathbf{x}) - \langle \widehat{\Gamma} \rangle_V, \quad \widehat{\Gamma}_{(\alpha)}^f(\mathbf{x}) = \widehat{\Gamma}(\mathbf{x}) - \langle \widehat{\Gamma} \rangle_{V_\alpha},$$

$$\langle \widehat{\Gamma}^f(\mathbf{x}) \rangle_V = \mathbf{0}, \quad \langle \widehat{\Gamma}_{(\alpha)}^f(\mathbf{x}) \rangle_{V_\alpha} = \mathbf{0}.$$

Aby oszacować wartość energii $\mathcal{W}^{(in)}$ należy znać samorównoważące się, rezydualne ($\langle \widehat{\sigma}^{(in)}(\mathbf{x}) \rangle_V = \mathbf{0}$) pole $\widehat{\sigma}^{(in)}(\mathbf{x})$ powstające na skutek geometrycznej niezgodności pola odkształceń własnych $\widehat{\Gamma}(\mathbf{x})$. Pierwotny problem na naprężenia wewnętrzne dla $\widehat{\sigma}^{(in)}$ można zapisać korzystając ze wzorów na średnie i odchyłki fazowe pola odkształceń własnych – por. (4.13)

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(1)}^{(in)}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{(1)}^{(in)}(\mathbf{x}) + \widehat{\Gamma}_{(1)}^f(\mathbf{x}) + \underline{\Gamma}_1 \quad \mathbf{x} \in V_1, \quad (4.34)$$

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(2)}^{(in)}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{(2)}^{(in)}(\mathbf{x}) + \widehat{\Gamma}_{(2)}^f(\mathbf{x}) + \Delta \underline{\Gamma} + \underline{\Gamma}_1 \quad \mathbf{x} \in V_2.$$

Problem (4.34), na pole naprężeń wewnętrznych $\widehat{\sigma}^{(in)}$, można podzielić na dwa równoważne problemy A i B na pola naprężeń $\widehat{\sigma}_A^{(in)}$ i $\widehat{\sigma}_B^{(in)}$

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(in)} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_A^{(in)} + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_B^{(in)}, \quad \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_A^{(in)} + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_B^{(in)}. \quad (4.35)$$

W problemie A występują odkształcenia własne obszarami stałe

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{A(\alpha)}^{(in)}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{A(\alpha)}^{(in)}(\mathbf{x}) + (\underline{\Gamma}_1 + j_\alpha \Delta \underline{\Gamma}), \quad (4.36)$$

$$j_1 = 0 \quad \mathbf{x} \in V_1, \quad j_2 = 1 \quad \mathbf{x} \in V_2,$$

$$\widehat{\mathbf{t}}_A^{(b)(in)}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_A^{(in)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in \partial V.$$

W problemie B w każdej z faz występują tylko fluktuacje fazowe $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(\alpha)}^f(\mathbf{x})$ zadanego pierwotnie pola odkształceń własnych

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{B(\alpha)}^{(in)}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{B(\alpha)}^{(in)}(\mathbf{x}) + \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(\alpha)}^f(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in V_\alpha, \quad (4.37)$$

$$\widehat{\mathbf{t}}_B^{(b)(in)}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_B^{(in)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{x} \in \partial V.$$

Pola fluktuacji fazowych $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}_{(\alpha)}^f(\mathbf{x})$ są niezależne od $\underline{\boldsymbol{\Gamma}}_1$ i $\Delta \underline{\boldsymbol{\Gamma}}$.

Pola naprężeń stanowiące rozwiązania problemów pomocniczych A i B stanowią pola rezydualne $\langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_A^{(in)}(\mathbf{x}) \rangle_V = \mathbf{0}$, $\langle \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_B^{(in)}(\mathbf{x}) \rangle_V = \mathbf{0}$, zatem ich średnie fazowe zgodnie ze wzorami (4.32) można wyrazić następująco

$$\boldsymbol{\sigma}_{A(1)}^{(in)} = z_2 \underline{\boldsymbol{\Sigma}}^A, \quad \boldsymbol{\sigma}_{A(2)}^{(in)} = -z_1 \underline{\boldsymbol{\Sigma}}^A, \quad \underline{\boldsymbol{\Sigma}}^A \equiv -(\boldsymbol{\sigma}_{A(2)}^{(in)} - \boldsymbol{\sigma}_{A(1)}^{(in)}), \quad (4.38)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{B(1)}^{(in)} = z_2 \underline{\boldsymbol{\Sigma}}^B, \quad \boldsymbol{\sigma}_{B(2)}^{(in)} = -z_1 \underline{\boldsymbol{\Sigma}}^B, \quad \underline{\boldsymbol{\Sigma}}^B \equiv -(\boldsymbol{\sigma}_{B(2)}^{(in)} - \boldsymbol{\sigma}_{B(1)}^{(in)}).$$

Można zauważyć, że jeśli pole naprężeń $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{A(\alpha)}^{(in)}(\mathbf{x})$ spełnia równania równowagi mechanicznej przy zerowych siłowych warunkach brzegowych i równaniach konstytutywnych (4.36), to wtedy to samo pole będzie spełniać równia równowagi przy zerowych siłowych warunkach brzegowych i równaniach konstytutywnych dla pola odkształcenia $\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{A(\alpha)}^{0(in)}(\mathbf{x}) = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{A(\alpha)}^{(in)}(\mathbf{x}) - \underline{\boldsymbol{\Gamma}}_1 = \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{A(\alpha)}^{(in)}(\mathbf{x}) + j_\alpha \Delta \underline{\boldsymbol{\Gamma}}$. Zatem, aby znaleźć pole naprężenia $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{A(\alpha)}^{(in)}(\mathbf{x})$ zamiast rozwiązywać problem (4.36) dla pary pól $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{A(\alpha)}^{(in)}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{A(\alpha)}^{(in)}(\mathbf{x})$ wystarczy rozwiązać problem brzegowy dla pary pól $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{A(\alpha)}^{(in)}(\mathbf{x}) \leftrightarrow \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{A(\alpha)}^{0(in)}(\mathbf{x})$. Jednakże rozwiązanie $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{A(\alpha)}^{(in)}(\mathbf{x})$ dla tej ostatniej pary nie zależy od $\underline{\boldsymbol{\Gamma}}_1$. Ponieważ to samo pole naprężenia stanowi rozwiązanie problemu (4.36) więc można stąd natychmiast wywnioskować, że rozwiązanie problemu A nie zależy od $\underline{\boldsymbol{\Gamma}}_1$, zaś musi być liniową funkcją $\Delta \underline{\boldsymbol{\Gamma}}$. Rozwiązanie to można symbolicznie wyrazić następująco

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{A(1)}^{(in)}(\mathbf{x}) = z_2 \widehat{\mathbf{H}}^A(\mathbf{x}) \Delta \underline{\boldsymbol{\Gamma}}, \quad \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{A(2)}^{(in)}(\mathbf{x}) = -z_1 \widehat{\mathbf{H}}^A(\mathbf{x}) \Delta \underline{\boldsymbol{\Gamma}}, \quad (4.39)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{A(1)}^{(in)} = z_2 \underline{\mathbf{H}}^A \Delta \underline{\boldsymbol{\Gamma}}, \quad \boldsymbol{\sigma}_{A(2)}^{(in)} = -z_1 \underline{\mathbf{H}}^A \Delta \underline{\boldsymbol{\Gamma}},$$

gdzie $\underline{\boldsymbol{\Sigma}}^A = \underline{\mathbf{H}}^A \Delta \underline{\boldsymbol{\Gamma}}$, zaś $\widehat{\mathbf{H}}^A(\mathbf{x})$ można utożsamić z tensorem koncentracji naprężeń Hilla – por. Hill [26].

4.3.4 Struktura energii $W^{(in)}$ zmagazynowanej na skutek niekompatybilności pola odkształceń własnych

Energię $W^{(in)}$ wynikającą z niekompatybilności pola odkształceń własnych można obecnie przedstawić następująco – por. (4.24) i (4.26)

$$W^{(in)} = -\frac{1}{2\rho} \langle \underline{\sigma}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\Gamma}}^f \rangle_V = W_A^{(in)} + W_{AB}^{(in)} + W_B^{(in)} \geq 0. \quad (4.40)$$

Korzystając z podziału (4.35) i zależności (4.33) otrzymuje się

$$W^{(in)} = -\frac{1}{2\rho} \cdot z_1 \langle (\underline{\sigma}_{A(1)}^{(in)} + \underline{\sigma}_{B(1)}^{(in)}) \cdot (\widehat{\underline{\Gamma}}_{(1)}^f - z_2 \Delta \underline{\Gamma}) \rangle_{V_1} + \\ -\frac{1}{2\rho} \cdot z_2 \langle (\underline{\sigma}_{A(2)}^{(in)} + \underline{\sigma}_{B(2)}^{(in)}) \cdot (\widehat{\underline{\Gamma}}_{(2)}^f + z_1 \Delta \underline{\Gamma}) \rangle_{V_2}.$$

Zawsze nieujemna energia $W_A^{(in)}$, zdefiniowana poniżej, opisuje energię sprężystą zgromadzoną w systemie A, to jest generowaną na skutek pola odkształceń własnych, obszarami ciągłego, przy czym w fazie pierwszej przyjmowane jest jednorodne odkształcenie własne odpowiadające średniemu odkształceniu fazowemu w tej fazie, zaś w fazie drugiej przyjmowane jest jednorodne odkształcenie własne odpowiadające średniemu odkształceniu fazowemu w tej fazie. Korzystając ze wzorów na średnie z pól $\underline{\sigma}_{A(\alpha)}^{(in)}$ (4.39) można ją wyrazić następująco

$$W_A^{(in)} \equiv -\frac{1}{2\rho} [z_1 \langle \underline{\sigma}_{A(1)}^{(in)} \cdot (-z_2 \Delta \underline{\Gamma}) \rangle_{V_1} + z_2 \langle \underline{\sigma}_{A(2)}^{(in)} \cdot z_1 \Delta \underline{\Gamma} \rangle_{V_2}] = \\ -\frac{1}{2\rho} [(\underline{\sigma}_{A(2)}^{(in)} - \underline{\sigma}_{A(1)}^{(in)})] z_1 z_2 \Delta \underline{\Gamma} = \frac{1}{2\rho} z_1 z_2 \Delta \underline{\Gamma} \underline{H}^A \Delta \underline{\Gamma} \geq 0. \quad (4.41)$$

Energia $W_{AB}^{(in)}$ reprezentuje energię sprężystą generowaną na skutek wzajemnego oddziaływania pól systemu A i systemu B

$$W_{AB}^{(in)} \equiv -\frac{1}{2\rho} [z_1 \langle \underline{\sigma}_{A(1)}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\Gamma}}_{(1)}^f \rangle_{V_1} + z_2 \langle \underline{\sigma}_{A(2)}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\Gamma}}_{(2)}^f(\underline{x}) \rangle_{V_2}] + \\ -\frac{1}{2\rho} [z_1 \langle \underline{\sigma}_{B(1)}^{(in)} \cdot (-z_2 \Delta \underline{\Gamma}) \rangle_{V_1} + z_2 \langle \underline{\sigma}_{B(2)}^{(in)} \cdot z_1 \Delta \underline{\Gamma} \rangle_{V_2}]. \quad (4.42)$$

Pary $(\underline{\sigma}_A^{(in)} \leftrightarrow \underline{\varepsilon}_A^{(in)})$, $(\underline{\sigma}_B^{(in)} \leftrightarrow \underline{\varepsilon}_B^{(in)})$ stanowią rozwiązania problemów sprężystości z odkształceniami własnymi $\underline{\Gamma}_1 + j_{(\alpha)} \Delta \underline{\Gamma}$ i $\widehat{\underline{\Gamma}}_{(\alpha)}^f$, odpowiednio. Podstawiając do wyprowadzonego w Aneksie 4.1 wzoru (A4.6), w miejsce pól I pola A i w miejsce pól II pola B, oraz korzystając z faktu że pola A i B są polami rezydualnymi ($\widehat{\underline{\Gamma}}_A^{(b)(in)} = \widehat{\underline{\Gamma}}_B^{(b)(in)} = \underline{\theta}$ – por. (4.36), (4.37)) otrzymuje się

$$\langle \underline{\sigma}_{A(\alpha)}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\Gamma}}_{(\alpha)}^f \rangle_V = \langle \underline{\sigma}_{B(\alpha)}^{(in)} \cdot (\underline{\Gamma}_1 + j_{(\alpha)} \Delta \underline{\Gamma}) \rangle_V, \quad (4.43) \\ z_1 \langle \underline{\sigma}_{A(1)}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\Gamma}}_{(1)}^f \rangle_{V_1} + z_2 \langle \underline{\sigma}_{A(2)}^{(in)} \cdot \widehat{\underline{\Gamma}}_{(2)}^f(\underline{x}) \rangle_{V_2} = \\ = z_1 \langle \underline{\sigma}_{B(1)}^{(in)} \cdot (-z_2 \Delta \underline{\Gamma}) \rangle_{V_1} + z_2 \langle \underline{\sigma}_{B(2)}^{(in)} \cdot z_1 \Delta \underline{\Gamma} \rangle_{V_2}.$$

Przy wyprowadzeniu zależności (4.43)₂ skorzystano z równości $\langle \underline{\sigma}_{B(\alpha)}^{(in)} \cdot \underline{\Gamma}_1 \rangle_V = \langle \underline{\sigma}_{B(\alpha)}^{(in)} \rangle_V \cdot \underline{\Gamma}_1 = 0$.

Po skorzystaniu z wyrażenia na różnicę średnich fazowych dla pól B – por. (4.38)₆

$$W_{AB}^{(in)} = 2 \cdot (-\frac{1}{2\rho}) \cdot [z_1 z_2 \Delta \underline{\Gamma} (-\langle \underline{\sigma}_{B(1)}^{(in)} \rangle_{V_1} + \langle \underline{\sigma}_{B(2)}^{(in)} \rangle_{V_2})] = \\ = z_1 z_2 \underline{\Sigma}^B \cdot \Delta \underline{\Gamma} / \rho. \quad (4.44)$$

Energia $W_{AB}^{(in)}$ znika gdy, którekolwiek z pól $j_{(\alpha)}\Delta\Gamma$ ($W_A^{(in)}=0$) lub $\widehat{\Gamma}_{(\alpha)}^f$ ($W_B^{(in)}=0$) jest polem kompatybilnym.

Zawsze nieujemna energia $W_B^{(in)}$ opisuje energię sprężystą generowaną na skutek niekompatybilności pola fluktuacji odkształceń własnych

$$W_B^{(in)} \equiv -\frac{1}{2\rho} [z_1 \langle \widehat{\sigma}_B^{(in)} \cdot \widehat{\Gamma}_{(1)}^f \rangle_{V_1} + z_2 \langle \widehat{\sigma}_B^{(in)} \cdot \widehat{\Gamma}_{(2)}^f \rangle_{V_2}] \geq 0. \quad (4.45)$$

Dalszego podziału energii $W_B^{(in)}$, można dokonać pamiętając o tym, że rozpatrywana dotychczas powyżej sytuacja dotyczy pewnego chwilowego „zamrożonego” stanu występującego podczas rzeczywistej przemiany fazowej. Stan zaawansowania przemiany fazowej określony jest udziałem objętościowym fazy wynikowej z_2 . Wygodnie jest wprowadzić pojęcie „energii zmagazynowanej koherencji” $W_s^{(in)}$, tj. energii jaka zmagazynowana jest w makroelemencie (RVE) po całkowitym zakończeniu przemiany fazowej z fazy macierzystej do fazy wynikowej $z_2 \rightarrow 1$

$$W_s^{(in)} \equiv \lim_{V_2 \rightarrow V} W^{(in)} = \lim_{V_2 \rightarrow V} W_B^{(in)} \equiv -\frac{1}{2\rho} \lim_{V_2 \rightarrow V} \langle \widehat{\sigma}_{B(2)}^{(in)} \cdot \widehat{\Gamma}_{(2)}^f \rangle_{V_2}. \quad (4.46)$$

Energia ta nie zależy naturalnie od z_α natomiast jest funkcjonałem końcowego pola fluktuacji odkształceń własnych.

W przypadku termosprężystej przemiany martenzytycznej, tj. przemiany która zachodzi w stopach z pamięcią kształtu, wyniki doświadczalne wskazują, że faza macierzysta zachowuje się praktycznie w sposób czysto sprężysty. Można zatem z dobrym przybliżeniem przyjąć, że odkształcenia własne pojawiające się w tej fazie w trakcie przemiany fazowej są pomijalnie małe. Ponieważ zazwyczaj przyjmuje się, że faza macierzysta jest w stanie przed przemianą fazową nieodkształcona, więc pole odkształceń własnych w tej fazie jest polem zerowym $\widehat{\Gamma}_{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ($\Gamma_{(1)} = \mathbf{0}$, $\widehat{\Gamma}_{(1)}^f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$)⁶. Wtedy energię $W_B^{(in)}$ można przedstawić w dowolnym stanie zaawansowania przemiany fazowej następująco

$$W_B^{(in)} \equiv -\frac{1}{2\rho} z_2 \langle \widehat{\sigma}_B^{(in)} \cdot \widehat{\Gamma}_{(2)}^f \rangle_{V_2} = z_2 W_{B2}^{(in)} = z_2 [W_s^{(in)} + z_1 W_B^{*(in)}], \quad (4.47)$$

$$W_B^{*(in)}(z_2) \equiv (W_{B2}^{(in)} - W_s^{(in)}) / z_1.$$

⁶ Specjalny przypadek – nie rozważany tutaj, stanowią stopy z pamięcią kształtu poddane procedurze "treningu", po to by uzyskać dwukierunkowy efekt pamięci kształtu. W takich stopach SMA w wyniku procedury treningu generowane jest niezerowe pole odkształceń własnych $\widehat{\Gamma}_{(1)}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ – mających charakter klasycznych odkształceń plastycznych zachodzących przez poślizg lub związane z wytworzeniem w fazie macierzystej wydzieleni.

Zakłada się, że przy $z_2 \rightarrow 1$ ($z_1 \rightarrow 0$) człon $\overset{*}{W}_B^{(in)}(z_2) \leq C = const$ jest ograniczony tak, aby wtedy $z_1 \overset{*}{W}_B^{(in)} \rightarrow 0$ i $W_B^{(in)} \rightarrow W_s^{(in)}$. Człon $\overset{*}{W}_B^{(in)}(z_2)$ nie musi być nieujemny, jak również nie musi być monotoniczną funkcją z_2 .

Podstawiając do (4.21) wyrażenia (4.22) i (4.40) na $W^{(ex)}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_E)$, $W^{(in)}$, a następnie (4.41), (4.44), (4.47) na $W_A^{(in)}$, $W_{AB}^{(in)}$ i $W_B^{(in)}$ otrzymuje się następujący wzór na energię sprężystą zmagazynowaną w makroelemente \mathcal{B} (RVE)

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\rho} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_E \cdot \underline{\mathcal{L}}^{ef} \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_E + W^{(in)} = \\ &= \frac{1}{2\rho} (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T) \cdot \underline{\mathcal{L}}^{ef} (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T) + z_1 z_2 \phi_{it} + z_2 W_s^{(in)}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Symbolem ϕ_{it} oznaczono energię na jednostkę masy, określoną wzorem

$$\phi_{it} \equiv \frac{1}{2\rho} \underline{\Delta \boldsymbol{\Gamma}} \cdot \underline{\mathbf{H}}^A \underline{\Delta \boldsymbol{\Gamma}} + \frac{1}{\rho} \underline{\boldsymbol{\Sigma}}^B \cdot \underline{\Delta \boldsymbol{\Gamma}} + \overset{*}{W}_B^{(in)}. \quad (4.49)$$

Energia ϕ_{it} nie musi przyjmować wartości większych od zera. Może ona przyjmować wartości ujemne pod warunkiem, że jednocześnie w danej chwili procesu przemiany fazowej wartość energii zmagazynowanej $W_s^{(in)}$ jest dostatecznie duża, aby energia wynikająca z niekompatybilności pola odkształceń własnych miała wartość większą od zera $W^{(in)} = z_1 z_2 \phi_{it} + z_2 W_s^{(in)} \geq 0$ zgodnie z (4.40).

Postać matematyczna wzoru (4.48) określającego energię sprężystą W jest formalnie identyczna (z dokładnością do stałej) z tą określającą sumę energii $\Phi_{im}(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, T, z, \underline{\mathbf{k}}(H_i)) + \Phi_{it}(z, T)$ – por (3.3) i (3.1) w warunkach izotermicznych $T = const$, przy przyjęciu $\underline{\boldsymbol{\alpha}} = 0$. Przy czym we wzorze (3.3) poczyniono heurystyczne założenia odnośnie postaci funkcji ϕ_{it} i $W_s^{(in)}$ typu (3.3)_{5,6}. Tutaj przy poczynionych założeniach na poziomie mikroskopowym wzory na energię sprężystą W makroelementu SMA (4.48), (4.49) są dokładne. Perspektywa wykorzystania tych wzorów wprost w modelu makroskopowym jest ograniczona, gdyż energia W zależy od parametrów stanu mierzalnych na poziomie makroskopowym, takich jak odkształcenie, odkształcenie fazowe, udział objętościowy fazy martenzytycznej, różnica średnich odkształceń fazowych w obu fazach $\underline{\Delta \boldsymbol{\Gamma}}$, temperatura – tutaj traktowana jako ustalony parametr, ale zależy również od szeregu parametrów wewnętrznych H_i charakteryzujących ilościowo mikrostrukturę makroelementu SMA i jej elementy składowe, takie jak własności sprężyste poszczególnych faz, liczba i ułożenie płytek martenzytu, etc.

4.4 Postulat optymalnego uporządkowania mikrostruktury i jego konsekwencje

W niniejszej sekcji, aby uzyskać bardziej użyteczną postać wzoru na energię sprężystą makroelementu SMA, niezależną od zbioru parametrów wewnętrznych H_i , $i=1, N$ charakteryzujących mikrostrukturę RVE, wykorzystana zostanie zaproponowana w pracy [65] koncepcja „optymalnego uporządkowania mikrostruktury”. A zatem zostanie przyjęty jako obowiązujący postulat modelowy, że makroelement SMA zawsze pozostaje w termodynamicznej równowadze mikrostrukturalnej – patrz tekst na ten temat w rozdziale 3 nieco poniżej wzoru (3.4). Zakłada się, że przy zadanych warunkach obciążenia na brzegu RVE wartości zmiennych wewnętrznych charakteryzujących mikrostrukturę RVE minimalizują energię sprężystą $W(\underline{\varepsilon}_T(H_i), z_\alpha, H_i)$ – por. (4.21) w ogólnym przypadku ciała niejednorodnego lub (4.48) w przypadku ciała dwufazowego. Mikrostruktura RVE jest wtedy optymalnie uporządkowana względem aktualnego obciążenia. Równowagowe wartości parametrów H_i dla których W osiąga ekstremum mogą być wyznaczone z równań określających warunki konieczne osiągnięcia ekstremum

$$\partial W / \partial H_i = 0. \quad (4.50)$$

Przyjmuje się następujące fizyczne założenia upraszczające przed rozpatrzeniem konsekwencji przyjęcia postulatu optymalnego uporządkowania mikrostruktury, wyrażonego warunkiem (4.50).

Pole tensora modułów podatności sprężystej jest jednorodne i stałe w całej objętości RVE. Oznacza to, że moduły podatności sprężystych obu faz są przyjmowane za takie same. Również gęstości obu faz są przyjmowane za takie same

$$\underline{\mathcal{L}}^{ef} = \underline{\mathcal{L}} = const, \quad \rho_1 = \rho_2 = \rho. \quad (4.51)$$

Odkształcenia związane z przemianą fazową są dla fazy macierzystej (austenitu) zerowe

$$(\widehat{\underline{\Gamma}}(\underline{x}) = 0 \quad \underline{x} \in V_1) \Leftrightarrow (\underline{\Gamma}_1 = 0). \quad (4.52)$$

Wtedy korzystając ze wzoru (4.16)₂ jest

$$\underline{\varepsilon}_T(z_\alpha, H_i) = \underbrace{\mathcal{M} \langle \underline{\sigma}^{(in)} \rangle_V}_{=\underline{\sigma}} + \underbrace{\underline{\Gamma}_1}_{=\underline{\sigma}} + z_2 \Delta \underline{\Gamma} = z_2 \underline{\kappa}(H_i), \quad (4.53)$$

$$\underline{\kappa}(H_i) = \Delta \underline{\Gamma} = \underline{\Gamma}_2 - \underbrace{\underline{\Gamma}_1}_{=\underline{\sigma}} = \frac{1}{V_2} \oint_{V_2} \widehat{\underline{\Gamma}}(\underline{x}) dV,$$

gdzie w ostatniej równości (4.53)₁ skorzystano z oznaczenia (3.1). Wykorzystując zależności (4.51), (4.52), (4.53) w (4.21) lub (4.48)₁ otrzymuje się

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2\rho} (\underline{\varepsilon} - z_2 \underline{\kappa}(H_i)) \cdot \underline{\mathcal{L}} (\underline{\varepsilon} - z_2 \underline{\kappa}(H_i)) + W^{(in)}(z_\alpha, H_i) = \\ &= \frac{1}{2\rho} \underline{\sigma} \cdot \mathcal{M} \underline{\sigma} + W^{(in)}(z_\alpha, H_i), \end{aligned} \quad (4.54)$$

przy czym zależność energii niekompatybilności $W^{(in)}$ od z_α i H_i wynika z jej definicji (4.24). Po zastosowaniu warunku (4.50) do (4.54) otrzymuje się

$$-\partial W / \partial H_i = z_2 \underline{\sigma} \cdot \partial \underline{\mathbf{k}}(H_i) / \partial H_i - \rho \partial W^{(in)}(z_\alpha, H_i) / \partial H_i = 0. \quad (4.55)$$

Równania (4.55) stanowią zbiór równań algebraicznych na nieznanne równowagowe wartości parametrów wewnętrznych H_i^{eq} . Jak łatwo stwierdzić na podstawie (4.55) wartości równowagowe H_i^{eq} muszą zależeć od z_α i $\underline{\sigma}$. Oznaczając równowagowe wartości funkcji $\underline{\mathbf{k}}$ i $W^{(in)}$ indeksem „ eq ” można zapisać

$$\underline{\mathbf{k}}^{eq} = \underline{\mathbf{k}}^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma}) = \underline{\mathbf{k}}(H_i^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma})), \quad (4.56)$$

$$W^{eq} = W^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma}) = W^{(in)}(z_\alpha, H_i^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma})).$$

Pomnożmy obecnie N równań (4.55) obustronnie przez $\partial H_i^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma}) / \partial \underline{\sigma}$ odpowiednio i zsumujmy, aby otrzymać następujący warunek termodynamicznej równowagi mikrostrukturalnej

$$\left\{ \sum_i [z_2 \underline{\sigma} \cdot \partial \underline{\mathbf{k}}(H_i) / \partial H_i - \rho \partial W^{(in)}(z_\alpha, H_i) / \partial H_i] \partial H_i^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma}) / \partial \underline{\sigma} = 0 \right\} \Leftrightarrow (4.57)$$

$$\left\{ z_2 \underline{\sigma} \cdot \partial \underline{\mathbf{k}}^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma}) / \partial \underline{\sigma} - \rho \partial W^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma}) / \partial \underline{\sigma} = 0 \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \partial [z_2 \underline{\sigma} \cdot \partial \underline{\mathbf{k}}^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma}) - \rho W^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma})] / \partial \underline{\sigma} = z_2 \underline{\mathbf{k}}^{eq} = \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T^{eq} \right\}.$$

Warunek (4.57)₃ wskazuje, że równowagowe makroskopowe odkształcenie fazowe $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}_T^{eq} = z_2 \underline{\mathbf{k}}^{eq}$ oraz sam tensor odkształceń fazowych $\underline{\mathbf{k}}^{eq}$ dopuszcza istnienie potencjału. Zatem niniejszym postuluje się istnienie potencjału generującego $\underline{\mathbf{k}}^{eq}$

$$\underline{\mathbf{k}}^{eq}(\underline{\sigma}) \equiv \rho \frac{\partial g^{ph}(z_\alpha, \underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}}. \quad (4.58)$$

Potencjał ten nazywany będzie potencjałem *energii odkształceń fazowych*. Specyficzną jawną postać tego potencjału $\rho g^{ph}(\underline{\sigma}, T) = \underline{\mathbf{k}}^{eq} \cdot \underline{\sigma} = \eta f(y) \sigma_{ef}$ – por. (3.32), będziemy nazywali potencjałem Ranieckiego.

Łącząc (4.57)₃ i (4.58) otrzymuje się następujące równanie różniczkowe

$$\frac{\partial}{\partial \underline{\sigma}} \left[z_2 (\underline{\sigma} \cdot \frac{\partial g^{ph}(z_\alpha, \underline{\sigma})}{\partial \underline{\sigma}} - g^{ph}(z_\alpha, \underline{\sigma})) - W^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma}) \right] = \underline{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4.59)$$

Scałkowanie powyższego równania prowadzi do zależności pomiędzy $W^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma})$ i $g^{ph}(z_\alpha, \underline{\sigma})$

$$W^{eq}(z_\alpha, \underline{\sigma}) = W^{eq}(z_\alpha, \underline{\boldsymbol{\theta}}) - z_2 (g^{ph}(z_\alpha, \underline{\sigma}) - \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{k}}^{eq} / \rho). \quad (4.60)$$

Jak wskazuje wzór (4.60), gdy makroskopowy potencjał $g^{ph}(z_\alpha, \underline{\sigma})$ jest jednorodną funkcją stopnia pierwszego względem naprężenia to wtedy energia niekompatybilności $W^{(in)}$ odpowiadająca optymalnemu uporządkowaniu

mikrostruktury nie zależy od makroskopowego naprężenia. Podstawiając (4.60) do (4.54) otrzymuje się

$$W(z_\alpha, \underline{\sigma}) = \frac{1}{2\rho} \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathcal{M}} \underline{\sigma} + W^{eq}(z_\alpha, \underline{\theta}) - z_2 (g^{ph} - \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{k}}^{eq} / \rho), \quad (4.61)$$

$$W = \frac{1}{2\rho} (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - z_2 \underline{\mathbf{k}}^{eq}) \cdot \underline{\mathcal{L}} (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - z_2 \underline{\mathbf{k}}^{eq}) + W^{eq}(z_\alpha, \underline{\theta}) - z_2 (g^{ph}(\underline{\sigma}) - \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{k}}^{eq} / \rho),$$

i dalej, gdy zostanie przyjęte, że $\rho g^{ph}(\underline{\sigma}) = \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathbf{k}}^{eq}(\underline{\sigma})$

$$W = \frac{1}{2\rho} (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - z_2 \underline{\mathbf{k}}^{eq}) \cdot \underline{\mathcal{L}} (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - z_2 \underline{\mathbf{k}}^{eq}) + W^{eq}(z, \underline{\theta}) = \frac{1}{2\rho} \underline{\sigma} \cdot \underline{\mathcal{M}} \underline{\sigma} + \frac{1}{\rho} W^{eq}(z, \underline{\theta}). \quad (4.62)$$

Ponieważ $W^{eq}(z, \underline{\theta})$ nie zależy od naprężenia więc można postulować jego ogólną postać jako

$$W^{eq}(z, \underline{\theta}) = z_2 \Delta u_s^* + z_1 z_2 \bar{u}_0 + z_1 \Delta u_s^{**}, \quad (4.63)$$

gdzie $\Delta u_s^*, \bar{u}_0, \Delta u_s^{**}$ traktowane są jako stałe materiałowe. Człon $z_1 \Delta u_s^{**}$ reprezentuje energię mikronaprężeń rezydualnych generowanych w fazie macierzystej na skutek istnienia odkształceń własnych w tej fazie. Z uwagi na założenie (4.52) czysta faza macierzysta ($z_1 = 1$) nie ma odkształceń własnych. Zatem, gdy $z_1 = 1$ naprężenia wewnętrzne $\underline{\boldsymbol{\sigma}}^{(in)} = 0$ i $W^{(eq)}$ musi być równe zero. Prowadzi to do wniosku, że Δu_s^{**} musi być równe zero. Człon $z_1 \Delta u_s^{**}$ będzie miał wartość niezerową w przypadku stopów z pamięcią kształtu poddanych specjalnemu procesowi technologicznemu, tzw. treningu prowadzącego do występowania dwukierunkowego efektu pamięci kształtu. Człon $z_2 \Delta u_s^*$ reprezentuje energię zmagazynowaną na skutek niekompatybilności pola odkształceń własnych po zakończeniu martenzytycznej przemiany fazowej, zaś człon $z_1 z_2 \bar{u}_0$ reprezentuje energię koherencji. Podstawiając (4.63) do (4.62) przy uwzględnieniu $z_1 \Delta u_s^{**} = 0$ uzyskuje się ostatecznie

$$W = \frac{1}{2\rho} (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - z_2 \underline{\mathbf{k}}^{eq}) \cdot \underline{\mathcal{L}} (\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} - z_2 \underline{\mathbf{k}}^{eq}) + z_1 z_2 \bar{u}_0 + z_2 \Delta u_s^*. \quad (4.64)$$

Wzór (4.64) na energię sprężystą W jest taki sam (z dokładnością do stałej) jak ten proponowany w modelu R_L dla potencjału energii swobodnej $\bar{\Phi}_c(\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}, T = const, z)$ w warunkach izotermicznych, przy przyjęciu $\underline{\boldsymbol{\alpha}} = 0$ oraz $\bar{s}_0 = 0$, $\Delta s_s^* = 0$ – por. (3.10), (3.11). A zatem przy przyjęciu, że energie ϕ_{it} i $W_s^{(in)}$ nie zależą od temperatury. Dopuszczalność założenia o niezależność energii koherencji ϕ_{it} od temperatury potwierdzają dane doświadczalne uzyskane dla stopu NiTi podlegającego przemianie monoklinicznej. Dopuszczalność takiego założenia w przypadku energii $W_s^{(in)}$ wymaga dalszych badań doświadczalnych. Raniecki i Lexcelent postulowali w modelu R_L liniową zależność ϕ_{it} i $W_s^{(in)}$ od temperatury – por. (3.3)_{5,6}.

4.5 Podsumowanie

Przeprowadzona analiza mikromechaniczna ujawniła jakie człony powinny występować w postulowanej fenomenologicznie makroskopowej postaci funkcji energii swobodnej dla stopów z pamięcią kształtu, aby wiarygodnie można było przy jej pomocy przewidywać zachowanie tych stopów przy różnych obciążeniach termomechanicznych. Poszczególne człony określające wartość energii sprężystej W posiadają obecnie klarowną interpretację fizyczną. Pozwala to na właściwe zaprojektowanie badań doświadczalnych tak, aby oszacować wpływ poszczególnych zjawisk fizycznych na wielkości występujących efektów energetycznych, bądź stwierdzić doświadczalnie które człony energetyczne można zaniedbać w przypadku określonych mikrostruktur martenzytycznych. Wartość poszczególnych członów energetycznych występujących we wzorze (4.48) można również szacować rozważając konkretne mikrostruktury martenzytyczne, poprzez rozwiązywanie odpowiednich problemów brzegowych sprężystości (4.2)÷(4.4). Niestety z uwagi na złożoność pojawiających się mikrostruktur martenzytycznych, znalezienie rozwiązania tego problemu w jawnej postaci jest możliwe tylko w nielicznych przypadkach, co otwiera pole do zastosowania metod numerycznych.

Aneks 4.1 Zasada wzajemności w liniowej teorii sprężystości w obecności odkształceń własnych

Rozważmy dwa brzegowo początkowe problemy liniowej teorii sprężystości dla ciała \mathcal{B} o brzegu ∂V . Własności sprężyste ciała \mathcal{B} opisane są niejednorodnym polem symetrycznego i dodatnio określonego tensora podatności sprężystych $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ ($\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathcal{L}}^{-1}(\mathbf{x})$).

Rozwiązanie problemu I $\{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(I)}(\mathbf{x}), \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(I)}(\mathbf{x}), \widehat{\mathbf{u}}^{(I)}(\mathbf{x})\}$ spełnia warunki równowagi mechanicznej, zadane warunki brzegowe. Pole odkształceń spełnia warunki zgodności (pole przemieszczeń $\widehat{\mathbf{u}}^{(I)}(\mathbf{x})$ jest ciągłe) oraz związki konstytutywne

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(I)}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(I)}(\mathbf{x}) + \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^{(I)}(\mathbf{x}). \quad (\text{A4.1})$$

Znane pole odkształceń własnych $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^{(I)}(\mathbf{x})$ może być nieciągłe na skończonej liczbie powierzchni, przy czym musi tam spełniać warunki zgodności. Wektor naprężenia na brzegu ciała ∂V określony jest wzorem

$$\widehat{\mathbf{t}}^{(I)}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \widehat{\boldsymbol{\tau}}^{(I)}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial V. \quad (\text{A4.2})$$

Rozwiązanie problemu II $\{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(II)}(\mathbf{x}), \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(II)}(\mathbf{x}), \widehat{\mathbf{u}}^{(II)}(\mathbf{x})\}$ spełnia warunki równowagi mechanicznej, zadane warunki brzegowe. Pole odkształceń spełnia warunki zgodności (pole przemieszczeń $\widehat{\mathbf{u}}^{(II)}(\mathbf{x})$ jest ciągłe) oraz związki konstytutywne

$$\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(II)}(\mathbf{x}) = \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(II)}(\mathbf{x}) + \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^{(II)}(\mathbf{x}). \quad (\text{A4.3})$$

Znane pole odkształceń własnych $\widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^{(II)}(\mathbf{x})$ może być nieciągłe na skończonej liczbie powierzchni, przy czym musi tam spełniać warunki zgodności. Wektor naprężenia na brzegu ciała ∂V określony jest wzorem

$$\widehat{\mathbf{t}}^{(II)}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(II)}(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \partial V. \quad (\text{A4.4})$$

Dzięki symetrii tensora $\widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$ jest $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(I)} \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(II)} = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(II)} \widehat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(I)}$ skąd

$$\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(I)}(\mathbf{x}) \cdot (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(II)}(\mathbf{x}) - \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^{(II)}(\mathbf{x})) = \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(II)}(\mathbf{x}) \cdot (\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(I)}(\mathbf{x}) - \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^{(I)}(\mathbf{x})). \quad (\text{A4.5})$$

Po scałkowaniu tej zależności po całej objętości ciała \mathcal{B} i skorzystaniu z twierdzenia Gaussa oraz statycznej dopuszczalności pól $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(I)}$, $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(II)}$ jest

$$\oint_{\partial V} (\widehat{\mathbf{t}}^{(I)} \cdot \widehat{\mathbf{u}}^{(II)}) ds - \int_V (\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(I)} \cdot \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^{(II)}) dv = \oint_{\partial V} (\widehat{\mathbf{t}}^{(II)} \cdot \widehat{\mathbf{u}}^{(I)}) ds - \int_V (\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^{(II)} \cdot \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^{(I)}) dv. \quad (\text{A4.6})$$

W szczególności

$$\oint_{\partial V} (\widehat{\mathbf{t}}^{(I)} \cdot \widehat{\mathbf{u}}^{(II)}) ds = \oint_{\partial V} (\widehat{\mathbf{t}}^{(II)} \cdot \widehat{\mathbf{u}}^{(I)}) ds, \quad \text{gdy } \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^{(II)}(\mathbf{x}) = \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}^{(I)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (\text{A4.7})$$

Alternatywnie

$$\underline{\hat{\sigma}}^{(I)}(\mathbf{x}) = \underline{\hat{\mathcal{L}}}(\mathbf{x})\underline{\hat{\varepsilon}}^{(I)}(\mathbf{x}) - \underline{\hat{\mathcal{L}}}(\mathbf{x})\underline{\hat{\Gamma}}^{(I)}(\mathbf{x}), \quad (\text{A4.8})$$

$$\underline{\hat{\sigma}}^{(II)}(\mathbf{x}) = \underline{\hat{\mathcal{L}}}(\mathbf{x})\underline{\hat{\varepsilon}}^{(II)}(\mathbf{x}) - \underline{\hat{\mathcal{L}}}(\mathbf{x})\underline{\hat{\Gamma}}^{(II)}(\mathbf{x}).$$

Dzięki symetrii tensora $\underline{\hat{\mathcal{L}}}(\mathbf{x})$ jest $\underline{\hat{\varepsilon}}^{(I)}\underline{\hat{\mathcal{L}}}(\mathbf{x})\underline{\hat{\varepsilon}}^{(II)} = \underline{\hat{\varepsilon}}^{(II)}\underline{\hat{\mathcal{L}}}(\mathbf{x})\underline{\hat{\varepsilon}}^{(I)}$ skąd

$$\begin{aligned} \underline{\hat{\varepsilon}}^{(I)}[\underline{\hat{\sigma}}^{(II)}(\mathbf{x}) + \underline{\hat{\mathcal{L}}}(\mathbf{x})\underline{\hat{\Gamma}}^{(II)}(\mathbf{x})] &= \underline{\hat{\varepsilon}}^{(II)}[\underline{\hat{\sigma}}^{(I)}(\mathbf{x}) + \underline{\hat{\mathcal{L}}}(\mathbf{x})\underline{\hat{\Gamma}}^{(I)}(\mathbf{x})], \\ \oint_{\partial V} (\underline{\hat{\mathbf{t}}}^{(I)} \cdot \underline{\hat{\mathbf{u}}}^{(II)}) ds + \oint_V (\underline{\hat{\varepsilon}}^{(II)} \cdot \underline{\hat{\mathcal{L}}}\underline{\hat{\Gamma}}^{(I)}) dv &= \\ = \oint_{\partial V} (\underline{\hat{\mathbf{t}}}^{(II)} \cdot \underline{\hat{\mathbf{u}}}^{(I)}) ds + \oint_V (\underline{\hat{\varepsilon}}^{(I)} \cdot \underline{\hat{\mathcal{L}}}\underline{\hat{\Gamma}}^{(II)}) dv. \end{aligned} \quad (\text{A4.9})$$

Aneks 4.2 Praca całkowita, zasada kompatybilności energii mechanicznej – postulat Hilla, koncepcja własności efektywnych

Pracę całkowitą wykonaną nad ciałem \mathcal{B} przez zadane na brzegu ciała, stałe w czasie, obciążenie siłowe $\underline{\hat{\mathbf{t}}}^{(b)}(\mathbf{x})$ – por. (4.3), na odpowiadającym mu brzegowym przemieszczeniu $\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{(b)}(\mathbf{x}) = \underline{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \partial V}$ można wyrazić następującym wzorem

$$\begin{aligned} \rho W^{(Tot)} &\equiv \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \underline{\hat{\mathbf{t}}}^{(b)} \cdot \underline{\hat{\mathbf{u}}}^{(b)} ds = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \underline{\hat{\mathbf{n}}}\underline{\hat{\sigma}} \cdot \underline{\hat{\mathbf{u}}}^{(b)} ds = \frac{1}{V} \oint_V \underline{\nabla} \cdot (\underline{\hat{\sigma}}\underline{\hat{\mathbf{u}}}) dv = \\ &= \frac{1}{V} \oint_V (\underline{\hat{\sigma}} \cdot \underline{\hat{\varepsilon}}) dv = \langle \underline{\hat{\sigma}} \cdot \underline{\hat{\varepsilon}} \rangle_V. \end{aligned} \quad (\text{A4.10})$$

Przy wyprowadzaniu powyższego wzoru skorzystano z twierdzenia Gaussa i następującej tożsamości – por. (4.4)₂, (4.2)₁

$$\underline{\hat{\sigma}} \cdot \underline{\hat{\varepsilon}} = \underline{\hat{\sigma}} \cdot (\underline{\hat{\varepsilon}} + \underline{\hat{\omega}}) = \underline{\hat{\sigma}} \cdot (\underline{\nabla} \otimes \underline{\hat{\mathbf{u}}}) = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\hat{\sigma}}\underline{\hat{\mathbf{u}}}) - \underbrace{(\underline{\nabla} \cdot \underline{\hat{\sigma}})}_{=0} \underline{\hat{\mathbf{u}}} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\hat{\sigma}}\underline{\hat{\mathbf{u}}}). \quad (\text{A4.11})$$

Pracę całkowitą można przedstawić również w równoważnej postaci korzystając z rozkładów (4.7), (4.8)

$$\begin{aligned} \rho W^{(Tot)} &= \frac{1}{V} \oint_{\partial V} (\underline{\hat{\mathbf{t}}}^{(u)} + \underline{\hat{\mathbf{t}}}^f) \cdot (\underline{\hat{\mathbf{u}}}^{(u)} + \underline{\hat{\mathbf{u}}}^f) ds = \\ &= \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \underline{\hat{\mathbf{t}}}^{(u)} \cdot \underline{\hat{\mathbf{u}}}^{(u)} ds + \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \underline{\hat{\mathbf{t}}}^{(u)} \cdot \underline{\hat{\mathbf{u}}}^f ds + \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \underline{\hat{\mathbf{t}}}^f \cdot \underline{\hat{\mathbf{u}}}^{(u)} ds + \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \underline{\hat{\mathbf{t}}}^f \cdot \underline{\hat{\mathbf{u}}}^f ds = \\ &= \langle \underline{\hat{\sigma}} \rangle_V \cdot \langle \underline{\hat{\varepsilon}} \rangle_V + \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \underline{\hat{\mathbf{t}}}^f \cdot \underline{\hat{\mathbf{u}}}^f ds. \end{aligned} \quad (\text{A4.12})$$

Przy wyprowadzaniu wzoru (A4.12) skorzystano z następujących zależności

$$\begin{aligned}
 \oint_{\partial V} \tilde{\mathbf{t}}^{(u)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{(u)} ds &= \oint_{\partial V} (\hat{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma}) \cdot ((\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}) \mathbf{x}) ds = \\
 &= \oint_{\partial V} (\hat{\mathbf{n}} \otimes \mathbf{x}) ds [\boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega})] = V \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}} \rangle_V \cdot \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \rangle_V, \\
 \oint_{\partial V} (\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{x}) ds &= \oint_V \nabla \otimes \mathbf{x} dv = \oint_V \mathbf{I}^{(2)} dv = V \mathbf{I}^{(2)}, \\
 \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \tilde{\mathbf{t}}^{(u)} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^f ds &= \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{u}}^f ds = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \hat{\mathbf{n}} \otimes \tilde{\mathbf{u}}^f ds \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \text{ – por. (4.8)}_4, \\
 \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \tilde{\mathbf{t}}^f \cdot \tilde{\mathbf{u}}^{(u)} ds &= \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \tilde{\mathbf{t}}^f (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}) \mathbf{x} ds = \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \tilde{\mathbf{t}}^f \otimes \mathbf{x} ds \cdot (\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\omega}) = \mathbf{0} \text{ – por. (4.7)}_3.
 \end{aligned}
 \tag{A4.13}$$

Związki (A4.10)-(A4.12) obowiązują bez względu na prawo konstytutywne jakiego podlega materiał, skorzystano tylko ze statycznej dopuszczalności pola $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})$ i kinematycznej dopuszczalności pola $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x})$. Jak z nich wynika całkowita praca $\rho W^{(Tot)}$ deformacji ciała \mathcal{B} zależy nie tylko od iloczynu średnich wartości naprężenia i odkształcenia ale również od pracy pól fluktuacji ρW^f – por. (4.9).

W ogólnym przypadku pole fluktuacji $\tilde{\mathbf{t}}^f$ jest parametrem obciążenia niezależnym od wartości średniej pola naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ – makroskopowego parametru stanu, wynikającym z zadawanych siłowych warunków brzegowych $\mathbf{t}^{(b)}$. Z tego powodu praca fluktuacji ρW^f również jest niezależna od $\boldsymbol{\sigma}$. Taka sytuacja uniemożliwia wprowadzenie koncepcji tzw. efektywnych własności sprężystych materiału, czyli jednorodnych zastępczych modułów podatności lub sztywności sprężystych, gdyż nie można podać jednoznacznego związku pomiędzy zmagazynowaną energią sprężystą i makroskopowymi parametrami stanu. Konieczne jest zatem narzucenie ograniczenia na dopuszczalne przy rozważaniu problemu mikromechaniki siłowe warunki brzegowe, tak by pole fluktuacji $\tilde{\mathbf{t}}^f$ zależało parametrycznie od wartości średniej naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$. Takie ograniczenie zostało zaproponowane przez Hilla [26], który postulował aby rozpatrywać tylko warunki brzegowe $\mathbf{t}^{(b)}$ spełniające, tzw. zasadę kompatybilności energii mechanicznej – por. (4.10).

Można pokazać, że pola fluktuacji wektora naprężenia spełniające postulat Hilla, muszą parametrycznie zależeć od wartości średniej pola naprężenia $\tilde{\mathbf{t}}^f = \tilde{\mathbf{t}}^f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma})$, zaś praca mechaniczna $\rho W^{(Tot)}$, jak również energia sprężysta makroelementu SMA – w przypadku liniowo sprężystego ciała określona wzorem $2\rho W = \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{(e)} \rangle_V$ zmagazynowana w ciele \mathcal{B} zależy wtedy w sposób parametryczny od średniego naprężenia umożliwiając wprowadzenie pojęcia sprężystych własności efektywnych

w sposób jednoznaczny $\{\boldsymbol{\sigma}, \hat{\mathbf{t}}^f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma})\} \rightarrow \rho W^{(Tot)}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}))$. Należy tutaj zwrócić uwagę, że przy tej samej ustalonej mikrostrukturze ciała \mathcal{B} i tym samym naprężeniu średnim różne pola fluktuacji spełniające postulat Hilla prowadzą do różnych wartości energii sprężystej zgromadzonej w makroelemencie SMA, a zatem do różnych modułów efektywnych. Postulat Hilla ma zastosowanie nie tylko do siłowych warunków brzegowych. Można pokazać, że przy zadawanych na całym brzegu ciała \mathcal{B} przemieszczeniowych warunkach brzegowych – prowadzących do tej samej średniej wartości odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}$, wynikające z nich pola fluktuacji przemieszczenia spełniające postulat Hilla muszą parametrycznie zależeć od wartości średniej pola odkształcenia $\hat{\mathbf{u}}^f = \hat{\mathbf{u}}^f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})$. Wtedy praca mechaniczna $\rho W^{(Tot)}$ zależy w sposób parametryczny od średniego odkształcenia $\{\boldsymbol{\varepsilon}, \hat{\mathbf{u}}^f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon})\} \rightarrow \rho W^{(Tot)}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}))$. Ponownie różne pola fluktuacji przemieszczenia, spełniające postulat Hilla, prowadzą do różnych wartości $\rho W^{(Tot)}$.

Postulat Hilla spełniony jest w sposób trywialny w dwóch szczególnie prostych przypadkach warunków brzegowych. Pierwszy to, tzw. jednorodne siłowe warunki brzegowe (u.b.t. – ang. uniform boundary tractions), wtedy bowiem fluktuacja wektora naprężenia jest tożsamościowo równa zeru. Drugi to, tzw. liniowe warunki przemieszczeniowe (l.b.d. – ang. linear boundary displacements), wtedy fluktuacja wektora przemieszczeń jest tożsamościowo równa zeru

$$\hat{\mathbf{t}}^{(u)}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}, \quad \hat{\mathbf{t}}^f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial V \text{ – (u.b.t.),} \quad (\text{A4.14})$$

$$\hat{\mathbf{u}}^{(l)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{x}, \quad \hat{\mathbf{u}}^f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \partial V \text{ – (l.b.d).}$$

Można pokazać, że spośród wszystkich warunków brzegowych spełniających postulat Hilla prowadzących do tej samej średniej wartości naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$ jednorodne siłowe warunki brzegowe (A4.14)₁ dają największą wartość energii sprężystej ciała liniowo sprężystego – norma efektywnego tensora modułów podatności $\underline{\mathcal{M}}^{ef} = \underline{\mathcal{M}}_{ubt}^{ef}$ ma wartość największą, zaś liniowe warunki przemieszczeniowe (A4.14)₂ dają najmniejszą wartość energii sprężystej ciała liniowo sprężystego – norma efektywnego tensora modułów podatności $\underline{\mathcal{M}}^{ef} = \underline{\mathcal{M}}_{lbd}^{ef}$ ma wartość najmniejszą, patrz Nemat-Naser i Hori [45]. Zatem warunki te dostarczają skrajnych oszacowań wielkości energii sprężystej jaka może być zmagazynowana w liniowo sprężystym ciele \mathcal{B} , i w konsekwencji modułów efektywnych. Dla pewnych szczególnych mikrostruktur mogą one osiągnąć wartość dobrze znanych oszacowań Reussa – gdy jednorodnie w całej objętości ciała \mathcal{B} pole naprężenia jest rozwiązaniem problemu mikromechaniki (4.2)-(4.4) lub oszacowania Voigta – gdy jednorodnie w całej objętości ciała \mathcal{B} pole odkształcenia jest rozwiązaniem problemu mikromechaniki (4.2)-(4.4).

Warunki brzegowe (A4.14) są bardzo użyteczne dla dokonania oceny czy wielkość i obszar makroelementu został właściwie dobrany tak, by spełniał postulat tzw. statystycznej reprezentatywności. Jest to jeden z wymogów, koniecznych by można było traktować makroelement jako RVE. W tym celu należy rozwiązać problem równowagi mechanicznej z jednorodnymi siłowymi warunkami brzegowymi $\hat{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\sigma}$ typu (A4.14)₁ – prowadzącymi do makroskopowego naprężenia $\boldsymbol{\sigma}$. Rozwiązanie tego problemu dostarcza makroskopowego odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma = \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\sigma}) \rangle_v$ oraz prowadzi do energii sprężystej $W^U = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma$. Następnie należy rozwiązać problem równowagi mechanicznej z liniowymi przemieszczeniowymi warunkami brzegowymi $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma \mathbf{x}$ typu (A4.14)₂ – prowadzącymi do makroskopowego odkształcenia $\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma$. Rozwiązanie tego drugiego problemu dostarcza makroskopowego naprężenia $\boldsymbol{\sigma}^\sigma = \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma) \rangle_v$ oraz prowadzi do energii sprężystej $W^L = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^\sigma \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma$. Jeżeli energie $W^U \cong W^L$, a zatem naprężenia $\boldsymbol{\sigma}^\sigma \cong \boldsymbol{\sigma}$ są sobie prawie równe to makroelement można traktować jako statystycznie reprezentatywny, patrz także [45].

Aby zilustrować proces wyznaczania sprężystych własności efektywnych rozważmy problem równowagi mechanicznej ciała \mathcal{B}_0 zbudowanego z materiału liniowo sprężystego bez odkształceń własnych – $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\mathbf{x}) = \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0(\mathbf{x})$, z zadanymi na brzegu ciała \mathcal{B}_0 siłowymi warunkami brzegowymi spełniającymi postulat Hilla $\hat{\mathbf{t}}_0^{(b)}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 + \hat{\mathbf{t}}^f(\mathbf{x})$. Spełnianie postulatu Hilla przez wektor naprężenia $\hat{\mathbf{t}}_0^{(b)}$ zapewnia, że pola odkształcenia i przemieszczenia $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0)$, $\hat{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}, \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0)$ stanowiące rozwiązanie tego problemu zależą liniowo tylko od wartości średniej pola naprężenia stanowiącego rozwiązanie postawionego problemu $\boldsymbol{\sigma}_0 = \langle \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0(\mathbf{x}) \rangle_v$. Sprężyste własności efektywne można wtedy wyznaczyć w sposób jednoznaczny poprzez wyliczenie średniej z pola $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\mathbf{x})$ $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(\mathbf{x}) \rangle_v = \langle \hat{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0(\mathbf{x}) \rangle_v \equiv \mathcal{M}^{ef} \boldsymbol{\sigma}_0$. Energię sprężystości można wyrazić wzorem $\rho W = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_0 \cdot \mathcal{M}^{ef} \boldsymbol{\sigma}_0$.

Rozdział 5. Weryfikacja doświadczalna modelu R_L dla stopu NiTi

5.1 Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale przedstawione są wyniki szerokiego programu badań doświadczalnych nad zachowaniem stopu NiTi w zakresie jego pseudosprężystego zachowania w złożonych stanach naprężenia. Wykonano testy mechaniczne w warunkach izotermicznych przy sterowaniu naprężeniem podczas, których próbka rurkowa NiTi była poddawana proporcjonalnym w przestrzeni naprężeń ścieżkom obciążenia. Surowe dane z maszyny wytrzymałościowej zostały następnie przetworzone przy pomocy zaawansowanego oprogramowania komputerowego DADISP do postaci odpowiedniej dla przeprowadzenia prac analitycznych. Analiza danych doświadczalnych pozwoliła na weryfikację wielu założeń teoretycznych modelu R_L między innymi o izotropii sprężystej oraz o izotropii niesprężystej badanego stopu SMA. Podano efektywną procedurę identyfikacji stałych i funkcji materiałowych modelu R_L oraz zidentyfikowano te dane dla badanego stopu NiTi. Dokonano oceny jakości modelu R_L porównując przebiegi czasowe składowych tensora odkształcenia otrzymane podczas prób eksperymentalnych z przebiegami czasowymi przewidywanymi przez model R_L .

Opisane w niniejszym rozdziale wyniki były możliwe do uzyskania dzięki programowi współpracy polsko-japońskiej. W wyniku jej nawiązania strona japońska przygotowała stop $Ni_{51at\%}-Ti$ oraz wykonała z tego stopu próbki rurkowe. W Japonii wykonano również podstawowe badania termiczne (DSC) i mechaniczne stopu przy jednoosiowym rozciąganiu. [80]. W Polsce opracowano program i metodologię badań doświadczalnych, wykonano badania termomechaniczne w złożonych stanach obciążenia, a także wykonano szereg prac analitycznych [66], [67], [68], [93].

Praca przedstawiona w niniejszym rozdziale jest pracą oryginalną w tym sensie, że autor niniejszej rozprawy uczestniczył w opracowywaniu surowych danych doświadczalnych jako współautor raportu wewnętrznego IPPT [77]. Uczestniczył również w opracowywaniu danych doświadczalnych mających na celu zbadanie procesu reorientacji R-fazy w oparciu o towarzyszące jej procesy deformacyjne [66]. Z udziałem autora dokonano identyfikacji stałych i funkcji materiałowych modelu R_L [68], patrz także [93]. Wykorzystując doświadczenia z prac wcześniejszych opisanych powyżej, w niniejszym rozdziale podano nowe nie publikowane dotychczas informacje dotyczące weryfikacji doświadczalnej założeń teoretycznych modelu R_L . Dokonano tego w oparciu o analizę efektów odkształceniowych stopu NiTi ulegającego monoklinicznej przemianie martenzytycznej w zakresie jego pseudosprężystego zachowania. Wyprecyzowano po raz pierwszy szczegółowo procedurę identyfikacji stałych i funkcji materiałowych modelu R_L , wraz zaleceniami odnośnie wymaganej do tego procesu minimalnej i optymalnej liczby, oraz rodzaju prób doświadczalnych. Przypomniano kompletny zestaw stałych i funkcji materiałowych dla badanego stopu NiTi.

Szczegóły dotyczące przygotowania stopu z pamięcią kształtu oraz sposób wyznaczenia podstawowych charakterystyk, wartości parametrów i krzywe charakteryzujące materiał podano w pracy Tanaki, at. al. [80]. Tutaj zostaną przypomniane najważniejsze dane. Z uwagi na koszt materiału i wykonania próbek požądane było takie przygotowanie i takiego stopu, który miałby dostatecznie dużą stabilność zachowania, a zatem i efektu pamięci kształtu. Miyazaki osiągnął požądaną powtarzalność odpowiedzi materiału poprzez właściwy dobór składu chemicznego polikrystalicznego stopu, tj. Ni_{51at%}-Ti oraz odpowiednią obróbkę termiczną polegającą na starzeniu w temperaturze 673 K przez 3600 s, i następnie studzeniu w piecu – patrz także rysunek 5.3b i komentarz do niego. Wielkość ziarna po obróbce termicznej wynosiła około 30 μm . Z tak przygotowanego stopu wykonano cienkościennie próbki rurkowe o średnicy zewnętrznej 19 mm, grubości ścianki w części pomiarowej 1.5 mm, maksymalnej średnicy zewnętrznej w części uchwytowej 26 mm, i długości całkowitej 122 mm. Pomimo zróżnicowanych i wysokich obciążeń próbki sięgających 800 MPa cały zaplanowany program badań, tj. około 250 prób, wykonano na jednej próbce rurkowej NiTi zanim uległa ona zniszczeniu.

Metodą kalorymetrii różnicowej (DSC) stwierdzono, że w tak przygotowanym stopie NiTi zachodzą dwie martenzytyczne przemiany fazowe. Przy obniżaniu temperatury próbka znajdująca się początkowo w stanie austenitycznym ulega przemianie martenzytycznej w fazę romboedryczną A \rightarrow R – dalej przemiana ta nazywana będzie przemianą R-fazową, a następnie przy dalszym obniżaniu temperatury następuje kolejna przemiana martenzytyczna fazy romboedrycznej w fazę jednoskośną R \rightarrow M – dalej przemiana ta nazywana będzie przemianą monokliniczną. Przy ogrzewaniu następują przemiany odwrotne M \rightarrow R i R \rightarrow A. Charakterystyczne temperatury przemian otrzymane przez Tanakę i innych [80] metodą DSC są następujące,

– dla przemiany R-fazowej

$$R_s^0 = 306 \text{ K}, \quad R_f^0 = 293 \text{ K},$$

$$RA_s^0 = 305 \text{ K}, \quad RA_f^0 = 293 \text{ K},$$

– dla przemiany jednoskośnej

$$M_s^0 = 253 \text{ K}, \quad M_f^0 = 208 \text{ K},$$

$$A_s^0 = 268 \text{ K}, \quad A_f^0 = 306 \text{ K}.$$

Indeks górny „0” wskazuje, że podane charakterystyczne temperatury przemian dotyczą przemian zachodzących przy zerowym makroskopowym naprężeniu zewnętrznym.

Badanie DSC pozwoliło określić w jakim zakresie temperatur powinny być wykonane testy wielosiowe. Poza badaniem DSC autorzy pracy [80] wykonali serię izotermicznych, quasi-statycznych testów rozciągania w zakresie temperatur od

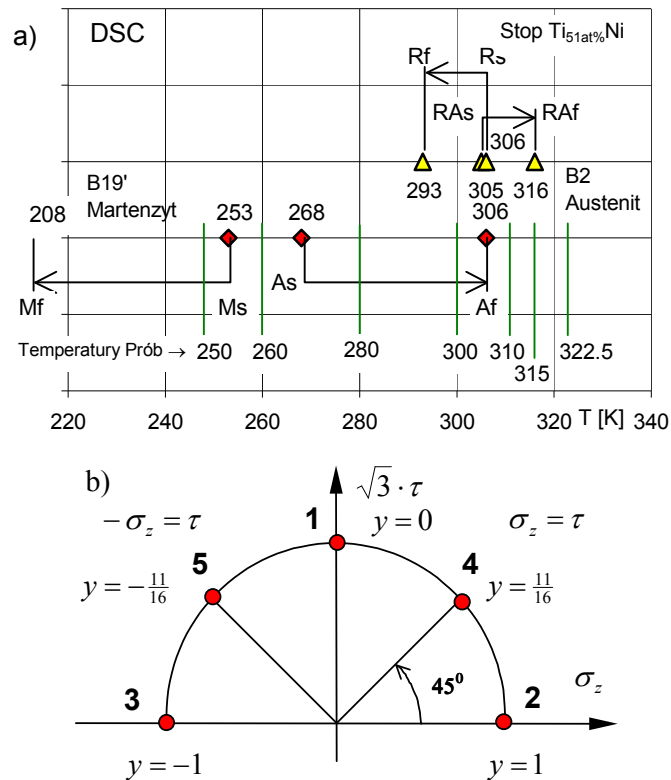
212 K do 363 K przy sterowaniu odkształceniem od 0 do 8%. A także serię testów izostatycznych przy sterowaniu temperaturą, z towarzyszącym w trakcie próby naprężeniem obciążającym w zakresie od 30 MPa do 500 MPa. Podczas testów izostatycznych próbka była chłodzona i ogrzewana w zakresie temperatur od 400 K do 200 K z prędkością 4 K/min. Wyniki tych testów nie będą tutaj szczegółowo omawiane. Wspomnimy jedynie, że efekt odkształceniowy dla przemiany R-fazowej wynosi około 0.5% i jest o rząd wielkości mniejszy od efektu odkształceniowego przemiany monoklinicznej wynoszącego około 6%. Również poziom naprężeń wymagany dla zaindukowania naprężeniem przemiany R-fazowej jest znacznie mniejszy (około 50÷100 MPa), niż w przypadku przemiany monoklinicznej (około 400÷800 MPa). Biorąc pod uwagę ryzyko zniszczenia próbki powyższe fakty doświadczalne wskazały, iż w pierwszej kolejności należy przeprowadzić program prób dla przemiany R-fazowej, a dopiero potem dla przemiany jednoskośnej. Tak też uczyniono.

Warto również wspomnieć, że poziom plateau płynięcia pseudosprężystego, uzyskiwany w izotermicznych testach Tanaki i innych różni się o około 25%, od takiego poziomu uzyskanego w testach wykonanych na próbkach rurkowych w IPPT. Podobnie występuje znacząca różnica w wielkości „umocnienia”. Przyczyny tych różnic nie są znane. Jedną z przyczyn może być sposób sterowania obciążeniem jak to wykazano w pracy [68] – por. rysunek 12.

5.2 Metodologia badań stopu NiTi w złożonych stanach naprężenia

Metodologia badań doświadczalnych stopu NiTi w złożonych stanach naprężenia została szczegółowo opisana w pracy [66], której współautorem jest również autor niniejszej rozprawy. Tutaj zostaną przypomniane najważniejsze założenia tego programu.

Wszystkie analizowane tutaj testy zostały przeprowadzone na jednej próbce rurkowej. Po każdym teście próbka była „wygrzewana” poprzez jej podgrzanie do temperatury $T = 350\text{ K}$, tj. około 50 K powyżej temperatury końca przemiany austenitycznej $A_f^0 = 306\text{ K}$ i utrzymywana w tej temperaturze przez 10 minut w celu uzyskania struktury austenitycznej po każdej próbie. Doskonały powrót do początkowego rozmiaru próbki po takim procesie, oraz obserwowana powtarzalność wyników pozwala sądzić, że kolejne cykle obciążenia nie wprowadzały znaczących zmian mikrostrukturalnych. Harmonogram badań został tak zaplanowany, aby najpierw badać zachowanie stopu NiTi przy niewielkich odkształceniach i naprężeniach, tj. w zakresie przemiany R-fazowej, a dopiero potem przejść do stosunkowo dużych odkształceń i naprężeń, tj. w zakres przemiany fazowej austenitu w martenzyt jednoskośny.



Rys. 5.1 a) Temperatry izotermicznych prób mechanicznych w porównaniu z charakterystycznymi temperaturami przemian fazowych – DSC. b) Schemat programu obciążeń mechanicznych.

Izotermiczne próby mechaniczne wykonano w temperaturach 250, 260, 280, 300, 310, 315, 322.5 K. Zakres temperatur wykonywania prób mechanicznych w stosunku do charakterystycznych temperatur przemian fazowych zachodzących w badanym stopie NiTi wyznaczonych metodą DSC zilustrowano na rysunku 5.1a. Schemat programu obciążeń mechanicznych zilustrowano na rysunku 5.1b. Próby mechaniczne wykonano przy sterowaniu naprężeniem, które narastało liniowo w czasie do pewnej wartości maksymalnej $\sigma_{ij}(t) = (\sigma_{ij}^{Max} / t_{Max}) \cdot t$ ($\sigma_{ij}^{Max}, t_{Max} = const$), a następnie liniowo zanikało do zera. Prędkość efektywnego naprężenia w każdej próbie była stała i wynosiła $\dot{\sigma}_{eff} = 1$ [MPa/s]. W każdej temperaturze wykonano próby dla pięciu proporcjonalnych ścieżek obciążenia

- ścieżka nr 1, $\tau \neq 0, \sigma_z = 0, y = 0$ skręcanie,
- ścieżka nr 2, $\tau = 0, \sigma_z \geq 0, y = 1$ rozciąganie,
- ścieżka nr 3, $\tau = 0, \sigma_z < 0, y = -1$ ściskanie,

– ścieżka nr 4, $\tau = \sigma_z, \sigma_z > 0, y = 11/16$ skręcanie z rozciąganiem,
 – ścieżka nr 5, $\tau = -\sigma_z, \sigma_z < 0, y = -11/16$ skręcanie ze ściskaniem,
 gdzie σ_z oznacza naprężenie osiowe, zaś τ naprężenie ścinające. Przy takim schemacie obciążenia naprężenie efektywne $\sigma_{ef} = \sqrt{(3/2)s_{ij}s_{ij}}$ i parametr „kierunku obciążenia” y można wyznaczyć ze wzorów – por. (3.37)

$$\sigma_{ef} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3 \cdot \tau^2}, \quad y = \frac{\sigma_z(2\sigma_z^2 + 9\tau^2)}{2(\sigma_z^2 + 3\tau^2)^{3/2}} = \text{sign}(\sigma_z) \frac{(2 + 9m^2)}{2(1 + 3m^2)^{3/2}}, \quad (5.1)$$

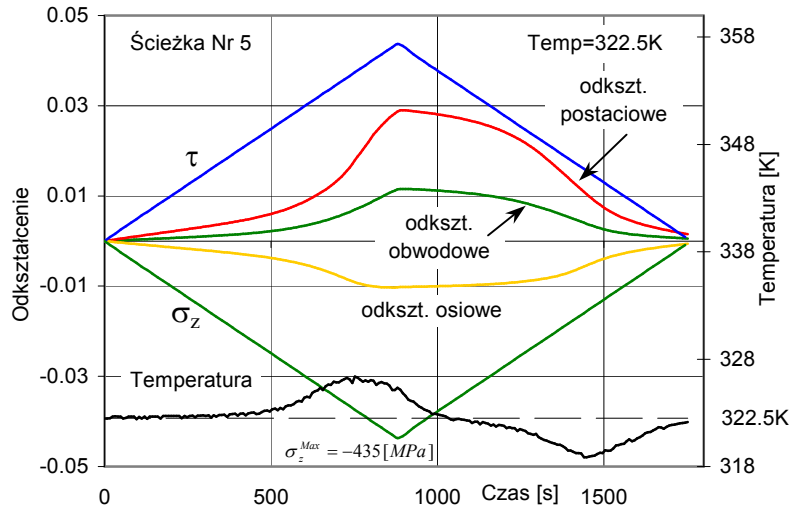
$$m = \tau / \sigma_z.$$

Taki szczególny płaski stan naprężenia wymuszającego podyktowany był ograniczeniami technicznymi maszyny wytrzymałościowej na której wykonywano próby mechaniczne, gdyż nie pozwalała ona na przykładanie obciążenia w postaci ciśnienia wewnętrznego w próbce rurkowej. To ograniczenie techniczne dla wykonywanych prób wytrzymałościowych ma następujące konsekwencje – por. [67] p. 753,

- i) nie można bezpośrednio wykazać, że materiał jest izotropowy, gdyż próby ściskania (rozciągania) ze skręcaniem nie pozwalają wygenerować zbioru ścieżek równoważnych, tj. takich że $\sigma^R(t) = R^T \sigma(t) R$; $R^T R = 1$, $\det(R) = 1$,
- ii) nie można bezpośrednio zbadać wpływu ciśnienia hydrostatycznego na zachowanie materiału, gdyż nie można przy podanym powyżej schemacie obciążenia utrzymać stałej wartości ciśnienia w trakcie próby,
- iii) nie można wywołać stanów wyłącznie rozciągania ($\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 = 0$), ani wyłącznie ściskania ($\sigma_1 < 0, \sigma_2 < 0, \sigma_3 = 0$), gdzie σ_1 i σ_2 oznaczają wartości główne tensora naprężenia ($\sigma_3 \equiv 0$), gdyż w próbach ściskania (rozciągania) ze skręcaniem gdy $\sigma_\theta \equiv 0$ wartości główne tensora naprężenia σ_1, σ_2 mają przeciwne znaki.

Pomimo tych trudności, dokonano weryfikacji przyjmowanego w niniejszej pracy w rozważaniach modelowych założenia o izotropii materiału SMA w sposób niebezpośredni.

W trakcie prób rejestrowano dziesięć kanałów danych pochodzących z maszyny wytrzymałościowej. Kanały te zawierały następujące wielkości: czas t , przemieszczenie u , obrót ϕ , siłę F , moment obrotowy M , odkształcenie osiowe ε_z , odkształcenie postaciowe ε_θ , odkształcenie obwodowe $\varepsilon_{z\theta}$, oraz dwie temperatury na końcach obszaru pomiarowego próbki T_1, T_2 . Składowe odkształcenia mierzone były tensometrycznie, zaś temperaturę mierzono za pomocą termopar. Osiągnięcie znikomego osiowego gradientu temperatury, około 0.1 K stanowiło warunek konieczny dla rozpoczęcia kolejnego procesu obciążania próbki.



Rys. 5.2 Przykładowy przebieg mierzonych sygnałów podczas prób izotermicznych. Dane otrzymane w próbie jednoczesnego ściskania i skręcania, ścieżka nr 5, wykonanej w temperaturze $T=322.5K$.

Typowy przebieg rejestrowanych danych $\sigma_z(t), \tau(t), \varepsilon_z(t), \varepsilon_\theta(t), \varepsilon_{z\theta}(t), T(t)$ uzyskiwanych podczas jednej próby izotermicznej zilustrowano na rysunku 5.2. Przebiegi czasowe wartości naprężenia osiowego i ścinającego w próbie wyznaczano wykorzystując zarejestrowany cyfrowo przebieg zmian wartości siły i momentu obrotowego za pomocą wzorów

$$\sigma_z(t) = \frac{4F(t)}{\pi(D^2 - d^2)}, \tau(t) = \frac{16M(t)}{\pi(D^4 - d^4)}, \quad D = 19[mm], d = 16[mm]. \quad (5.2)$$

Jeśli przyjmie się, że badany materiał NiTi z dobrym przybliżeniem zachowuje się izotropowo w zakresie sprężystym i niesprężystym to można oczekiwać że płaski stan naprężenia zastosowany do obciążania próbki powinien wygenerować w odpowiedzi następujący stan odkształcenia

$$\begin{bmatrix} \sigma_z & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_z & \varepsilon_{z\theta} & 0 \\ \varepsilon_{z\theta} & \varepsilon_\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_r \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

gdzie $\varepsilon_z = \varepsilon_{11}$ oznacza odkształcenie osiowe, $\varepsilon_{z\theta} = \varepsilon_{12}$ odkształcenie postaciowe, $\varepsilon_\theta = \varepsilon_{22}$ odkształcenie obwodowe zaś $\varepsilon_r = \varepsilon_{33}$ odkształcenie promieniowe.

W opisywanych próbach dokonano pomiaru i rejestracji składowych odkształcenia całkowitego $\varepsilon_z(t)$, $\varepsilon_{z\theta}(t)$, $\varepsilon_\theta(t)$, natomiast z uwagi na ograniczenia techniczne nie dokonywano pomiaru składowej promieniowej odkształcenia $\varepsilon_r(t)$. Brak doświadczalnego pomiaru składowej promieniowej odkształcenia stwarza trudności z wyliczeniem ekwiwalentnego odkształcenia zdefiniowanego wzorem $\varepsilon_{eq} = \sqrt{(2/3)\bar{\varepsilon}_{ij}\bar{\varepsilon}_{ij}}$ ($\bar{\varepsilon}_{ij}$ – składowe dewiatorowe tensora odkształcenia). W zakresie sprężystego zachowania materiału trudność tę pokonano przyjmując założenie o izotropowym sprężystym zachowaniu badanego materiału, czyli składowa promieniowa była wyznaczana pośrednio ze wzoru $\varepsilon_r(t) = -\nu\sigma_z(t)/E = -\nu\varepsilon_z(t)$. Przy obliczaniu wartości efektywnego odkształcenia w zakresie niesprężystego zachowania materiału do wyznaczenia niesprężystej składowej promieniowej ε_r^T korzystano zarówno z założenia o izotropii sprężystej, jak również z założenia o nieściślności makroskopowego tensora odkształceń fazowych $tr(\underline{\varepsilon}^T) \equiv 0$. Tego ostatniego założenia nie weryfikowano doświadczalnie w omawianym tutaj programie badań. Jednak dane literaturowe wskazują, że zmiany objętości podczas termosprężystej martenzytycznej przemiany fazowej odpowiedzialnej za zjawiska pamięci kształtu z reguły nie przekraczają 0.2% – por. np. Otsuka i Ren [54]. Zatem z doskonałym przybliżeniem można uznać że warunek $tr(\underline{\varepsilon}^T) = 0$ jest w większości przypadków stopów SMA spełniony. Ponieważ model R_L budowany był w ramach teorii małych deformacji obowiązuje addytywny rozkład tensora odkształcenia na część sprężystą i niesprężystą (fazową). Korzystając z założenia o izotropii sprężystej i bezśladowości tensora odkształceń fazowych, składowe tego tensora można wyliczyć za pomocą następujących wzorów

$$\underline{\varepsilon}^T \equiv \underline{\varepsilon} - \underline{M} \underline{\sigma}, \quad tr(\underline{\varepsilon}^T) \equiv 0, \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_z^T = \varepsilon_z - \frac{\sigma_z}{E}, \quad \varepsilon_{z\theta}^T = \varepsilon_{z\theta} - \frac{\tau}{2\mu},$$

$$\varepsilon_\theta^T = \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^e = \varepsilon_\theta - \nu\varepsilon_z^T = \varepsilon_\theta + \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{E}\right)\sigma_z, \quad \varepsilon_r^T = -(\varepsilon_\theta^T + \varepsilon_z^T).$$

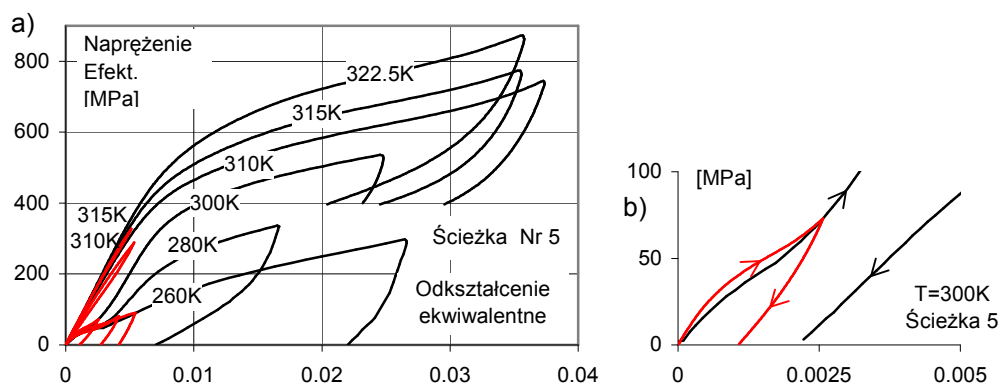
Efektywne odkształcenie fazowe przyjmuje wtedy postać

$$\varepsilon_{eq}^T \equiv [(2/3)\bar{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \bar{\underline{\varepsilon}}^T]^{1/2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sqrt{(\varepsilon_z^T - \varepsilon_\theta^T)^2 + 3\varepsilon_z^T \varepsilon_\theta^T + (\varepsilon_{z\theta}^T)^2}, \quad tr(\underline{\varepsilon}^T) \equiv 0. \quad (5.5)$$

5.3 Opracowanie danych doświadczalnych otrzymanych dla stopu NiTi w celu weryfikacji doświadczalnych założeń teoretycznych modelu R_L

Jak już wspomniano wykonano dwie serie prób. W pierwszej z nich, przy „niskich” obciążeniach i w zakresie temperatur 260÷300K, indukowana była przemiana R-fazowa, i/lub miała miejsce reorientacja R-fazy. W drugiej, przy wysokich

obciążeniach i w zakresie temperatur 310÷322.5K miało miejsce indukowanie przemiany monoklinicznej. Na rysunku 5.3 zestawiono wykresy naprężenie efektywne – całkowite odkształcenie ekwiwalentne dla piątej ścieżki obciążenia (skręcanie-ściskanie) w zakresie temperatur 260÷322.5 K – por. wzór (5.1)₁ i wzór (5.5) zastosowany do składowych odkształcenia całkowitego. Wykresy sporządzono na podstawie danych uzyskanych w pierwszej serii przy „niskich” (kolor czerwony) i w drugiej serii przy „wysokich” obciążeniach. Aby lepiej zilustrować różnice w odpowiedzi materiału w pierwszej i drugiej serii, obok pokazano wykresy dla piątej ścieżki obciążenia w zbliżeniu. Należy zwrócić uwagę, że pomiędzy próbami w których uzyskano krzywe porównywane na rysunku 5.3b było wykonanych kilkadziesiąt innych prób w złożonych stanach naprężenia. Można stwierdzić, że powtarzalność w odpowiedzi materiału, dzięki zastosowanej obróbce metalurgicznej była bardzo dobra. Więcej szczegółów odnośnie sposobu pozyskania danych doświadczalnych o zachowaniu stopu NiTi można znaleźć w pracy [66], której współautorem jest autor niniejszej rozprawy. Raniecki i inni opracowali dane eksperymentalne w postaci sygnałów $t, T(t), \sigma_z(t), \tau(t), \varepsilon_z(t), \varepsilon_\theta(t), \varepsilon_{z\theta}(t)$ uzyskane w pierwszej serii prób przy niskich obciążeniach w celu analizy zjawiska R-plastyczności, tj. efektów odkształceniowych towarzyszących reorientacji R-fazy w temperaturach 260 i 280 K oraz powstawaniu i reorientacji R-fazy w temperaturze 300 K. Wyznaczyli oni wartości stałych sprężystości R-fazy dla różnych ścieżek obciążenia, dokonując w ten sposób weryfikacji dopuszczalności założenia o izotropii sprężystej tej fazy w polikrystalicznym materiale NiTi. Wyznaczyli powierzchnie graniczne reorientacji stwierdzając, iż nie podlegają one opisowi



Rys. 5.3 a) Porównanie wykresów naprężenie efektywne – odkształcenie ekwiwalentne otrzymanych dla stopu NiTi w próbach izotermicznego jednoczesnego ściskania i skręcania, ścieżka nr 5, w zakresie temperatur $T=260\div322.5$ K. Kolorem czerwonym zaznaczono wykresy otrzymane w próbach przy niskich obciążeniach. b) Porównanie wykresu naprężenie-odkształcenie otrzymanego przy niskich i wysokich obciążeniach, ścieżka nr 5, $T=300$ K.

modelem Hubera-Misesa. Aby móc z dobrym przybliżeniem opisywać te powierzchnie wykorzystali koncepcję funkcji kształtu $f(y)$ – por. także (3.34). Zaproponowali oni prawo płynięcia reorientacji wyrażone funkcją izotropową, jednorodną stopnia zerowego względem tensora naprężenia postulując w ten sposób, że efekty anizotropii indukowanej odkształceniem można w pierwszym przybliżeniu zaniedbać. Z uwagi na stwierdzone doświadczalnie niewielkie zmiany objętościowe odkształceń fazowych prawo płynięcia zostało zaproponowane w postaci niezależnej od ciśnienia hydrostatycznego. Autorzy porównali stosunki przyrostów składowych odkształcenia niesprężystego przewidywane modelowym prawem płynięcia reorientacji ze stosunkami przyrostów, które otrzymano w rzeczywistych próbach. Jakkolwiek zgodność danych doświadczalnych z modelowymi była bardzo dobra w przypadku niektórych ścieżek obciążenia, to w przypadku innych zaobserwowano znaczące rozbieżności. Autorzy zasugerowali, że wprowadzenie do modelu dodatkowej zmiennej w postaci kinematycznego tensora wzmocnienia¹, a zatem kinematycznego modelu płynięcia reorientacji, pozwoliłoby lepiej opisać ilościowo efekty spowodowane ich zdaniem przez indukowaną odkształceniem anizotropię materiału. Szczegółowy zakres i wyniki tych prac zostały opublikowane przez Ranieckiego i innych w oryginalnym artykule [67].

Nie dokonano jak dotychczas szczegółowego opracowania „surowych” danych eksperymentalnych uzyskanych w drugiej serii prób przy wysokich obciążeniach. Dane te zostały opracowane częściowo, w takim zakresie w jakim to było niezbędne do zidentyfikowania stałych i funkcji materiałowych wymaganych przez model R_L do zamodelowania efektów związanych z monokliniczną przemianą martensytyczną. Wyniki takiej identyfikacji zostały opublikowane w pracy Ranieckiego i innych [68], której współautorem jest autor niniejszej rozprawy. Tutaj zostanie omówiony proces weryfikacji doświadczalnej podstawowych założeń teoretycznych modelu R_L w przypadku przemiany monoklinicznej zachodzącej w stopie NiTi. W szczególności założenia o izotropii sprężystej, założenia o dopuszczalności reprezentacji matematycznej powierzchni płynięcia pseudosprężystego przy wykorzystaniu pojęcia funkcji kształtu $f(y)$, założenia o izotropii niesprężystej, tj. dopuszczalności reprezentacji makroskopowego tensora odkształceń fazowych związanego z przemianą monokliniczną za pomocą izotropowej funkcji tensorowej stopnia zerowego względem tensora naprężenia. W tym celu zrealizowano program zadań podobny do tego przyjętego w pracy [67], w zastosowaniu do danych doświadczalnych pochodzących z prób przy wysokich obciążeniach.

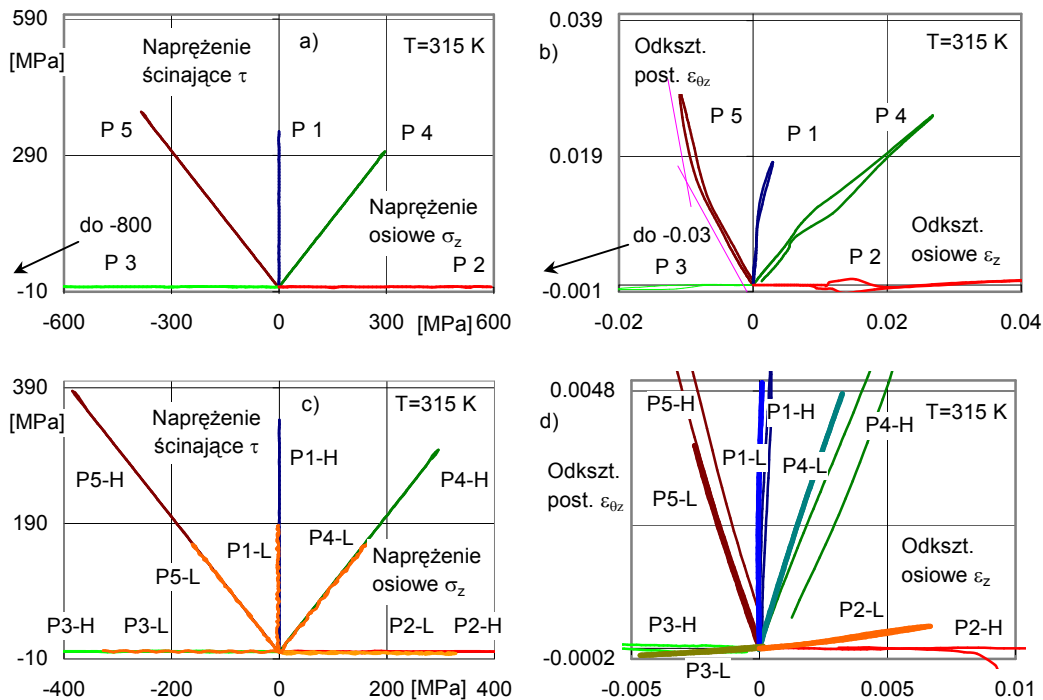
Do opracowania danych doświadczalnych wykorzystano program „Dadisp”. Jest to zorientowane graficznie środowisko, w którym poszczególne operacje zadawane przez użytkownika wykonywane są od razu na całych seriach danych. Wyniki

¹ W literaturze angielskojęzycznej back stress.

poszczególnych operacji wyświetlane są w postaci wykresów w kolejnych oknach. Ten sposób przetwarzania danych jest szczególnie dogodny, gdyż pozwala na bieżącą „kontrolę optyczną” poprawności wykonywania poszczególnych operacji, a zatem bardzo szybką eliminację ewentualnych błędów. Inną zaletą tego oprogramowania jest szybkość jego działania. Przy typowej wielkości jednej serii pomiarowej składającej się z ośmiu kanałów i 10000 punktów pomiarowych użycie, np. oprogramowania Excel staje się niepraktyczne.

W pierwszej kolejności sprawdzono czy ścieżki obciążenia próbki istotnie były ścieżkami proporcjonalnymi w przestrzeni składowych tensora naprężenia. W tym celu sporządzono wykresy ścieżek obciążenia we współrzędnych $\sigma_z \leftrightarrow \tau$. Zestawienie tych wykresów dla 5 ścieżek dla temperatury 315 K pokazano na rysunku 5.4a. Na podstawie tego rysunku można stwierdzić, że jakość sterowania obciążeniem podczas prób była doskonała. W przypadku prób wykonanych w temperaturach 310K i 322.5K jakość sterowania obciążeniem była taka sama.

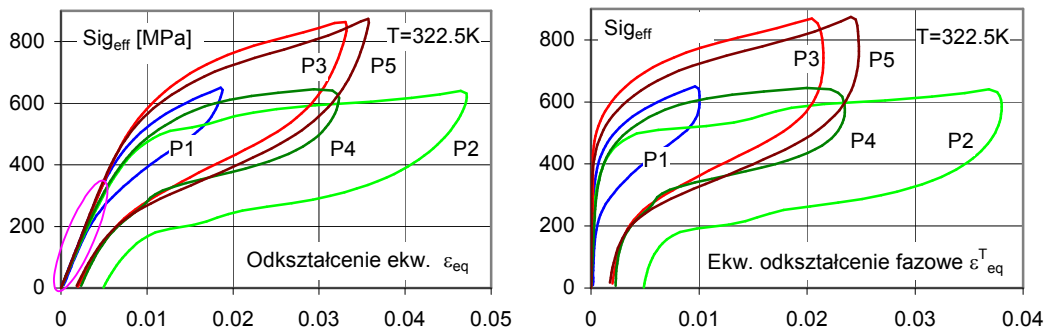
Na rysunku 5.4b pokazano odpowiedź odkształceniową materiału na zadane wymuszenie siłowe dla pięciu ścieżek obciążenia, tj. wykresy $\varepsilon_z \leftrightarrow \varepsilon_{z\theta}$. Inspekcja tego rysunku wskazuje, iż odpowiedź materiału może być podzielona na dwa podzakresy. Pokazano to symbolicznie dwiema różowymi liniami dla ścieżki obciążenia nr 5, patrz rysunek 5.4b. W pierwszym zakresie, dla wartości bezwzględnych składowych odkształcenia od 0 do około 0.5%, materiał zachowuje się sprężyste. W drugim zakresie, dla wartości bezwzględnych składowych odkształcenia od około 0.5% do maksimum 4%, materiał płynie pseudosprężyste na skutek zachodzenia monoklinicznej przemiany martenzytycznej. Na rysunku 5.4 c i d porównano wymuszenia siłowe i odpowiedź materiału uzyskaną w serii doświadczeń przy niskich obciążeniach, z tymi otrzymanymi w serii przy wysokich obciążeniach próbki. Odpowiedź materiału uzyskaną w serii prób przy niskich obciążeniach oznaczono indeksem „L” zaś uzyskaną w serii przy wysokich obciążeniach indeksem „H”. Porównanie to pozwala stwierdzić, że z dobrym przybliżeniem można przyjąć, że historia obciążenia próbki SMA nie ma wpływu na zachowanie próbki polikrystalicznej NiTi. Największa różnica w odpowiedzi próbki wystąpiła dla ścieżki nr 2. Należy zwrócić uwagę, że pomiędzy odpowiadającymi sobie próbami dla konkretnej ścieżki obciążenia np. skręcania P1-L i P1-H miało miejsce około 50 prób dla innych schematów obciążenia, a zatem miała miejsce stosunkowo złożona historia obciążenia próbki. Wyniki otrzymane dla innych temperatur mają ten sam charakter i jakość co omówione tutaj wykresy dla temperatury 315 K. Krzywe doświadczalne wykreślone na rysunku 5.4d wskazują, iż z doskonałym przybliżeniem można uznać, że stosunek składowych odkształcenia $\varepsilon_{z\theta} / \varepsilon_z$ pozostaje stały w zakresie sprężystego zachowania polikrystalicznego stopu NiTi. Ten stały stosunek składowych odkształcenia, w przypadku 4 i 5 ścieżki obciążenia, ma miejsce przy zachowaniu stałego stosunku τ / σ_z . Wskazuje to na



Rys. 5.4 Rzeczywiste ścieżki obciążenia i odpowiedź odkształceniowa stopu NiTi w przypadku prób wykonanych w temperaturze 315K. a) Obciążenie siłowe próbki. b) Indukowana obciążeniem siłowym odpowiedź odkształceniowa uzyskana w serii prób przy wysokich obciążeniach. c) i d) Porównanie obciążeń siłowych próbki i uzyskanej odpowiedzi odkształceniowej materiału w seriach prób przy „niskim” i „wysokim” obciążeniu. Symbol „L” oznacza niskie, zaś symbol „H” wysokie obciążenie.

stałą wartość współczynnika Poissona stopu NiTi w zakresie jego sprężystego zachowania. Wykresy zawarte na rysunku 5.4d pokazują, że przyłożenie naprężenia skręcającego, ścieżka 1, nie wywołuje odkształceń osiowych – krzywe P1-L, P1-H. Podobnie przyłożenie naprężenia rozciągającego i ściskającego, ścieżki 2 i 3, nie wywołuje odkształceń postaciowych – krzywe P3-L, P3-H, P2-H (wystąpiło niewielkie odkształcenie postaciowe próbki w przypadku krzywej P2-L). Izotropowa teoria sprężystości przewiduje brak sprzężenia pomiędzy odkształceniowymi efektami osiowymi i postaciowymi. Zatem doskonały brak sprzężenia pomiędzy odkształceniem osiowym i postaciowym dla ścieżek 1, 2 i 3 w przypadku prób dla stopu NiTi wskazuje na akceptowalność założenia modelu R_L o izotropii sprężystej materiałów z pamięcią kształtu.

W kolejnym kroku obróbki danych doświadczalnych sporządzono wykresy naprężenie–odkształcenie odpowiadających sobie składowych $\sigma_z \leftrightarrow \epsilon_z, \tau \leftrightarrow \epsilon_{z\theta}$



Rys. 5.5 Wykresy dla pięciu proporcjonalnych ścieżek obciążenia w temperaturze $T=322.5$ K. a) Naprężenie efektywne \leftrightarrow odkształcenie ekwiwalentne. b) Naprężenie efektywne \leftrightarrow odkształcenie ekwiwalentne fazowe.

dla pięciu ścieżek i trzech temperatur $T = 310, 315, 322.5$ K. A następnie sporządzono wykresy naprężenia efektywnego w funkcji odkształcenia ekwiwalentnego $\sigma_{eff} \leftrightarrow \varepsilon_{eq}$. Na rysunku 5.5a pokazano zestawienie takich wykresów dla 5 ścieżek obciążenia w temperaturze 322.5K – różowym kolorem zaznaczono obszar sprężystego zachowania materiału. Wykresy te wskazują, na liniowo sprężyste zachowanie stopu NiTi. Zatem potwierdzenie eksperymentalne znajduje założenie jakiego dokonano przy opracowywaniu rodziny modeli R_L , o liniowo sprężystym zachowaniu stopów z pamięcią kształtu w zakresie ich sprężystego zachowania.

Wykresy odpowiednich składowych tensorów naprężenia i odkształcenia posłużyły do wyznaczania dwóch stałych sprężystych izotropowej teorii sprężystości modułu Younga E i modułu sztywności postaciowej 2μ . Stałe te wyznaczano operacyjnie jako wartość nachylenia stycznej do krzywej naprężenie-odkształcenie, przy czym jako bazę przyjęto odcinek krzywej ograniczony wartością odkształceń $\varepsilon \in < 0, 0.001 >$. Otrzymane wartości stałych sprężystych zestawiono w tabeli 5.1.

Tabela 5.1. Własności sprężyste stopu NiTi (offset 0.1%).

Ścieżka	Nr 1	Nr 2	Nr 3	Nr 4	Nr 5
T=310 [K]					
2μ [GPa]	42.7	-	-	43.1	42.5
E [GPa]	-	61.2	62.3	53.5	62.3
T=315 [K]					
2μ [GPa]	45.5	-	-	45.6	45.0
E [GPa]	-	62.9	67.3	57.2	66.9
T=322.5 [K]					
2μ [GPa]	47.2	-	-	47.5	47.1
E [GPa]	-	66.9	68.3	58.8	70.5

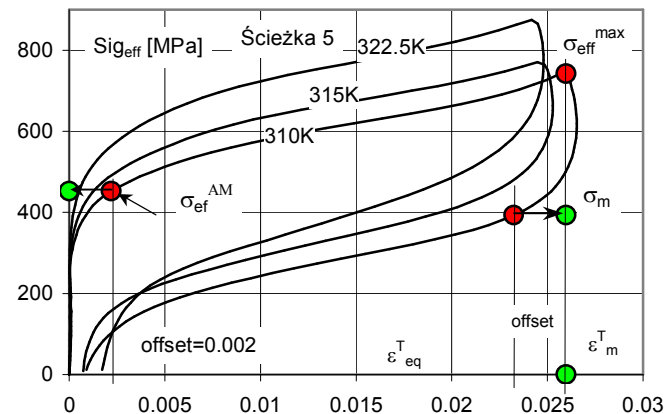
Przegląd danych w tabeli 5.1 pokazuje, że maksymalna różnica pomiędzy wartościami modułu Younga nie przekracza 9% licząc od wartości średniej, przy różnych kierunkach obciążenia próbki. W przypadku modułu sztywności postaciowej jego wyznaczone z danych doświadczalnych wartości praktycznie nie zależą od kierunku obciążenia materiału. Zatem można stwierdzić, iż wyznaczone z danych doświadczalnych wartości stałych sprężystości, podobnie jak dane zawarte na rysunku 5.4d, nie wskazują na konieczność uwzględniania anizotropii sprężystej materiału. Ścisłego w sensie metodologicznym potwierdzenia założenia o izotropii sprężystej i wielkości ewentualnych odchyłek od tego założenia można będzie dokonać dopiero po wykonaniu testów proporcjonalnych na próbkach rurkowych z obciążeniem w postaci ciśnienia wewnętrznego, gdyż wtedy dopiero można wygenerować ścieżki równoważne, patrz tekst poniżej wzoru (5.1).

Dysponując wartościami stałych sprężystości wyznaczono poszczególne składowe tensora odkształceń fazowych ze wzorów (5.4), a następnie przebieg ekwiwalentnego odkształcenia fazowego ze wzoru (5.5). Wykorzystano przy tym założenie o addytywności odkształceń sprężystych i niesprężystych, oraz o braku zmian objętościowych tensora odkształceń fazowych – por. (5.4)₂. Sporządzono wykresy efektywne naprężenie – ekwiwalentne odkształcenie fazowe $\sigma_{eff} \leftrightarrow \varepsilon_{eq}^T$.

Wykresy otrzymane dla 5 ścieżek dla temperatury $T = 322.5 K$ przedstawiono na rysunku 5.5b. Wykorzystując te krzywe wyznaczono krytyczne naprężenia efektywne początku płynięcia pseudosprężystego na skutek rozpoczęcia monoklinicznej przemiany fazowej wprost σ^{AM} oraz krytyczne naprężenia efektywne rozpoczęcia

przemiany odwrotnej σ_m przy odciążaniu próbki i przy niekompletnej uprzedniej przemianie fazowej wprost. Gdyby na skutek uprzedniego obciążenia zaszła kompletna przemiana wprost, to wtedy σ_m byłoby równe naprężeniu krytycznemu σ^{MA} . W takim wypadku

krzywa naprężenie-odkształcenie ukazałaby tzw. „pełną” pętlę histerezy. W omawianych tutaj badaniach



Rys. 5.6 Schemat operacyjnego wyznaczania naprężeń krytycznych początku płynięcia pseudo-sprężystego σ^{AM} , tj. tutaj rozpoczęcia przemiany fazowej wprost oraz krytycznego naprężenia rozpoczęcia przemiany odwrotnej σ_m .

doświadczalnych uzyskanie takiej

Tabela 5.2. Efektywne naprężenia krytyczne płynięcia pseudosprężystego $\sigma^{AM}(y, T)$ [MPa], offset $\varepsilon_{eq}^T = 0.2\%$.

Ścieżka	Nr 3	Nr 5	Nr 1	Nr 4	Nr 2
T=310 [K]	510	462	407	380	329
T=315 [K]	570	500	440	410	419
T=322.5 [K]	604	558	491	459	458

pełnej pętli histerezy nie było możliwe z uwagi na ryzyko zniszczenia próbki. Dlatego uzyskano dane wyłącznie dla „niepełnych” pętli histerezy.

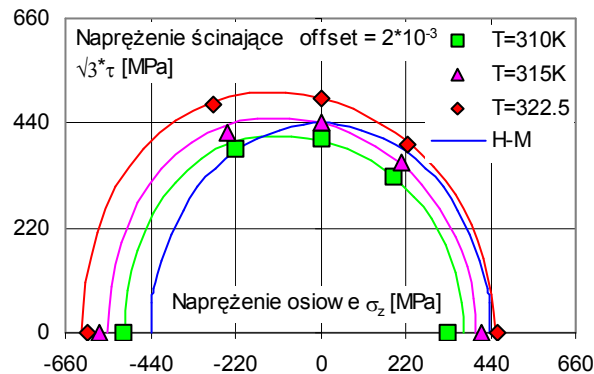
Metodą ustalonego offsetu ekwiwalentnego odkształcenia fazowego, który został przyjęty na poziomie 0.002 wyznaczono efektywne naprężenia krytyczne płynięcia pseudosprężystego. Schematycznie operacyjny proces wyznaczania naprężeń krytycznych płynięcia pseudosprężystego związanego z przemianą fazową wprost i odwrotną pokazano na rysunku 5.6. Wartości efektywnych naprężeń krytycznych płynięcia pseudosprężystego wprost $\sigma^{AM}(y, T)$, w zależności od temperatury i kierunku obciążenia – parametru y zestawiono w tabeli 5.2.

W analogiczny sposób metodą ustalonego offsetu (0.002) wyznaczono krytyczne wartości składowych tensora naprężenia σ_z^{AM}, τ^{AM} przy jakich rozpoczyna się proces pseudosprężystego płynięcia dla pięciu ścieżek i trzech temperatur. Tak uzyskane punkty doświadczalne naprężeń krytycznych (A→M) zaznaczono na wykresie we współrzędnych

$\sigma - \sqrt{3} \tau$ na rysunku 5.7.

Punkty tego typu z definicji wyznaczają w przestrzeni składowych naprężeń doświadczalną powierzchnię początku płynięcia pseudosprężystego. Dla porównania na tym samym rysunku wykreślono hipotetyczną powierzchnię odpowiadającą warunkowi Hubera-Misesa

(teoria J_2'), do której należałby punkt $\sigma^{AM}(y=0, T=315K)$ – ścieżka nr 1 skręcanie. Jak można stwierdzić analizując dane na rysunku 5.7,



Rys. 5.7 Wartości krytyczne naprężeń płynięcia pseudosprężystego A→M. Punktami zaznaczono wartości uzyskane doświadczalnie, Linie reprezentują przewidywane przez model R_L powierzchnie płynięcia uzyskane dla zidentyfikowanej dla badanego stopu NiTi i przemiany monoklinicznej funkcji kształtu $f(y)$. H-M oznacza hipotetyczną powierzchnię Hubera-Misesa.

punkty doświadczalne naprężeń krytycznych otrzymane dla innych ścieżek obciążenia w temperaturze 315 K nie układają się na tej hipotetycznej powierzchni Hubera-Misesa. Podobna sytuacja wystąpiła dla temperatury 310 i 322.5 K.

Wynik ten stanowi potwierdzenie wcześniejszych rezultatów doświadczalnych podawanych w literaturze odnośnie występowania dużych odchyłek naprężeń krytycznych płynięcia pseudosprężystego od powierzchni przewidywanej przez teorię J'_2 . Orgeas i Favier w swojej pracy [51] podają, że badany przez nich stop z pamięcią kształtu NiTi wykazywał inną granicę pseudosprężystego płynięcia w rozciąganiu, a inną w ściskaniu. Przy czym różnica ta osiągała wartość około 40%. Występowanie znacznego odstępstwa od warunku Hubera-Misesa stwierdzili również Sittner i inni, oraz Rogueda w przypadku stopów na bazie CuZnX o czym wspomniano już wcześniej w rozdziale 3, sekcja 3.2. Te fakty eksperymentalne wskazują, iż w celu znaczącego polepszenia dokładności modelowania zachowania stopów z pamięcią kształtu pożądanym jest modelowe uwzględnienie zależności granicy płynięcia pseudosprężystego, nie tylko od drugiego niezmiennika dewiatora naprężenia ale również od kierunku dewiatora tensora naprężenia.

Przy budowie modelu konstytutywnego poprawnie przewidującego opisany powyżej efekt korzystnym jest pozostawanie, o ile to możliwe, w ramach teorii izotropowej, z uwagi na płynące stąd korzyści. Należy też wziąć pod uwagę stwierdzony doświadczalnie fakt, że efekty objętościowe związane z termosprężystą przemianą fazową są małe i w związku z tym uzasadnione jest w pierwszym przybliżeniu pominięcie wpływu ciśnienia na zachowanie stopów z pamięcią kształtu (pominięcie wpływu pierwszego niezmiennika tensora naprężenia). Przynajmniej do czasu uzyskania wiarygodnych danych doświadczalnych o takim wpływie.

Przy przyjęciu powyższej strategii sposób postępowania wskazuje ogólna teoria funkcji izotropowych. Zgodnie z jej twierdzeniami izotropowa funkcja skalarna – tutaj powierzchnia graniczna pseudosprężystości, argumentu tensorowego – tutaj naprężenia, niezależna od śladu argumentu tensorowego – tutaj ciśnienia, może być wyłącznie funkcją drugiego i trzeciego niezmiennika dewiatora argumentu tensorowego – dewiatora naprężenia. Jeżeli ogólnie zostanie przyjęte, że powierzchnia graniczna określona jest poprzez drugi i trzeci niezmiennik dewiatora tensora naprężenia równaniem postaci

$$F(J'_2(\underline{\sigma}), J'_3(\underline{\sigma}), T) = 0, \quad (5.6)$$

$$J'_2 \equiv tr(\underline{\sigma}^2), \quad J'_3 \equiv det(\underline{\sigma}) = \frac{1}{3}tr(\underline{\sigma}^3), \quad \underline{\sigma} = dev(\underline{\sigma}),$$

to jeśli zostanie przyjęte, że jej najogólniejsza akceptowalna forma geometryczna ma postać „gwiazdy” wtedy można ją zapisać w postaci

$$F^{AM} = G_0^*(\underline{\sigma}, T) - 1 = 0. \quad (5.7)$$

Przy czym, funkcja G_0^* jest funkcją jednorodną stopnia pierwszego względem tensora naprężenia, tj. spełnia warunek $G_0^*(\lambda \underline{\sigma}, T) = \lambda G_0^*(\underline{\sigma}, T)$. Szkic dowodu

powyższego twierdzenia polega na zaobserwowaniu, że jeśli powierzchnia graniczna ma postać gwiazdy to położenie punktu leżącego na tej powierzchni można opisać parametrycznie za pomocą iloczynu pewnej funkcji określającej kierunek „tensora promienia” w przestrzeni składowych naprężenia oraz liczby skalarnej określającej długość tensora promienia. Zauważając dalej, że funkcja kierunku tensora promienia jest funkcją jednorodną stopnia zerowego zaś długość tensora promienia jest funkcją jednorodną stopnia pierwszego względem tensora promienia to dochodzi się do wniosku podanego powyżej. Wracając do powierzchni granicznej płynięcia pseudosprężystego. Dewiator naprężenia można przedstawić parametrycznie w postaci

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma' \underline{\underline{n}}_\sigma = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{ef} \underline{\underline{n}}_\sigma, \quad \underline{\underline{n}}_\sigma = \underline{\underline{\sigma}} / \sigma', \quad \sigma' = \sqrt{(\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{\sigma}})} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_{ef}, \quad (5.8)$$

$$tr(\underline{\underline{n}}_\sigma) = 0, \quad tr(\underline{\underline{n}}_\sigma \underline{\underline{n}}_\sigma) = 1, \quad \sigma_{ef} = \sqrt{(3/2)J'_2},$$

$\underline{\underline{n}}_\sigma$ oznacza wersor kierunku dewiatora tensora naprężenia. Klasyczny warunek płynięcia niesprężystego Hubera-Misesa, który jest niezależny od kierunku dewiatora naprężenia można wyrazić następująco

$$F^{H-M}(J'_2(\underline{\underline{\sigma}})) = \sigma_{ef} / \sqrt{3} k_{HM} - 1 = 0,$$

gdzie k_{HM} oznacza granicę płynięcia niesprężystego przy czystym ścinaniu, którą zazwyczaj traktuje się jako parametr materiałowy i wyznacza z doświadczenia. Powyższa postać warunku Hubera-Mises dostarcza wskazówki w jakiej postaci zaproponować prawo płynięcia zależne od kierunku dewiatora naprężenia $\underline{\underline{n}}_\sigma$

$$F^{AM}(J'_2, J'_3) = \sigma_{ef} / \sigma^{AM}(\underline{\underline{n}}_\sigma, T) - 1 = (\sigma_{ef} / \sqrt{3} k(T)) f^*(\underline{\underline{n}}_\sigma, T) - 1 = 0, \quad (5.9)$$

$$f^*(\underline{\underline{n}}_\sigma, T) = \sqrt{3} k(T) / \sigma^{AM}(\underline{\underline{n}}_\sigma, T),$$

gdzie $k(T)$ oznacza zależną od temperatury granicę płynięcia pseudosprężystego przy czystym ścinaniu, zaś $\sigma^{AM}(\underline{\underline{n}}_\sigma, T)$ efektywne naprężenie płynięcia pseudosprężystego dla kierunku obciążenia proporcjonalnego określonego wersorem kierunku $\underline{\underline{n}}_\sigma$. Wygodniej jest w miejsce tensorowego parametru kierunku $\underline{\underline{n}}_\sigma$

dewiatora naprężenia operować skalarnym parametrem kierunku $y(\underline{\underline{\sigma}}) \equiv \frac{3\sqrt{6} J'_3}{(J'_2)^{3/2}} -$

por. (3.37), zależnym tylko od niezmienników dewiatora naprężenia. Wtedy warunek płynięcia pseudosprężystego $F^{AM} = 0$ przyjmuje postać

$$F^{AM} = \sigma_{ef} f(y, T) / \sqrt{3} k(T) - 1 = 0. \quad (5.10)$$

Funkcja $f(y, T)$ zdefiniowana wzorem

$$f(y, T) \equiv \frac{\sigma^{AM}(y=0, T)}{\sigma^{AM}(y, T)}, \quad f(0, T) = 1, \quad (5.11)$$

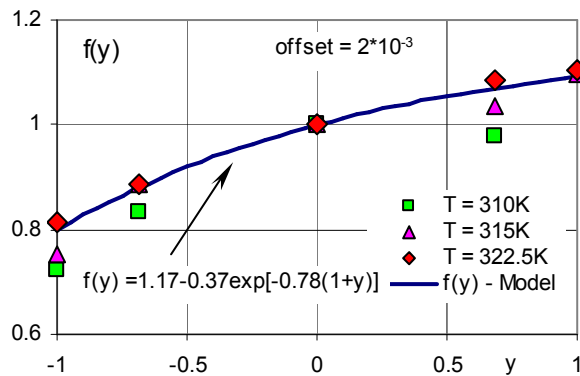
nazywana jest „funkcją kształtu” powierzchni granicznej. Funkcję tę należy wyznaczyć dla każdego stopu SMA na podstawie wyników doświadczalnych. W tym celu niezbędna jest znajomość wartości efektywnego naprężenia płynięcia pseudosprężystego przy czystym ścinaniu $\sigma^{AM}(y=0, T) = \sqrt{3}k(T)$ oraz dla innych kierunków obciążenia scharakteryzowanych parametrem y . Opisane podejście modelowe zmierzające do uwzględnienia zależności granicy płynięcia

od kierunku dewiatora naprężenia zostało zaproponowane przez Ranieckiego i Lexcellenta przy budowie modelu R_L z 1998 roku. Tutaj podano je w nieco ogólniejszej postaci przy czym wzór (5.10) to odpowiednik wzoru (3.36)₁, zaś wzór (5.11) to nieco ogólniejsza wersja wzoru (3.34). Wyniki doświadczeń dla stopu NiTi w warunkach obciążeń proporcjonalnych pozwalają ocenić efektywność powyższego podejścia modelowego.

Wykorzystując wartości efektywnych naprężeń granicznych podane w tabeli 5.2 wyznaczono doświadczalne wartości funkcji $f(y, T)$ dla stopu NiTi dla przemiany monoklinicznej jako odpowiednie stosunki naprężenia krytycznego pseudosprężystości w ścinaniu $\sigma^{AM}(y=0, T)$ (ścieżka 1) do naprężenia krytycznego dla innych kierunków proporcjonalnego obciążenia $\sigma^{AM}(y, T)$. Tak otrzymane punkty doświadczalne wartości funkcji $f(y, T)$ zaznaczono punktami na rysunku 5.8. Obserwacja danych doświadczalnych zawartych na rysunku 5.8 pozwoliła stwierdzić, że z dobrym przybliżeniem można zaproponować empiryczną postać funkcji kształtu dla stopu NiTi i przemiany monoklinicznej niezależną od temperatury i określoną wzorem matematycznym jak poniżej, patrz także Raniecki i inni [68]

$$f(y) = 1.17 - 0.37 \exp[-0.78(y + 1)]. \quad (5.12)$$

Przewidywania modelowe wartości funkcji kształtu $f(y)$ dla stopu NiTi i przemiany monoklinicznej wyznaczone ze wzoru (5.12) zaznaczono na rysunku 5.8 linią ciągłą. Wykorzystując zidentyfikowaną dla badanego stopu NiTi i przemiany monoklinicznej funkcję kształtu (5.12) liniami wykreślono na rysunku 5.7



Rys. 5.8 Funkcja kształtu $f(y)$ dla stopu NiTi i przemiany monoklinicznej. Punktami zaznaczono wartości uzyskane doświadczalnie. Ciągła linia reprezentuje przewidywanie modelu R_L - por. wzór (5.8).

powierzchnie graniczne pływnięcia pseudosprężystego stanowiące przewidywania teoretyczne modelu R_L – por. (5.10).

Porównanie położenia punktów doświadczalnych z modelowymi liniami powierzchni granicznych na rysunku 5.7 wskazuje, że koncepcja teoretyczna użycia izotropowej powierzchni granicznej zależnej od drugiego i trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia (funkcji kształtu) pozwala dobrze opisać wyniki doświadczeń uzyskane dla stopu NiTi bez konieczności odwoływania się do anizotropowej funkcji opisującej powierzchnie graniczne pseudosprężystości. Optymalna dla stopów z pamięcią kształtu, parametryczna postać matematyczna funkcji kształtu $f(y)$ oraz ilość występujących w niej parametrów stanowi otwarty problem naukowy.

Powierzchnia graniczna początku pływnięcia pseudosprężystego F^{AM} przewidywana na gruncie teoretycznym przez model R_L określona jest warunkiem zerowania się siły termodynamicznej przemiany fazowej π^f przy $z=0$, tj. wzorem (3.15). Po podstawieniu do tego wzoru wyrażenia na potencjał g^{ph} określony wzorem (3.32) otrzymuje się teoretyczny warunek pływnięcia pseudosprężystego w postaci – por. także (3.36)₁

$$F^{AM} = \sigma_{ef} f(y) - (\rho/\gamma)(\Delta s^* - \bar{s}_0)(T - M_s^0) = 0. \quad (5.13)$$

Porównując powyższe ze wzorem (5.10) otrzymuje się

$$\sqrt{3}k(T) = (\rho/\gamma)(\Delta s^* - \bar{s}_0)(T - M_s^0) = \sigma^{AM}(y=0, T). \quad (5.14)$$

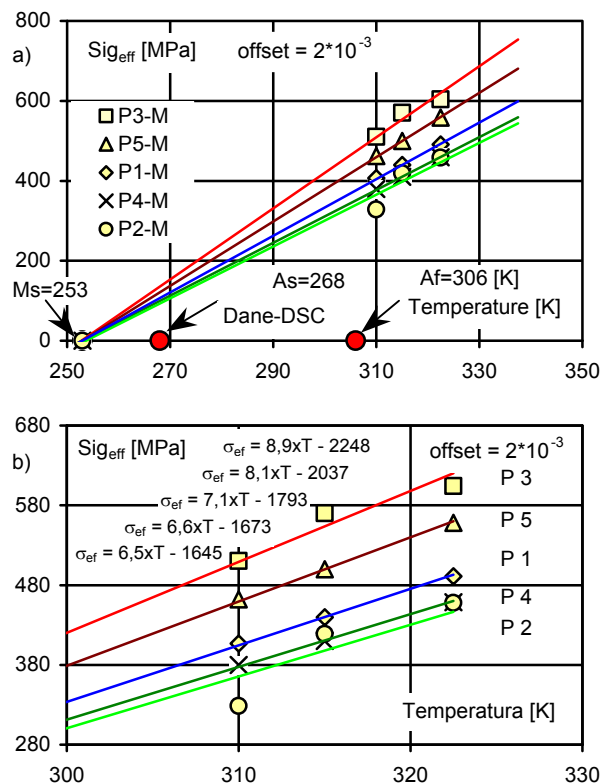
Zatem model R_L przewiduje liniową zależność od temperatury efektywnego naprężenia pływnięcia pseudosprężystego przy czystym ścinaniu. Zależność ta stanowi odpowiednik dobrze znanej w mechanice cieczy relacji Clausiusa-Clapeyrona (CC). Przy czym w przypadku rozwijanej tutaj teorii materiałów z pamięcią kształtu występuje nie jedna ale nieskończenie wiele linii Clausiusa-Clapeyrona, gdyż ich nachylenie na wykresie we współrzędnych $\sigma_{eff} - T$ zależy od kierunku proporcjonalnego obciążenia y zgodnie ze wzorem (3.36)₁. Wielkość nachylenia linii CC stanowi dobrą podstawę do wyznaczania stałych materiałowych modelu R_L gdyż jak wynika ze wzorów (3.36)

$$d\sigma^{AM}(y, T)/dT = \rho(\Delta s^* - \bar{s}_0)/(\gamma f(y)), \quad (5.15)$$

$$d\sigma^{MA}(y, T)/dT = \rho(\Delta s^* + \bar{s}_0)/(\gamma f(y)).$$

W celu weryfikacji doświadczalnej słuszności założeń modelowych prowadzących do związków Clausiusa-Clapeyrona (5.13) wartości efektywnych naprężeń krytycznych pływnięcia pseudosprężystego zawarte w tabeli 5.2 zaznaczono punktami na rysunku 5.9 we współrzędnych $\sigma_{eff} - T$. Punkty te dla poszczególnych ścieżek obciążeń proporcjonalnych stanowią elementy „doświadczalnych” krzywych Clausiusa-Clapeyrona. Próba wyznaczenia nachyleń prostych CC dla każdej ścieżki proporcjonalnej tylko na podstawie trzech dostępnych punktów doświadczalnych z

temperatur 310, 315 i 322.5 K metodą najmniejszych kwadratów prowadzi do mizernih rezultatów. Jednakże, jak wskazuje wzór (5.13) przy ekstrapolacji przewidywań teorii pseudosprężystości do naprężenia $\sigma_{eff} = 0$, wszystkie linie CC dla różnych proporcjonalnych ścieżek obciążenia powinny się zbiegać w temperaturze M_s^0 . Kierując się tą przesłanką podjęto próbę wyznaczenia interpolowanych metodą najmniejszych kwadratów doświadczalnych linii CC przy założeniu, że zbiegają się one w temperaturze $T = 253 K$ dla $\sigma_{eff} = 0$. Zatem przyjęto tutaj, że występującą w modelu pseudosprężystości temperaturę początku przemiany martenzytycznej w stanie beznapężeniowym, można metodą



Rys. 5.9 a) Relacje Clausiusa-Clapeyrona – CC dla przemiany $A \rightarrow M$ w zakresie pseudosprężystego zachowania stopu NiTi i przemiany monoklinicznej. Punktami zaznaczono wartości doświadczalne. Linie stanowią interpolacje wyznaczone metodą najmniejszych kwadratów przy ich ekstrapolacji do punktu ($\sigma_{eff} = 0, T = 253 K$), tj. temperatury początku przemiany martenzytycznej w stanie beznapężeniowym. **b)** Położenie punktów doświadczalnych relacji Clausiusa-Clapeyrona w zbliżeniu oraz wartości doświadczalne nachyleń linii CC wyznaczonych interpolacyjnie metodą najmniejszych kwadratów.

ekstrapolacji utożsamiać z temperaturą M_s^0 wyznaczaną w stanie beznapięzeniowym za pomocą pomiaru kalorymetrycznego (DSC). Wyniki tej operacji przedstawiono na rysunku 5.9a. Wartości nachyleń tak wyznaczonych linii CC podano na rysunku 5.9b gdzie wykreślono linie Clausiusa-Clapeyrona w „powiększeniu” w zakresie temperatur, w którym występuje zjawisko pseudosprężystości dla omawianego stopu NiTi. Podstawiając odczytaną z rysunku 5.9 wartość nachylenia linii CC dla ścinania $d\sigma^{AM}(y=0, T)/dT = 7.1 [MPa/K]$ ($f(y=0)=1$), znaną z literatury wartość gęstości stopu NiTi $\rho = 6500 [kg/m^3]$ oraz przyjętą dla badanego stopu NiTi za zerową wartość stałej materiałowej $\bar{s}_0 = 0$ do wzoru (5.15) otrzymuje się

$$\Delta s^* / \gamma = 1092 [J/kg K], \quad \bar{s}_0 = 0, \quad \rho = 6500 [kg/m^3]. \quad (5.16)$$

Stała \bar{s}_0 charakteryzuje różnicę nachyleń linii CC $\sigma^{AM}(y, T)$ i $\sigma^{MA}(y, T)$ co łatwo stwierdzić porównując wzory (3.36)₁ i (3.36)₂. Na zasadność przyjęcia wartości stałej materiałowej $\bar{s}_0 = 0$ wskazują dane literaturowe, gdyż jak łatwo stwierdzić na rysunku 46 str. 588 w pracy [54] nachylenia linii CC $\sigma^{AM}(T)$ i $\sigma^{MA}(T)$ dla stopu NiTi są niemalże takie same. Podstawiając zidentyfikowane wartości stałych materiałowych modelu R_L dla stopu NiTi podane wzorem (5.16) oraz wartości zidentyfikowanej funkcji kształtu $f(y)$ określonej wzorem (5.12) dla parametru y odpowiadającego ścieżkom 2,3,4,5 do wzoru (5.15) otrzymuje się po zaokrągleniu do jednego miejsca po przecinku wartości nachyleń linii CC podanych na rysunku 5.9b, tj. uzyskanych interpolacyjnie metodą najmniejszych kwadratów. Najmniejsza wartość nachylenia linii CC występuje dla rozciągania i wynosi 6.5 [MPa/K] zaś największa dla ściskania i wynosi 8.9 [MPa/K]. Powyższe stanowi potwierdzenie doświadczalne poprawności założeń teoretycznych modelu R_L o niezależności funkcji kształtu od temperatury, a także liniowej zależności od temperatury krytycznych naprężeń płynięcia σ^{AM} . Przyjęcie, że występującą w modelu pseudosprężystości temperaturę początku przemiany austenicznej w stanie beznapięzeniowym można utożsamiać z temperaturą A_s^0 wyznaczaną w stanie bez napięzeniowym za pomocą pomiaru kalorymetrycznego (DSC) pozwala na zidentyfikowanie dalszych stałych materiałowych modelu R_L . Mianowicie dokonując prostej transformacji wzorów (3.16) i podstawiając wartości już zidentyfikowanych stałych $\Delta s^* / \gamma$, \bar{s}_0 określonych wzorami (5.16) oraz wartości temperatur przemiany fazowej (DSC) $M_s^0 = 253 K$, $A_s^0 = 268 K$ otrzymuje się

$$\Delta u^* = [(\Delta s^* + \bar{s}_0)A_s^0 + (\Delta s^* - \bar{s}_0)M_s^0] / 2, \quad (5.17)$$

$$\bar{u}_0 = [(\Delta s^* + \bar{s}_0)A_s^0 - (\Delta s^* - \bar{s}_0)M_s^0] / 2,$$

$$\Delta u^* / \gamma = 2.84 \cdot 10^5 [J/kg], \quad \bar{u}_0 / \gamma = 8190 [J/kg].$$

W modelu R_L założono, że dla makroskopowego tensora odkształceń fazowych istnieje potencjał niesprężysty g^{ph} , określony jawnie wzorem (3.32). Ta postać potencjału prowadzi do wzoru (3.39) na tensor fazowych odkształceń własnych $\underline{\kappa}$. Po podstawieniu (3.39) do wzoru (3.38)₃ otrzymuje się następujące wyrażenie na tensor makroskopowych odkształceń fazowych $\underline{\epsilon}^T$

$$\underline{\epsilon}^T = z \partial(\rho g^{ph}(\underline{\sigma}, T)) / \partial \underline{\sigma} = \Lambda_0 \underline{\mathbf{G}}^*(\underline{\sigma}), \quad (5.18)$$

$$\underline{\mathbf{G}}^*(\underline{\sigma}) \equiv f(y) \frac{3}{2} \{ \underline{\mathbf{n}}_{\sigma}^{ef} + 3x [3(\underline{\mathbf{n}}_{\sigma}^{ef})^2 - \frac{2}{3} \underline{\mathbf{I}} - y \underline{\mathbf{n}}_{\sigma}^{ef}] \},$$

$$x \equiv \frac{1}{f} \frac{df(y)}{dy}, \quad \Lambda_0 \equiv \gamma z, \quad \underline{\mathbf{n}}_{\sigma}^{ef} = \sqrt{\frac{2}{3}} \underline{\mathbf{n}}_{\sigma}, \quad \underline{\mathbf{n}}_{\sigma} = \underline{\sigma} / \sigma', \quad tr(\underline{\epsilon}^T) = 0.$$

Łatwo wykazać dokonując sprawdzenia wprost, że funkcja tensorowa $\underline{\mathbf{G}}^*$ jest funkcją izotropową i jednorodną stopnia zerowego względem tensora naprężenia – $\underline{\mathbf{G}}^*(\lambda \underline{\sigma}) = \underline{\mathbf{G}}^*(\underline{\sigma})$, λ tutaj oznacza skalarny parametr. Zatem, zgodnie z założeniem modelu R_L również tensor odkształceń fazowych $\underline{\epsilon}^T$ jest izotropową funkcją naprężenia. Postać funkcji $\underline{\mathbf{G}}^*$ (5.18)₂ nie stanowi istotnego ograniczenia obszaru zastosowania rozwijanego modelu w ramach teorii izotropowej, gdyż postać ta przedstawia ogólną reprezentację izotropowej funkcji tensorowej dewiatora naprężenia pod warunkiem, że x i y są niezależnymi skalarnymi funkcjami drugiego i trzeciego niezmiennika dewiatora naprężenia. Postać (5.18)₂ jest o tyle specjalna, że wymuszony jest związek (5.18)₃ pomiędzy skalarami x i y zapewniający spójność modelu z uwagi na zjawiska fizyczne jakie model ma opisywać i pominięte są efekty związane z ciśnieniem hydrostatycznym. W ogólnym przypadku postulat (5.18)₁ prowadzi do dosyć złożonego prawa pseudosprężystego płynięcia

$$\underline{\dot{\epsilon}}^T = \dot{\Lambda}_0 \underline{\mathbf{G}}^* + \Lambda_0 \underline{\dot{\mathbf{G}}}^*, \quad \dot{\Lambda}_0 \equiv \gamma \dot{z}. \quad (5.19)$$

Równanie kinetyki przemiany fazowej (3.26) zaproponowane w modelu R_L jest niewrażliwe na zmianę skali czasu – sama prędkość przemiany jest funkcją jednorodną stopnia pierwszego względem wymuszających ją czynników $\dot{z} = (\partial \dot{z} / \partial \underline{\dot{\sigma}}) \cdot \underline{\dot{\sigma}} + (\partial \dot{z} / \partial \dot{T}) \dot{T}$, $\lambda \dot{z} = \dot{z}(\lambda \underline{\dot{\sigma}}, \lambda \dot{T})$. Postulat o niezależności równania kinetyki od skali czasu, tj. niezależności jej przebiegu od prędkości wymuszających ją czynników wynika z powszechnie zaakceptowanej w środowisku metalurgów własności atermiczności termosprężystej przemiany martenzytycznej, patrz np. [52].

Funkcja $\underline{\dot{\mathbf{G}}}^*$ również jest funkcją jednorodną stopnia pierwszego względem tensora prędkości naprężenia $\underline{\dot{\mathbf{G}}}^* = [\partial \underline{\dot{\mathbf{G}}}^* / \partial \underline{\dot{\sigma}}] \underline{\dot{\sigma}} \quad \lambda \underline{\dot{\mathbf{G}}}^*(\underline{\dot{\sigma}}) = \underline{\dot{\mathbf{G}}}^*(\lambda \underline{\dot{\sigma}})$. Z powodu wyżej wymienionych własności \dot{z} i $\underline{\dot{\mathbf{G}}}^*$, prawo płynięcia pseudosprężystego (5.19) jest niewrażliwe na zmianę skali czasu. Ponieważ wszystkie próby wykonywane na próbce ze stopu NiTi prowadzone były ze stałą prędkością wymuszenia, więc ich

wyniki nie pozwalają na zweryfikowanie poprawności postulatu o niezależności prawa płynięcia (5.19) od skali czasu.

W przypadku proporcjonalnych ścieżek obciążenia, tj. takich że $\underline{\sigma}(t) = (\underline{\sigma}^{Max} / t_{Max}) \cdot t$, człon $\underline{G}^*(\underline{\sigma}) = \mathbf{0}$, gdyż wtedy $\dot{\underline{n}}_\sigma = 0$ i prawo płynięcia pseudosprężystego (5.19) w tej klasie obciążeń upraszcza się do postaci

$$\dot{\underline{\epsilon}}^T = \dot{\Lambda}_0 \underline{G}^*(\underline{\sigma}), \quad \dot{\Lambda}_0 \equiv \gamma \dot{z}, \quad \underline{\sigma}(t) = (\underline{\sigma}^{Max} / t_{Max}) \cdot t, \quad (5.20)$$

$$y, f(y), \frac{df(y)}{dy}, x, = const, \quad \underline{n}_\sigma = \underline{\sigma}^{Max} / \sqrt{\underline{\sigma}^{Max} \underline{\sigma}^{Max}}, \quad \underline{\sigma}^{Max}, t_{Max} = const.$$

Prawo płynięcia (5.20) przewiduje, że proporcjonalność ścieżki obciążenia w przestrzeni naprężeń prowadzi do proporcjonalnej ścieżki odpowiedzi materiału w przestrzeni odkształceń niesprężystych związanych z przemianą fazową ($\dot{\epsilon}_{KL}^T \equiv C_{KLMN} \dot{\epsilon}_{MN}^T$; $C_{KLMN} = const$). Zbadanie przebiegu wyznaczonych na podstawie wyników doświadczalnych dla prób proporcjonalnych stosunków prędkości $C_{KLMN}^{exp} = \dot{\epsilon}_{KL}^T / \dot{\epsilon}_{MN}^T$, pozwala zweryfikować dopuszczalność postaci matematycznej proponowanego w modelu R_L prawa płynięcia.

W pracy [67] Raniecki i inni w kontekście weryfikacji prawa reorientacji R-fazy martenzytycznej zaproponowali oryginalną procedurę weryfikacji postulowanej izotropii prawa płynięcia reorientacji w przypadku, gdy są dostępne wyniki prób przy proporcjonalnych ścieżkach obciążenia. Tutaj analogiczna procedura zostanie zastosowana do doświadczalnej weryfikacji specjalnej postaci prawa płynięcia pseudosprężystego (5.19) redukującego się do prawa izotropowego (5.20) przy obciążeniach proporcjonalnych.

Analizując związek (5.20) – por. także (5.18)₂, nietrudno zauważyć że w dowolnej chwili czasu trzy wartości funkcji skalarnych $\dot{\Lambda}_0$, y i x określają poprzez składowe stałego tensora $\underline{\sigma}^{Max} = const$ traktowane jako parametry, pięć składowych prędkości dewiatora makroskopowych odkształceń fazowych, o ile relacja (5.20) obowiązuje. Taka struktura matematyczna powoduje, że w ogólnym przypadku istnieją dwie relacje więzów łączące składowe tensora $\dot{\underline{\epsilon}}^T$ ze składowymi tensora $\underline{\sigma}^{Max}$, obowiązujące dla dowolnych wartości wcześniej wspomnianych skalarów ($\dot{\Lambda}_0, y, x$). W przypadku prób bez wewnętrznego ciśnienia i przy założonej izotropii prawa płynięcia (5.20) tylko jedna z nich jest nie trywialna. Wykorzystując (5.20) i (5.18) można uzyskać następujący związek pomiędzy stosunkami składowych tensora $\dot{\underline{\epsilon}}^T$ i składowymi tensora $\underline{\sigma}^{Max}$ – por. (5.3)

$$\dot{\epsilon}_{\theta z}^T / \dot{\epsilon}_z^T = \frac{3}{2} \left[1 - \frac{3(\tau^{Max})^2 x}{M} \right] \frac{\tau^{Max}}{\sigma_z^{Max}}, \quad \dot{\epsilon}_\theta^T / \dot{\epsilon}_z^T = -\frac{1}{2} \left[1 - 3 \frac{3(\tau^{Max})^2 x}{M} \right], \quad (5.21)$$

$$M = x[2(\sigma_z^{Max})^2 + 3(\tau^{Max})^2 - 2y\sigma_z^{Max}\sigma_{ef}^{Max}] + \frac{2}{3}\sigma_z^{Max}\sigma_{ef}^{Max}.$$

Eliminując człon $3(\tau^{Max})^2 x / M$ z zależności (5.21)_{1,2} otrzymuje się poszukiwane równanie więzów

$$\sigma_z^{Max} \dot{\varepsilon}_{\theta z}^T + \tau^{Max} (\dot{\varepsilon}_{\theta}^T - \dot{\varepsilon}_z^T) = 0, \quad (5.22)$$

Wprowadzając definicję funkcji Y jak poniżej i wykorzystując definicję parametru $m = \tau^{Max} / \sigma_z^{Max}$ – por. (5.1)₃, równanie więzów (5.22) przyjmuje postać

$$Y = m, \quad Y \equiv \frac{\dot{\varepsilon}_{\theta z}^T / \dot{\varepsilon}_z^T}{1 - \dot{\varepsilon}_{\theta}^T / \dot{\varepsilon}_z^T}. \quad (5.23)$$

Równanie więzów (5.23) wskazuje, że jeśli dla badanego materiału obowiązuje izotropowe prawo płynięcia (5.20) to mierzalna doświadczalnie wielkość Y powinna być równa stosunkowi składowych tensora naprężenia m . Relacja (5.23) jest relacją uniwersalną niezależną od wartości parametrów skalarnych x, y oraz $\dot{\Lambda}_0$. Stanowi ona podstawę do dokonania w pośredni sposób weryfikacji doświadczalnej założenia o izotropii niesprężystej prawa płynięcia, tj. relacji (5.20), i pośrednio relacji (5.18) ale tylko w przypadku obciążeń proporcjonalnych. Odstępstwa wyników doświadczalnych od zależności (5.23) wskazywałyby na zależność własności materiałowych badanego materiału od orientacji, tj. na występowanie anizotropii niesprężystej materiału.

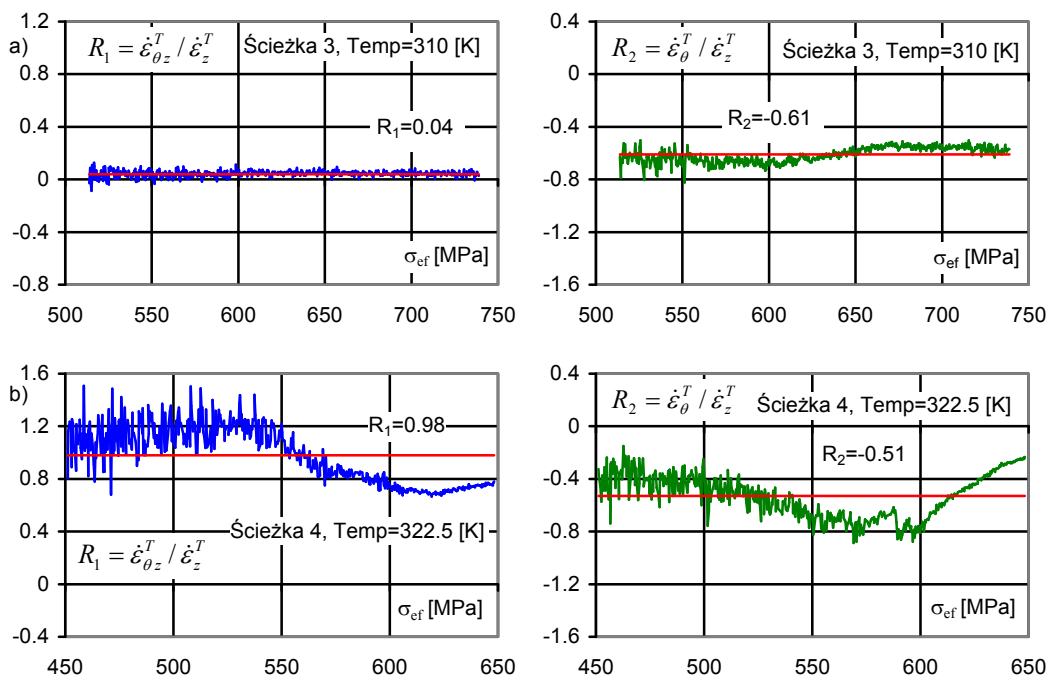
W celu doświadczalnego zweryfikowania dopuszczalności postulowanej w modelu R_L izotropii funkcji \mathbf{G}^* występującej we wzorze (5.18) określającym makroskopowe odkształcenie fazowe oraz w prawie płynięcia (5.20) wyliczono stosunki prędkości fazowego odkształcenia postaciowego do prędkości fazowego odkształcenia osiowego $R_1 = \dot{\varepsilon}_{\theta z}^T / \dot{\varepsilon}_z^T$ oraz prędkości fazowego odkształcenia obwodowego do prędkości fazowego odkształcenia osiowego $R_2 = \dot{\varepsilon}_{\theta}^T / \dot{\varepsilon}_z^T$ dla ścieżek 2,3,4,5 i dla trzech temperatur $T = 310, 315, 322.5$ K. W przypadku ścieżki 1, tj. skręcania wyliczono stosunki $\dot{\varepsilon}_z^T / \dot{\varepsilon}_{\theta z}^T$ i $\dot{\varepsilon}_{\theta}^T / \dot{\varepsilon}_{\theta z}^T$.

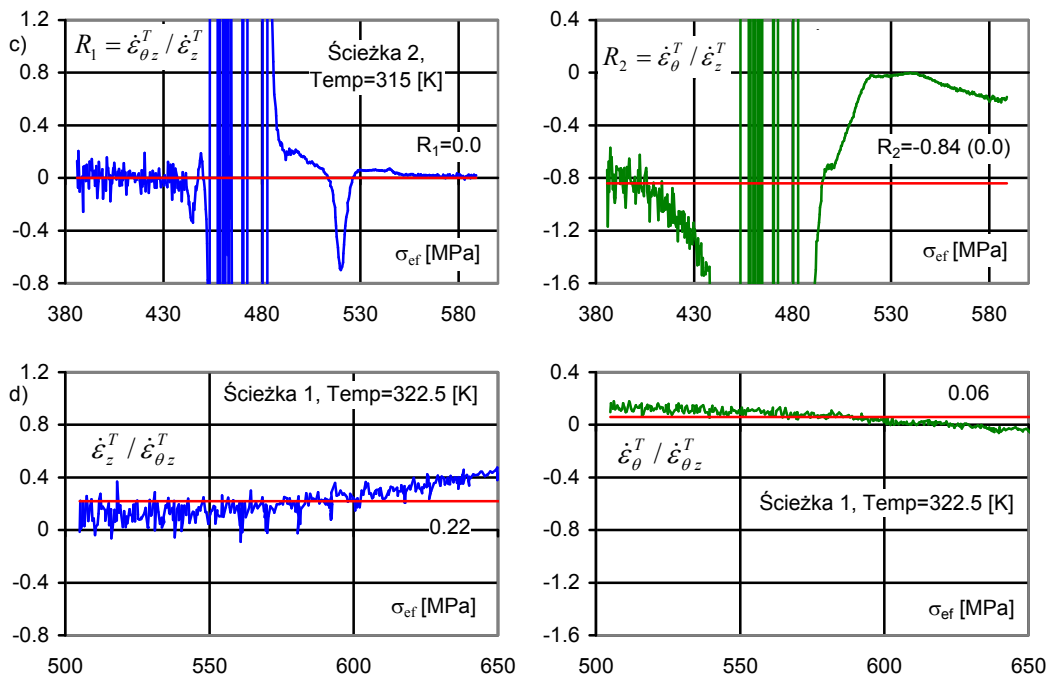
Na rysunku 5.10 pokazano przykładowo wykresy stosunków R_1 i R_2 w zależności od naprężenia efektywnego σ_{ef} dla kilku wybranych ścieżek i temperatur, tj. dla ścieżki 3 w temperaturze 310 K. dla ścieżki 4 w temperaturze $T = 322.5^0K$, dla ścieżki 2 w temperaturze 315 K. Pokazano również stosunki $\dot{\varepsilon}_z^T / \dot{\varepsilon}_{\theta z}^T$ i $\dot{\varepsilon}_{\theta}^T / \dot{\varepsilon}_{\theta z}^T$ dla ścieżki 1 w temperaturze 322.5K. Widoczny na wykresach na rysunku 5.10 „szum” wynika z punktowej rejestracji cyfrowej danych. Aby nie zafałszowywać wykresów zrezygnowano z cyfrowego „wygładzania” pierwotnych zależności $\varepsilon_{ij}^T(t)$ przed wyliczeniem „pochodnych” $\dot{\varepsilon}_{ij}^T(t)$ i potem stosunków R_1, R_2 metodą numeryczną.

Zawarte na rysunku 5.10 wykresy stanowią ilustrację pewnych charakterystycznych sytuacji jakie napotkano.

W przypadku ścieżki 3, dla wszystkich temperatur uzyskano niemalże wzorcowe linie stałych wartości stosunku R_1 dla wartości naprężenia efektywnego pozostających w zakresie plateau płynięcia pseudosprężystego. W przypadku stosunku R_2 jego wartość pozostawała stała do około połowy plateau po czym po bardzo krótkim okresie płynięcia osiągała ona stałą wartość -0.5 . Średnie dla całego plateau wartości stosunków podano w tabeli 5.3. Wykresy przebiegu stosunków R_1 i R_2 dla ścieżki 3 w temperaturze 310 K pokazano na rysunku 5.10a.

W przypadku ścieżki 4 z punktu widzenia stałości stosunków R_1, R_2 dla wszystkich temperatur sytuacja jest gorsza niż przypadku ścieżki 3. Charakterystyczną sytuację dobrze ilustrują wykresy przebiegu stosunków R_1 i R_2 dla ścieżki 4 w temperaturze 322.5 K pokazane na rysunku 5.10b. Stosunki R_1 i R_2 zachowują stałą wartość w pewnych znaczących obszarach plateau płynięcia pseudosprężystego jednak na całym plateau podlegają dosyć znaczącym zmianom. Na przykład stosunek R_1 wynosi początkowo około 1.1 w zakresie wartości naprężenia efektywnego $< 450, 540 >$ MPa po czym stabilizuje się na wartości około 0.8 w zakresie naprężeń $< 580, 650 >$ MPa. Średnia R_1 na całym plateau ma wartość 0.98. Z kolei stosunek





Rys. 5.10 Ewolucja stosunków prędkości fazowego odkształcenia postaciowego do prędkości fazowego odkształcenia osiowego $R_1 = \dot{\epsilon}_{\theta z}^T / \dot{\epsilon}_z^T$ oraz prędkości fazowego odkształcenia obwodowego do prędkości fazowego odkształcenia osiowego $R_2 = \dot{\epsilon}_{\theta}^T / \dot{\epsilon}_z^T$. a) Ścieżka nr 3, T=310 K. b) Ścieżka nr 4, T=322.5 K. c) Ścieżka nr 2, T=315 K. d) Stosunki $\dot{\epsilon}_z^T / \dot{\epsilon}_{\theta z}^T$ i $\dot{\epsilon}_{\theta}^T / \dot{\epsilon}_{\theta z}^T$ ścieżka nr 1, T=322.5 K.

R_2 przy wartości średniej -0.51 wykazuje na całym plateau płynięcia pseudosprężystego wahanie o ± 0.2 .

W przypadku ścieżki 2, dla temperatur 315K i 322.5K wystąpiła interesująca sytuacja. W początkowym stadium przemiany fazowej, tj. w zakresie wartości naprężenia efektywnego $\langle 390, 440 \rangle$ MPa; dla T=315⁰K, $\langle 450, 500 \rangle$ MPa dla T=322.5⁰K odpowiednio stosunki R_1 i R_2 zachowują stałą wartość. Podano je w tabeli 5.4 jako pierwsze bez nawiasów. Po czym, następuje etap bardzo silnych oscylacji w zakresie wartości naprężenia efektywnego $\langle 440, 500 \rangle$ MPa; dla T=315⁰K, $\langle 500, 560 \rangle$ MPa dla T=322.5⁰K, odpowiadających na występowanie niestabilności w procesie przemiany fazowej. W trzecim stadium w zakresie wartości naprężenia efektywnego $\langle 500, 590 \rangle$ MPa; dla T=315⁰K, $\langle 560, 640 \rangle$ MPa dla T=322.5⁰K odpowiednio wartości stosunków R_1 i R_2

ponownie się stabilizują. O ile jednak stosunki R_1 na powrót przyjmują wartość zerową tak jak w pierwszej fazie płynięcia to stosunki R_2 przyjmują inne wartości niż w początkowej fazie płynięcia pseudosprężystego. Podano je w tabeli 5.4 w nawiasach. Pozwala się to domyślać, iż źródłem niestabilności jest możliwość ekspresji efektów odkształceniowych przemiany fazowej albo poprzez odkształcenie obwodowe albo promieniowe. Niestabilność opisana powyżej nie wystąpiła dla ścieżki 2 w temperaturze 310K.

W przypadku ścieżki 5, we wszystkich temperaturach stosunki R_1 , R_2 pozostają stałe tylko do około połowy plateau płynięcia pseudosprężystego zaś w drugiej połowie szybko maleją do wartości nawet -15 . Na przykład w przypadku ścieżki 5, $T=315$ K stosunki R_1 , R_2 pozostają praktycznie stałe przyjmując wartości $R_1 = -2.0$, $R_2 = -1.0$ dla $\sigma_{ef} \in \langle 480, 600 MPa \rangle$, po czym w zakresie $\sigma_{ef} \in \langle 600, 720 MPa \rangle$ R_1 spada od wartości -2 do -11 , zaś R_2 spada od wartości -1 do -5 .

W przypadku ścieżki 1, skonstruowano wykresy stosunków $\dot{\epsilon}_z^T / \dot{\epsilon}_{\theta z}^T$ i $\dot{\epsilon}_\theta^T / \dot{\epsilon}_{\theta z}^T$. Przykładowy przebieg tych stosunków dla próby wykonanej w temperaturze 322.5 K pokazano na rysunku 5.10d. Stosunek $\dot{\epsilon}_z^T / \dot{\epsilon}_{\theta z}^T$ do około połowy plateau zachowuje stałą wartość około 0.12 po czym zaczyna dryfować by osiągnąć wartość 0.35 przy maksymalnym obciążeniu. Wartość stosunku $\dot{\epsilon}_\theta^T / \dot{\epsilon}_{\theta z}^T$ płynie jednostajnie od wartości początkowej 0.13 do 0.0. Średnie wartości tych stosunków w zakresie naprężenia efektywnego odpowiadającym płynięciu pseudosprężystemu podano w tabeli 5.3.

Przeprowadzona powyżej analiza wskazuje, że przewidywana w modelu R_L stałość stosunków prędkości składowych odkształcenia niesprężystego R_1 , R_2 znajduje potwierdzenie w wynikach doświadczalnych dla stopu NiTi. Jakkolwiek występują istotne odstępstwa od tej prawidłowości, np. silne niestabilności w postępie przemiany fazowej w przypadku ścieżki drugiej w temperaturach 315 K i 322.5 K (silna niestabilność nie pojawia się w temperaturze $T=310$ K), jak również znaczne obniżanie się wartości tych stosunków w pobliżu maksimum obciążenia w przypadku ścieżki 5.

Akceptowalność założonej specyficznej izotropowej postaci funkcji \mathbf{G}^* – por. (5.18)₂, oraz poprawności przyjęcia specyficznej postaci funkcji kształtu $f(y)$ – por. (5.12), w odniesieniu nie tylko do jej początku lecz do procesu przebiegu przemiany fazowej można zweryfikować porównując eksperymentalnie otrzymane wartości stosunków $R_{1_exp} = \dot{\epsilon}_{\theta z}^T / \dot{\epsilon}_z^T$, $R_{2_exp} = \dot{\epsilon}_\theta^T / \dot{\epsilon}_z^T$ z wartościami teoretycznymi

Tabela 5.3. Porównanie wyznaczonych z danych doświadczalnych i przewidywanych teoretycznie stosunków prędkości składowych odkształceń, oraz wartości funkcji $Y(m)$ dla temperatur 310, 315 i 322.5K.

Ścieżka	3	5	4	2	1
	ściskanie	ściskanie + skręcanie	rozciąganie + skręcanie	rozciąganie	skręcanie
$\dot{\epsilon}_{\theta z}^T / \dot{\epsilon}_z^T$					$\dot{\epsilon}_z^T / \dot{\epsilon}_{\theta z}^T$
Exp. T=310	0.04	-2.0	1.17	0.0	0.32
Exp. T=315	0.05	-2.0	1.11	0.0	0.15
Exp. T=322.5	0.09	-2.2	0.98	0.0	0.22
Teoria J'_3	0.00	-3.03	1.28	0.00	0.00
Teoria J'_2	0.00	-1.50	1.50	0.00	0.00
$\dot{\epsilon}_{\theta}^T / \dot{\epsilon}_z^T$					$\dot{\epsilon}_{\theta}^T / \dot{\epsilon}_{\theta z}^T$
Exp. T=310	-0.61	-1.0	-0.41	-0.26	-0.09
Exp. T=315	-0.63	-1.0	-0.48	-0.84 (-0.02)	0.11
Exp. T=322.5	-0.7	-1.0	-0.51	-0.78 (-0.05)	0.06
Teoria J'_3	-2.94	-2.03	-0.28	-0.13	0.00
Teoria J'_2	-0.50	-0.50	-0.50	-0.50	0.00
Ścieżka	3	5	4	2	1
Dane pomocnicze wspólne dla wszystkich temperatur					
$m = \tau / \sigma_z$	0	-1	1	0	(1/m = 0)
y	-1	-0.688	0.688	1	0
$f(y)$	0.800	0.880	1.071	1.092	1.0
$df(y)/dy$	0.289	0.226	0.077	0.061	0.132
$x \equiv \frac{1}{f} \frac{df(y)}{dy}$	0.361	0.257	0.072	0.056	0.132
$3x\tau^2 / M$	-1.62	-1.02	0.14	0.25	1

* niestabilne zachowanie

R_{1_Mod}, R_{2_Mod} wyliczonymi ze wzorów (5.21). Średnie wartości stosunków R_{1_exp}, R_{2_exp} wyznaczone z danych doświadczalnych oraz wyliczone na gruncie teoretycznym R_{1_Mod}, R_{2_Mod} przy wykorzystaniu teorii J'_3 ($f(y) \neq const$) i teorii J'_2 ($f(y) = const; x = 0$) zebrano w tabeli 5.3. W tej samej tabeli poniżej podano także wartości pomocnicze wyrażeń, które wykorzystano do wyliczenia modelowych wartości stosunków prędkości, a które uzyskano z wykorzystaniem konkretnej postaci funkcji kształtu (5.12). Wartości te są niezależne od temperatury, a zatem wspólne dla prób o tej samej ścieżce obciążenia.

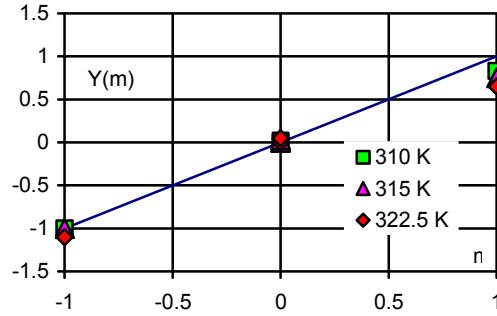
Doświadczalne wartości stosunku $\dot{\varepsilon}_{\theta_z}^T / \dot{\varepsilon}_z^T$ dla ścieżek 2 i 3 wskazują, iż w trybie rozciągania i ściskania nie występuje żadne sprzężenie pomiędzy odkształceniem osiowym i postaciowym. W trybie skręcania, ścieżka 1, stosunek $\dot{\varepsilon}_z^T / \dot{\varepsilon}_{\theta_z}^T$ osiąga wartości rzędu 0.2 wskazując na istnienie niewielkiego sprzężenia pomiędzy odkształceniem osiowym i postaciowym. Doskonały brak sprzężenia pomiędzy odkształceniem osiowym i postaciowym dla ścieżek 2 i 3, i niewielkie sprzężenie w przypadku ścieżki 1 wskazuje na akceptowalność założenia o izotropii funkcji $\underline{\mathbf{G}}^*$ – a więc założenia o izotropii niesprężystej modelu R_L . Analizując doświadczalne i modelowe wartości stosunków R_1 – por. tabela 5.3, można zauważyć przyzwoitą zgodność pomiędzy wartościami modelowymi stosunków prędkości i wartościami doświadczalnymi w zasadzie tylko dla 4 ścieżki obciążenia oraz dla ścieżki 2, przy czym w tym ostatnim wypadku biorąc wartości R_2 z końca plateau pseudosprężystego, tj. te podane w nawiasach. W przypadku ścieżek 3 i 5 występują znaczące rozbieżności pomiędzy wartościami modelowymi i doświadczalnymi. Najistotniejszy jak się wydaje wpływ na taki wynik ma przyjmowana wartość parametru x , czyli przyjęty przebieg zmienności funkcji kształtu $f(y)$. Jeżeli dla ścieżki 3 przyjęta zostanie wartość $x = 0.02$ wtedy $R_{1_Mod}(3) = 0.0, R_{2_Mod}(3) = -0.63$, zaś dla ścieżki 5 $x = 0.12$ wtedy $R_{1_Mod}(5) = -2.0, R_{2_Mod}(5) = -1.0$. i uzyskana zostanie znakomita zgodność wyników doświadczalnych z przewidywaniami modelowymi. Powyższe wskazuje na konieczność wykonania programu badań doświadczalnych mającego na celu dokładniejsze ustalenie rzeczywistego przebiegu zmienności funkcji kształtu f w zależności od „kierunku” tensora naprężenia y .

Nie obarczonym założeniem odnośnie konkretnej postaci matematycznej funkcji $f(y)$ wskaźnikiem poprawności założenia o izotropii funkcji $\underline{\mathbf{G}}^*$ jest funkcja $Y(m)$ określona wzorem (5.23). Wartości doświadczalne i przewidywania teoretyczne wartości tej funkcji wyliczone dla różnych kierunków obciążenia m zestawiono w tabeli 5.4. Dane zawarte w tabeli 5.4 wykreślono na rysunku 5.11, punktami zaznaczając wartości doświadczalne, zaś linią zaznaczono przewidywania teoretyczne modelu R_L . Wykreślone na rysunku 5.11 dane doświadczalne uzyskane dla stopu NiTi ulegającego przemianie monoklinicznej wskazują, iż zachowanie tego stopu SMA można z dobrą dokładnością modelować przy założeniu niesprężystej izotropii, tzn. przy założeniu że makroskopowy tensor odkształceń fazowych można wyrazić za pomocą izotropowej funkcji naprężenia. Odstępstwa punktów eksperymentalnych od linii zaznaczonej na rysunku 5.4 wskazują na zależność własności materiałowych od orientacji, tj. na występowanie anizotropii materiału.

Do tej pory zostały zidentyfikowane stałe materiałowe modelu R_L wyrażone poprzez

Tabela 5.4. Porównanie wyznaczonych z danych doświadczalnych oraz przewidywanych modelowo wartości funkcji $Y(m)$ dla temperatur 310, 315 i 322.5K.

Ścieżka	3	5	4	2	1
$Y(m)$					-
Exp. T=310	0.02	-1.00	0.83	0.00	-
Exp. T=315	0.03	-1.00	0.75	0.00	-
Exp. T=322.5	0.05	-1.10	0.65	0.00	-
Teoria J'_3	0.00	-1.00	1.00	0.00	-
Teoria J'_2	0.00	-1.00	1.00	0.00	-



Rys. 5.11 Funkcja $Y(m)$ - kryterium weryfikacji izotropii niesprężystej.

jak dotąd nieznaną wartość amplitudy płynięcia pseudosprężystego γ – por. (5.16), (5.17). Trudność w wyznaczeniu tej ostatniej termostatycznej stałej materiałowej polega na tym, że w żadnej z prób izotermicznych na próbce rurkowej nie doprowadzono obciążenia próbki do stanu, gdy kończy się plateau płynięcia pseudosprężystego z uwagi na niebezpieczeństwo zniszczenia próbki. A zatem nie uzyskano ani razu tzw. pełnej pętli histerezy. Z tego powodu niemożliwe jest wyznaczenie parametru materiałowego, jakim jest amplituda płynięcia pseudosprężystego γ wprost. W celu wyznaczenia tego parametru materiałowego użyto specjalnie opracowanej oryginalnej procedury, patrz tekst poniżej wzoru (10) w pracy [93]. Procedura ta przypomniana jest tutaj poniżej.

Stany niestabilnej absolutnej równowagi termodynamicznej wyznaczone warunkiem $\pi^f(\sigma_{ef}, T, z) = 0$ – por. (3.35) wyznaczają stany krytyczne przy jakich rozpoczynają się pełne ($z_{start} = 0$ or 1) lub częściowe ($z_{start} = z^*$; $0 < z^* < 1$) przemiany fazowe. W szczególności parametry stanu w chwili rozpoczęcia częściowej przemiany odwrotnej muszą spełniać równanie $\pi^f(\sigma_{ef}^*, T^*, z^*) = 0$. Zatem zgodnie z przewidywaniami modelu R_L musi być wtedy spełniona relacja

$$\sigma_{ef}^* = \rho[(1 - 2z^*)\phi_{it}(T^*) - \pi_0^f(T^*)]/[\gamma f(y)]. \quad (5.24)$$

Udział fazy martenzytycznej z nie był bezpośrednio mierzony w omawianych tutaj próbach izotermicznych, jednak zgodnie z przewidywaniami modelu R_L można go wyrazić poprzez możliwe do wyznaczenia z danych doświadczalnych odkształcenie efektywne $\varepsilon_{eq}^{T^*}$ – por. wzór (5.5) korzystając ze wzoru (3.40)

$$z^* = \varepsilon_{eq}^{T^*} / \gamma F(y), \quad F(y) \equiv [f^2 + 9(1 - y^2)(df/dy)^2]^{1/2}. \quad (5.25)$$

Eliminując semi-empiryczny stopień zaawansowania przemiany fazowej z^* ze wzorów (5.24) i (5.25) i dzieląc tak otrzymane równanie obustronnie przez σ^{AM} , a następnie wykorzystując wzory (3.36)₁ i (3.16)₁ oraz podstawiając $\bar{\sigma}_0 = 0$ po

prosty przekształcenia otrzymuje się liniową relację, w której jawnie występuje parametr γ

$$Y1 = 1 - (1/\gamma) \cdot X1, \quad Y1 \in [\approx 0.7, 1], \quad (5.26)$$

$$Y1 \equiv \frac{\sigma_{ef}^*}{\sigma_{AM}} = \gamma f(y) \sigma_{ef}^* / [\rho \Delta s^* (T^* - M_s^0)],$$

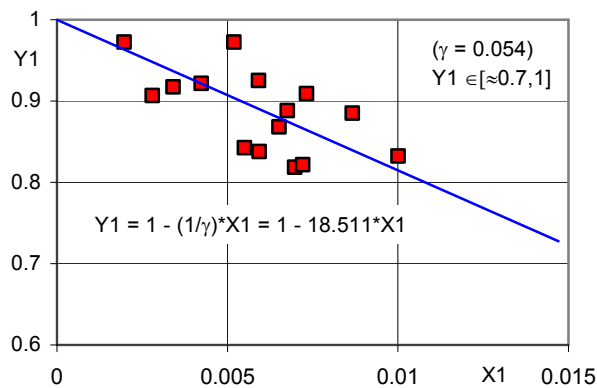
$$X1 \equiv 2 \bar{u}_0 \varepsilon_{eq}^{T^*} / [\Delta s^* (T^* - M_s^0) F(y)].$$

Podstawiając do wzorów (5.26)_{2,3} zidentyfikowane wcześniej wartości parametrów termostatycznych oraz piętnaście zestawów danych $(\sigma_{ef}^*, T^*, \varepsilon_{eq}^{T^*})$ określających

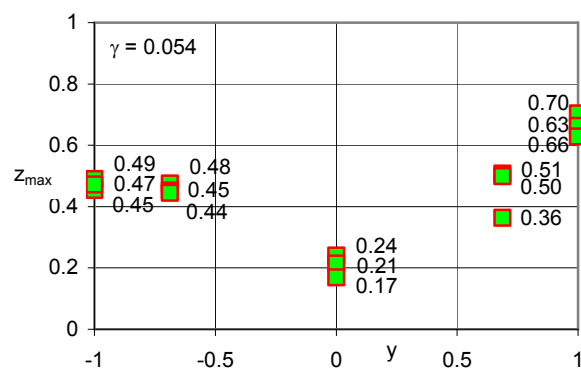
początek cząstkowej przemiany odwrotnej, wyznaczonych metodą offsetu zilustrowaną schematycznie na rysunku 5.6 wyznaczono piętnaście doświadczalnych wartości par zmiennych $(X1, Y1)$ występujących w równaniu prostej (5.26). Tak wyznaczone punkty doświadczalne zaznaczono na wykresie we współrzędnych $X1-Y1$ na rysunku 5.12. Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczono linię stanowiącą najlepszą interpolację danych

doświadczalnych. Wartość jej nachylenia stanowi odwrotność wartości amplitudy płynięcia, co w efekcie daje wartość samej amplitudy równą $\gamma = 0.054$.

Wykorzystując wzory (5.25) i doświadczalne wartości odkształceń efektywnych przemiany fazowej $\varepsilon_{eq}^{T^*}$ można wyznaczyć semi-empiryczne wartości maksymalnego zaawansowania przemiany fazowej z_{max} osiągnięte



Rys. 5.13 Wyznaczenie amplitudy płynięcia pseudosprężystego γ . Punkty oznaczają dane doświadczalne. Linia trendu została wyznaczona metodą najmniejszych kwadratów.



Rys. 5.12 Semi-empiryczne wartości maksymalnego zaawansowania przemiany fazowej osiągnięte podczas proporcjonalnych prób izotermicznych.

podczas poszczególnych prób. Tak otrzymane wartości pokazano na rysunku 5.13. Dają one jeszcze jedną możliwość weryfikacji przewidywań modelu R_L pod warunkiem dokonywania doświadczalnego pomiaru zaawansowania przemiany fazowej podczas wykonywania izotermicznych prób wytrzymałościowych na przykład poprzez pomiar oporu elektrycznego próbki. W przypadku omawianych tutaj prób na stopie NiTi takiego pomiaru nie dokonywano.

5.4 Identyfikacja stałych i funkcji materiałowych modelu R_L . Porównanie przewidywań modelowych i krzywych doświadczalnych dla stopu NiTi – przemiana monokliniczna

W poprzedniej sekcji skoncentrowano się na weryfikacji pewnych podstawowych założeń teoretycznych, na których oparto budowę modelu R_L stopów z pamięcią kształtu. Ten cel wymagał szerokiego omówienia zarówno sposobu opracowania danych doświadczalnych, jak i metodologii ich opracowania. Użytkownik modelu R_L będzie raczej zainteresowany jak najszybszym i jak najtańszym uruchomieniem modelu tak, aby mógł przewidywać zachowanie interesującego go stopu SMA. Algorytm takiej pragmatycznej procedury wyznaczania stałych i funkcji materiałowych modelu R_L oraz ilość i rodzaj minimalnej liczby wymaganych w tym celu doświadczeń zostanie podany w obecnej sekcji.

Kompletny zestaw danych materiałowych wymaganych do modelowania zachowania izotropowego stopu z pamięcią kształtu został podany w rozdziale 3 – por. (3.44). Dane te można podzielić na 4 grupy,

- i) dane fizyczne i mechaniczne (sprężystości) $\rho, (E, \nu \rightarrow \underline{\mathcal{L}})$,
- ii) dane termiczne α_0, c_p, λ_c ,
- iii) dane charakteryzujące przemianę fazową $\Delta u^*, \Delta s^*, \bar{u}_0, \bar{s}_0, \gamma, f(y)$,
- iv) dane charakteryzujące kinetykę przemiany fazowej $m_1, m_2, r_1, r_2, p_1, p_2$.

Dane z grupy i) gęstość ρ i moduł Younga E wyznaczany w próbie rozciągania stanowią dane standardowo dostarczane przez firmy produkujące stopy z pamięcią kształtu. Wartość współczynnika Poissona ν najlepiej jest wyznaczyć z próby skręcania (ścianania), której wykonanie i tak jest konieczne po to by wyznaczyć naprężenie krytyczne płynięcia pseudosprężystego w skręcaniu a następnie funkcję $f(y)$.

Dane z grupy ii) rozszerzalność termiczna α_0 , pojemność cieplna c_p i współczynnik przewodzenia ciepła λ_c stanowią dane standardowo dostarczane przez firmy produkujące stopy z pamięcią kształtu.

Podane w tabeli 5.5 – zawierającej komplet stałych materiałowych dla stopu NiTi – wartości $\rho, E, \alpha_0, c_p, \lambda_c$ zaczerpnięto z arkusza danych materiałowych dla stopu NiTi o komercyjnej nazwie Flexwire AMPS-100 belgijskiej firmy AMT, który ma

skład chemiczny $Ni_{56.0wt\%}Ti = Ni_{50.95at\%}Ti$. Rozważany tutaj stop ma skład $Ni_{51.0at\%}Ti$.

Dane z grupy iii) i iv) nie stanowią standardowych danych dostarczanych przez producentów stopów z pamięcią kształtu i należy je wyznaczyć we własnym zakresie.

W przypadku wyznaczania danych materiałowych z trzeciej grupy, gdy wymagane są jedynie wstępne obliczenia projektowe lub dobre przybliżenie stanowi założenie że powierzchnia płynięcia pseudosprężystego nie zależy od kierunku tensora naprężenia, wtedy można się posłużyć teorią J'_2 . W takim przypadku funkcja kształtu f ma stałą wartość i nie trzeba jej identyfikować $f(y)=1$. Do identyfikacji wszystkich pozostałych stałych z grupy iii) i iv) oraz ν wystarczy dysponować wynikami dwóch prób izotermicznych skręcania – próbka rurkowa (ewentualnie ścinania – próbka płaska) obejmujących pełną przemianę wprost i odwrotną (pełną pętlę histerezy) wykonane w dwóch różnych temperaturach $T_1, T_2 > A_f^0$ z zakresu pseudosprężystego zachowania stopu SMA. Oznacza to, że w przypadku stopu NiTi trzeba obciążyć próbkę tak, aby osiągnąć maksymalne efektywne odkształcenie fazowe około $\varepsilon_{eq}^T \approx 6.0\%$ (maksymalne odkształcenie fazowe ścinające rzędu $\varepsilon_{\theta_z}^T \approx 5.2\%$), do którego trzeba dodać odkształcenie sprężyste wynikające z naprężenia plateau płynięcia pseudosprężystego, którego wartość zależy od temperatury w jakiej wykonywana jest próba.

Dla przykładu dla $T=315$ jest $\sigma^{AM} = 440$ [MPa] ($\sigma^{AM} = \sqrt{3}k$) – por. tabela 5.2, oraz $2\mu = 45.4$ [GPa] – por. tabela 5.1, więc $\varepsilon_{\theta_z}^e \approx 0.97\%$. Jakkolwiek można by przeprowadzać odpowiednią identyfikację stałych materiałowych z łatwych do wykonania i popularnych (tanich) prób czystego rozciągania lub ściskania to jednak zalecane jest w pierwszej kolejności wykonywanie prób ścinania. Gdyż z dotychczasowych doświadczeń wynika, że naprężenie krytyczne płynięcia pseudosprężystego dla ścinania ma wartość pośrednią pomiędzy taką wartością dla rozciągania i ściskania. Unika się też wtedy konieczności szacowania wartości funkcji kształtu $f(y=1)$ lub $f(y=-1)$. Na podstawie surowych danych doświadczalnych z maszyny wytrzymałościowej należy przygotować dwie serie danych $\varepsilon_{\theta_z}(t)$, $\sigma_{\theta_z}(t)$. Wygodnie jest też w procesie identyfikacji posłużyć się dwoma charakterystycznymi temperaturami przemiany fazowej M_s^0 , A_s^0 z pomiarów DSC. Wartości takich temperatur są standardowo dostarczane przez firmy produkujące stopy z pamięcią kształtu.

W pierwszej kolejności należy sporządzić wykresy $\sigma_{\theta_z} \leftrightarrow \varepsilon_{\theta_z}$ (dla obu temperatur prób izotermicznych). Z tego wykresu metodą offsetu (offset 0.01) opisaną w poprzedniej sekcji należy wyznaczyć wartość współczynnika sztywności

postaciowej 2μ a następnie współczynnika Poissona $\nu = E/2\mu - 1$. Odejmując od całkowitych odkształceń postaciowych odkształcenia sprężyste otrzymuje się postaciowe odkształcenie fazowe – por. wzór (5.44), po to by sporządzić wykresy $\sigma_{\theta z} \leftrightarrow \varepsilon_{\theta z}^T$ dla dwóch różnych temperatur. Z wykresu $\sigma_{\theta z} \leftrightarrow \varepsilon_{\theta z}^T$, o ile wykonany był on dla pełnej pętli histerezy (pełnej przemiany fazowej), można wyznaczyć parametr amplitudy płynięcia pseudosprężystego γ , gdyż dystans pomiędzy „pionowymi” (w idealnym przypadku byłby one pionowe) częściami wykresu wynosi zgodnie ze wzorem (5.18)₂ $\Delta\varepsilon_{\theta z}^T = \frac{\sqrt{3}}{2}\gamma$, ($f(y)=1$, $x=0$, $(n_{\sigma}^{eff})_{12} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\Delta z=1$). Metodą offsetu (offset 0.002) należy wyznaczyć postaciowe naprężenia krytyczne płynięcia pseudosprężystego $k^{AM}(T_1), k^{AM}(T_2)$, a następnie efektywne $\sigma^{AM}(y=0, T_1) = \sqrt{3}k^{AM}(T_1)$, $\sigma^{AM}(y=0, T_2) = \sqrt{3}k^{AM}(T_2)$ przy pełnej przemianie wprost, tj. od stanu gdy $z=0$ oraz w analogiczny sposób naprężenia krytyczne płynięcia pseudosprężystego $\sigma^{MA}(y=0, T_1), \sigma^{MA}(y=0, T_2)$ przy pełnej przemianie odwrotnej, tj. od stanu gdy $z=1$. Posługując się tymi wartościami należy wyznaczyć

$$\Delta_T \sigma^{AM}(y=0) = \frac{\sigma_{\theta z}^{AM}(T_2) - \sigma_{\theta z}^{AM}(T_1)}{(T_2 - T_1)}, \quad (5.27)$$

$$\Delta_T \sigma^{MA}(y=0) = \frac{\sigma_{\theta z}^{MA}(T_2) - \sigma_{\theta z}^{MA}(T_1)}{(T_2 - T_1)}.$$

Wielkości $\Delta_T \sigma^{AM}, \Delta_T \sigma^{MA}$ stanowią z założenia doświadczalną wartość pochodnych występujących we wzorach (5.15). Przyrównując odpowiadające sobie wielkości we wzorach (5.15) i (5.27). Po prostych przekształceniach otrzymuje się ($f(y=0)=1$)

$$\Delta s^* = (\Delta_T \sigma^{AM} + \Delta_T \sigma^{MA})\gamma / (2\rho), \quad \bar{s}_0 = -(\Delta_T \sigma^{AM} - \Delta_T \sigma^{MA})\gamma / (2\rho). \quad (5.28)$$

Z powyższych wzorów wyznacza się wartości stałych materiałowych $\Delta s^*, \bar{s}_0$. Podstawiając wartości tych stałych oraz wartości charakterystycznych temperatur przemiany fazowej A_s^0, M_s^0 (DSC) do wzorów (5.17)_{1,2} otrzymuje się zidentyfikowane wartości stałych materiałowych $\Delta u^*, \bar{u}_0$. Na tym kończy się proces wyznaczania danych z grupy iii).

W przypadku, gdy z uwagi na dokładność przewidywań modelowych musi być wykorzystana teoria J'_3 należy wykonać jeszcze co najmniej dwie próby izotermiczne w jednej z temperatur np. T_1 , w której już wykonano próbę skręcania – jedną rozciągania i jedną ściskania. Przy czym nie muszą to już być próby zawierające pełne pętle histerezy, gdyż z odpowiednich wykresów naprężenie odkształcenie należy wyznaczyć tylko krytyczne efektywne naprężenia płynięcia

pseudosprężystego $A \rightarrow M$ dla ścieżki obciążenia rozciąganie $\sigma^{AM}(y=1, T_1)$ i ściskanie $\sigma^{AM}(y=-1, T_1)$, ($\sigma^{AM} = |\sigma_z^{AM}|$). Należy to uczynić analogicznie jak to opisano powyżej dla przypadku wyznaczania krytycznego naprężenia płynięcia pseudosprężystego $A \rightarrow M$ dla skręcania – $\sigma^{AM}(y=0, T_1)$. Dysponując wartościami naprężeń krytycznych należy wyznaczyć dwie wartości funkcji $f(y)$ dla $y=-1$ i $y=1$ ze wzoru (5.11), a zidentyfikować wartości trzech stałych występujących we wzorze $f(y) = a_1 - a_2 \cdot \exp[-a_3 \cdot (y+1)]$ – por. (5.12), wykorzystując znane wartości $\{f(y=-1), f(y=0)=1, f(y=1)\}$.

Sposób wyznaczania danych materiałowych z czwartej grupy, tj. stałych kinetyki przemiany fazowej wprost i odwrotnej wymaga znajomości przynajmniej dwóch doświadczalnych krzywych kinetyki przemiany fazowej $z(D)$, tj. zależności udziału objętościowego fazy martenzytycznej od siły termodynamicznej przemiany fazowej. Jednym dla monotonicznej przemiany wprost ($z_f(D); 0 \leq D$) oraz jednym dla monotonicznej przemiany odwrotnej ($z_r(D); D \leq 0$). Najlepiej jeśli są to wykresy dla, tzw. pełnych przemian fazowych, patrz tekst poniżej wzoru 6.5 w rozdziale 6. W celu ich wykreślenia należy postępować zgodnie z procedurą podaną schematycznie na rysunku 6.3. Przykłady tak otrzymanych krzywych znajdują się na rysunkach 6.4d i 6.4e. Następnie należy sporządzić dwie modelowe krzywe kinetyki: jedną dla monotonicznej przemiany wprost, a drugą dla monotonicznej przemiany odwrotnej zgodnie ze wzorami (6.5). Występujący w tych równaniach parametr z^* jest istotny, gdy nie dysponuje się danymi doświadczalnymi dla pełnych przemian fazowych. Oznacza on wartość udziału fazy martenzytycznej przy rozpoczęciu danej monotonicznej przemiany wprost lub odwrotnej. Zmieniając wartości stałych kinetyki w równaniach modelowych należy doprowadzić do jak najlepszej zgodności krzywych doświadczalnych z modelowymi, np. metodą najmniejszych kwadratów. Wartości stałych kinetyki, przy których taka najlepsza zgodność zostaje uzyskana, stanowią zidentyfikowane wartości stałych kinetyki dla danego materiału SMA. W przypadku omawianego w niniejszym rozdziale stopu NiTi identyfikacji stałych kinetyki modelu R_L dokonano w rozdziale 6, dla monoklinicznej przemiany martenzytycznej wprost i odwrotnej. Zidentyfikowane wartości stałych kinetyki podano poniżej podwójnej linii w tabeli 5.5. Również w rozdziale 6 zawarto szeroką analizę i dyskusję odnośnie kinetyki termosprężystej martenzytycznej przemiany fazowej proponowanych modeli kinetyki, weryfikacji doświadczalnej równań kinetyki proponowanych w modelu R_L oraz wynikających z zaobserwowanych przez autora prawidłowości pewnych udoskonaleń równań kinetyki.

Podany powyżej program wyznaczania stałych i funkcji materiałowych modelu R_L to program minimum. Uzyskanie dodatkowej informacji doświadczalnej, przy

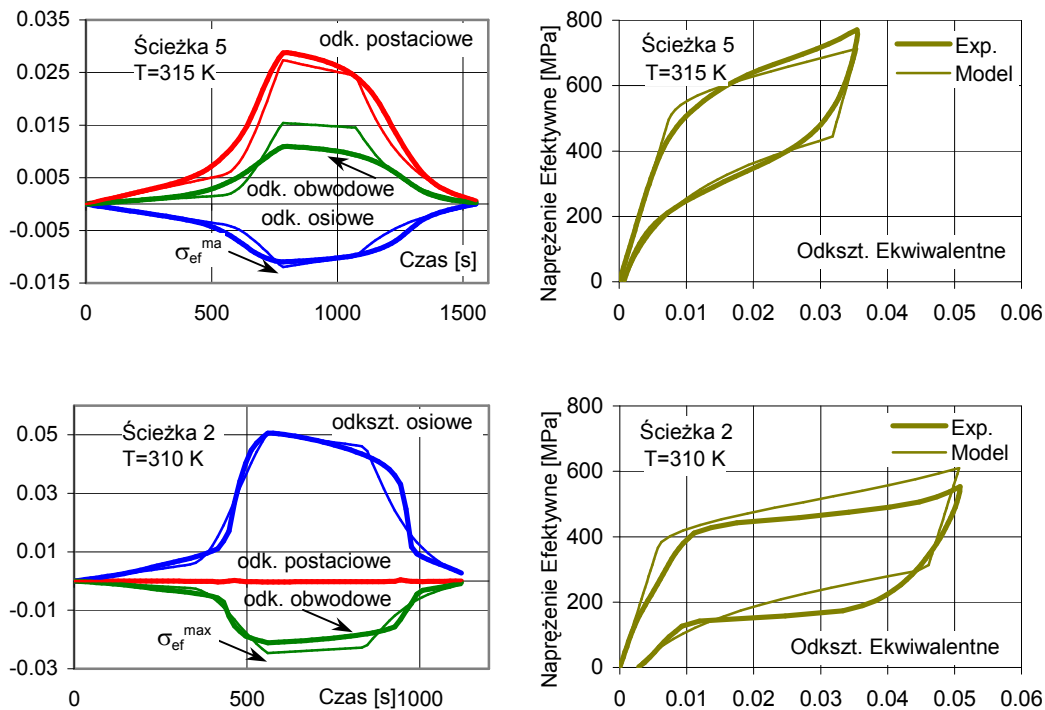
zgodzie na poniesienie dodatkowych kosztów, pozwala na zwiększenie wiarygodności identyfikowanych danych materiałowych a co za tym idzie dokładności przewidywań modelowych.

Wykorzystując zidentyfikowane dane materiałowe podane w tabeli 5.5 sporządzono wykresy modelowych przebiegów czasowych składowych tensora odkształcenia całkowitego $\varepsilon_z(t), \varepsilon_\theta(t), \varepsilon_{z\theta}(t)$ i porównano je z odpowiednimi przebiegami zarejestrowanymi podczas rzeczywistych prób. Sporządzono również modelowe wykresy naprężenia efektywnego w zależności od całkowitego odkształcenia ekwiwalentnego ($\sigma_{ef} - \varepsilon_{eq}$) i porównano z wykresami sporządzonymi na podstawie danych doświadczalnych. Na rysunku 5.14 pokazano przykładowo takie wykresy dla temperatury 315K i ścieżki 5, oraz dla temperatury 310K i ścieżki 2 przy wymogu, że maksymalne odkształcenie efektywne ε_{eq}^{max} jest takie samo w przebiegu rzeczywistym, i w przebiegu modelowym. Grubszymi liniami zaznaczono wykresy rzeczywiste uzyskane w próbach, zaś cienkimi zaznaczono krzywe modelowe. Z analizy danych przeprowadzonej w rozdziale szóstym wynika, że w przypadku badanego stopu NiTi stałe kinetyki przemiany fazowej wprost i odwrotnej $p_1 = p_2 = 0$. Co oznacza, że równania kinetyki R-L sprowadzają się w przypadku badanego stopu NiTi do równań modelu Johnson-Mehl-Avrami-Kołmogorow, patrz rozdział 6, sekcja 6.1. Co więcej, również pozostałe dwa zidentyfikowane parametry równań kinetyki przemian wprost i odwrotnych przyjmują te same wartości $m_1 = m_2 = 1.8$, $r_1 = r_2 = 6.6$. Nie jest to jak się wydaje z analizy przeprowadzonej w rozdziale 6 zbieżność przypadkowa i fakt ten sugerowałby ograniczenie się w równaniach kinetyki do wyłącznie trzech parametrów materiałowych. Pomimo widocznej na rysunku 5.14 dobrej, a nawet można

Tabela 5.5. Komplet stałych materiałowych modelu R_L dla stopu Ni_{51at%}-Ti (przemiana monokliniczna).

Dana	Wartość	Dana	Wartość
ρ	6500 [kg/m ³]	Δu^*	15336 [J/kg]
E	64 [GPa] **	Δs^*	59 [J/kgK]
ν	0.41 **	\bar{u}_0	442 [J/kg]
α_0	11e-6 (6e-6) # [1/K]	\bar{s}_0	0 [J/kgK]
c_p	490 [J/kgK]	γ	0.054
λ_c	18 [W/mK]		
m1	1.8	m2	1.8
r1	6.6	r2	6.6
p1	0.0	p2	0

** T=315 [K], # w nawiasie podano wartość dla fazy martenzytycznej



Rys. 5.14 Porównanie rzeczywistych przebiegów czasowych składowych $\varepsilon_z(t), \varepsilon_\theta(t), \varepsilon_{z\theta}(t)$ tensora całkowitego odkształcenia z przebiegami przewidywanymi modelem R_L oraz porównanie rzeczywistych przebiegów $\sigma_{ef} - \varepsilon_{eq}$ z przebiegami modelowymi w przypadku a) Próba w temperaturze 315 K, ścieżka 5. b) Próba w temperaturze 310K, ścieżka 2.

stwierdzić bardzo dobrej, zgodności przewidywań modelowych z rzeczywistymi przebiegami występuje problem. Bowiern uzyskana doświadczalnie pętla histerezy w przypadku ścieżki 2 w temperaturze 310K nie zamyka się, co powoduje pozostawanie „reszkowego” martenzytu w stanie bez naprężeniowym próbki w temperaturze powyżej A_f^0 . Może to nastęrczać poważne trudności. Z tego powodu warto jest pozostawić modelową możliwość przyjęcia innych wartości parametrów kinetyki dla przemiany fazowej wprost i dla przemiany fazowej odwrotnej. Pozwala to poprzez odpowiednią modyfikację parametrów kinetyki dla przemiany odwrotnej modelowo „domknąć” pętlę histerezy kosztem niewielkiej niezgodności pomiędzy przewidywaniami modelowymi i doświadczeniem. Wykresy zawarte na rysunku 5.14 dobrze ilustrują moc przewidywania omawianej w niniejszej rozprawie teorii pseudosprężystości stopów z pamięcią kształtu.

5.5 Podsumowanie

Przedstawione w niniejszym rozdziale wyniki, specjalnie zaplanowanych badań doświadczalnych dla stopu NiTi, pozwoliły po ich analitycznym opracowaniu na weryfikację podstawowych założeń teoretycznych fenomenologicznej teorii pseudosprężystości – modelu R_L . Podjęto próbę weryfikacji założenia o izotropii sprężystej zachowania materiału polikrystalicznego NiTi, izotropii niesprężystej tj. założenia, że makroskopowy tensor odkształceń fazowych można wyrazić za pomocą izotropowej funkcji tensorowej. Zweryfikowano przydatność wprowadzenia koncepcji funkcji kształtu $f(y)$, tj. próby opisanego efektu zależności naprężenia krytycznego płynięcia za pomocą powierzchni granicznej zależnej od drugiego i trzeciego niezmiennika tensora dewiatora naprężenia. Zweryfikowano dopuszczalność wyrażenia odkształcenia fazowego $\boldsymbol{\epsilon}^T$ za pomocą funkcji $\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\sigma})$ izotropowej względem tensora naprężenia. Porównanie przewidywań modelowych z danymi doświadczalnymi pozwala stwierdzić, iż przy dokonanych założeniach modelowych i poprawnej identyfikacji stałych i funkcji materiałowych można uzyskać rozbieżność pomiędzy rzeczywistymi przebiegami i przewidywaniami modelowymi rzędu kilkunastu procent. Wydaje się, iż przy tak skomplikowanym zachowaniu jak zachowanie stopów z pamięcią kształtu taka dokładność przewidywań modelowych jest zadowalająca. Podano szczegółową procedurę identyfikacji jak również zidentyfikowano komplet danych materiałowych modelu R_L , w przypadku stopu NiTi, oraz w jawny sposób wyspecyfikowano ilość niezbędnych do tego informacji doświadczalnych. Wskazano także najbardziej dogodny sposób ich pozyskiwania. Opisane w niniejszym rozdziale czynności stanowią pierwszą tak szeroko zakrojoną i wszechstronną doświadczalną weryfikację teorii pseudosprężystego zachowania stopu z pamięcią kształtu.

Rozdział 6. Nowy specyficzny model kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej

6.1 Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale przedstawiona jest analiza danych doświadczalnych uzyskanych dla polikrystalicznego stopu NiTi, dzięki której w sposób pośredni na podstawie pomierzonych efektów odkształceniowych, pozyskano informacje o kinetyce indukowanej naprężeniem termosprężystej przemiany martenzytycznej. Analiza ta pozwoliła na weryfikację, proponowanych dotychczas w literaturze, modeli kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej dla przemiany wprost i odwrotnej. W szczególności pozwoliła na zaproponowanie nowego specyficznego modelu kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej stanowiącego rozwinięcie modelu kinetyki Ranieckiego i Lexcellenta, kinetyki R-L, zaproponowanego w pracy [63]. Praca przedstawiona w niniejszym rozdziale jest pracą oryginalną autora niniejszej rozprawy dotychczas niepublikowaną. Jedynie częściowe wyniki prac nad kinetyką termosprężystej przemiany martenzytycznej zostały opublikowane w pracy [93].

Formalne równania kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej stanowią ważny element jakiegokolwiek modelu konstytutywnego stopów z pamięcią kształtu. Obserwacje metalurgiczne wskazują, że martenzytyczna przemiana fazowa zachodzi poprzez nukleację i wzrost. Prace nad klasycznym obecnie modelem kinetycznym przemian fazowych (p.f.), zachodzących poprzez nukleację i wzrost, zostały zapoczątkowane w roku 1939 przez Avramiego. Obecnie autorstwo tego modelu przypisuje się czterem autorom Avramiemu, Johnsonowi, Mehlowi, Kolmogorowi i z tego powodu model ten często występuje w literaturze pod nazwą teorii JMAK od pierwszych liter nazwisk autorów – por. [57]. Model kinetyki JMAK można wyrazić następującym bardzo ogólnym i prostym wzorem

$$\ln(1 - z) \equiv f(x) = -k \cdot (x - x_s)^n, \quad (6.1)$$

gdzie z oznacza udział objętościowy powstającej fazy, x jest wielkością względem której opisywany jest postęp przemiany fazowej, może to być na przykład czas, x_s stanowi pewną krytyczną wartość parametru przy jakiej rozpoczyna się przemiana fazowa, k i n stanowią stałe modelowe charakteryzujące kinetykę przemiany fazowej, zaś ich wartości liczbowe zależą od fizycznych uwarunkowań procesów nukleacji i wzrostu. Jeśli z dobrym przybliżeniem można przyjąć, że wartość prędkości nukleacji nowych zarodków i wartość prędkości wzrostu tych zarodków mających postać kulistą jest stała to parametr n przyjmuje wartość $n = 4$. W ogólnym przypadku współczynniki k i n zależą od stanu w jakim znajduje się ulegający przemianie materiał, a zatem zazwyczaj nie są „stałymi” lecz są funkcjami stanu np. temperatury. Jedno z wielu formalnych wyprowadzeń wzoru (6.1) można znaleźć w książce Portera i Easterlinga [57]. Zakres zastosowania modelu kinetyki JMAK wykracza daleko poza obszar nauki o materiałach gdzie wykorzystywany jest

do opisu zarówno dyfuzyjnych jak i bezdyfuzyjnych przemian fazowych. Równie często formalne równanie matematyczne tego modelu można spotkać w tak odległych dziedzinach jak biologia, ekonomia, chemia, czy nauki społeczne.

W roku 1959 Koistinen i Marburger opublikowali pracę [34] zawierającą obszerny zbiór danych doświadczalnych dla stali węglowych o różnej zawartości węgla i o niewielkich ilościach dodatków stopowych, dotyczący kinetyki indukowanej temperaturą przemiany martenzytycznej zachodzącej w tych stalach podczas hartowania. Dane te doskonale układały się na krzywej określonej wzorem (6.1). Przy czym w równaniu kinetyki Koistinena-Marburgera jako argument x występowała temperatura $x=T$, jako x_s temperatura początku przemiany martenzytycznej $x_s = M_s$, zaś zidentyfikowane przez autorów stałe materiałowe kinetyki przyjmowały wartości $k=0.011$ i $n=1$. Z uwagi na doskonałą zgodność relacji (6.1) dla podanych wyżej wartości parametrów k, n dla dużej ilości stali, Koistinen i Marburger wysunęli hipotezę, że relacja ta stanowi relację uniwersalną ważną dla wszystkich typów stali martenzytycznych. Hipoteza ta w świetle późniejszych badań okazała się nieprawdziwa, gdyż jak się okazało dla różnych stali wartości parametrów k i n mogą przyjmować wartości inne od tych podanych przez Koistinena i Marburgera.

Równanie zaproponowane przez Koistinena i Marburgera na gruncie doświadczalnym zostało uzasadnione na gruncie teoretycznym przez Magee w roku 1968 [38]. Założył on, że ilość nowo sformowanych płytek martenzytu na jednostkę objętości austenitu dN jest wprost proporcjonalna do wzrostu wartości termodynamicznej siły napędowej przemiany fazowej $dN = -\varphi d(\Delta G_v^{\gamma \rightarrow \alpha'})$, gdzie φ jest stałym współczynnikiem proporcjonalności, $\Delta G_v^{\gamma \rightarrow \alpha'}(T)$ jest różnicą energii swobodnej pomiędzy fazą martenzytyczną i austenityczną z założenia zależną tylko do temperatury $d(\Delta G_v^{\gamma \rightarrow \alpha'}) = (d\Delta G_v^{\gamma \rightarrow \alpha'} / dT) dT$. Wyrażenie $d(\Delta G_v^{\gamma \rightarrow \alpha'}) / dT = \Delta S_v^{\gamma \rightarrow \alpha'} = const$ określa zmianę entropii na skutek formowania się fazy martenzytycznej. Wtedy przyrost objętości fazy martenzytycznej może być wyrażony następująco $df = (1-f) \bar{V} dN$, gdzie \bar{V} stanowi średnią objętość nowo formujących się płytek. Powyższe założenia prowadzą do następującej relacji określającej kinetykę martenzytycznej przemiany fazowej w stalach

$$\ln(1-z) = -(\bar{V} \varphi \Delta S_v^{\gamma \rightarrow \alpha'}) (T - M_s). \quad (6.2)$$

Powyższy związek dostarcza interpretacji fizycznej stałej k występującej w modelu Koistinena i Marburgera ($k = \bar{V} \varphi \Delta S_v^{\gamma \rightarrow \alpha'}$).

W przypadku stopów z pamięcią kształtu zachodzi inna niż w stalach tzw. termosprężysta przemiana martenzytyczna, która może być indukowana nie tylko obniżaniem temperatury ale również przyłożeniem naprężenia (odkształcenia), patrz także tekst powyżej rysunku 2.2 w rozdziale drugim. Adaptacja reguły kinetyki

Koistinena-Marburgera (JMAK), do opisu termosprężystej przemiany martenzytycznej, została zaproponowana przez Tanakę i innych w roku 1986 [78]. Autorzy ci zaproponowali równania kinetyki dla przemiany wprost i odwrotnej, która może być indukowana połączonym działaniem temperatury i/lub naprężenia (jednoosiowego). Sformułowali oni przyrostowe warunki jakie musi spełniać obciążenie termomechaniczne, aby możliwa była aktywna przemiana fazowa. Nie podali jednak explicite obszarów stanów termodynamicznych, z których dopuszczalny jest proces zachodzenia aktywnej przemiany fazowej, co zapewniałoby zgodność reguł kinetyki przemiany fazowej z drugą zasadą termodynamiki. Równania kinetyki Tanaki i innych, w nieco zmodyfikowanej formie mają postać

$$\ln(1-z) = a_M(T - M_s) - b_M \sigma_{11}, \quad \dot{z}/(1-z) = (b_M \dot{\sigma}_{11} - a_M \dot{T}), \quad (6.3)$$

$$\ln(z) = -a_A(T - A_s) + b_A \sigma_{11}, \quad \dot{z}/z = (b_A \dot{\sigma}_{11} - a_A \dot{T}),$$

gdzie A_s oznacza temperaturę początku przemiany austenitycznej, $a_M, b_M, a_A, b_A > 0$ stałe materiałowe równań kinetyki przemiany fazowej. Przy czym zgodnie z wymogiem autorów aktywna przemiana wprost (A→M) może zachodzić gdy $(b_M \dot{\sigma}_{11} - a_M \dot{T}) \geq 0$, zaś aktywna przemiana odwrotna (M→A) może zachodzić gdy $(b_A \dot{\sigma}_{11} - a_A \dot{T}) \leq 0$. Po podstawieniu do wzoru (6.3)₁ $\sigma_{11} \equiv 0$ – stan beznaprężeniowy, odzyskuje się równanie kinetyki Koistinena-Marburgera. Chociaż równania Tanaki i innych stanowiły istotny postęp przy formułowaniu równań kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej to autorzy ci nie zaproponowali żadnych reguł dotyczących opisu formowania się tzw. wewnętrznych pętli histerezy. Problem ten został poruszony w pracy Lianga i Rogersa z roku 1990 [36]. Autorzy ci zaproponowali „kosinusowe” równania kinetyki przemiany fazowej, w zwartej postaci przypomniane poniżej

$$z = \frac{1-z^*}{2} \cos[\alpha_M(T - M_f) + \beta_M \sigma_{11}] + \frac{1+z^*}{2} \quad (6.4)$$

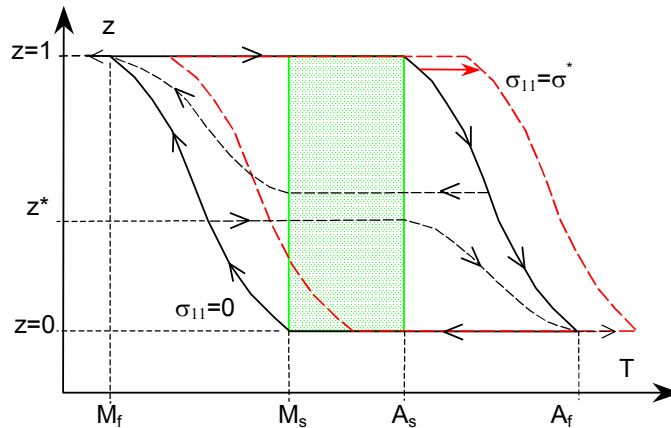
aktywna p.f. wprost jeśli $M_f \leq T \leq M_s$,

$$z = \frac{z^*}{2} \left\{ \cos[\alpha_A(T - A_s) + \beta_A \sigma_{11}] + \frac{1}{2} \right\} \quad \text{aktywna p.f. odwrotna jeśli } A_s \leq T \leq A_f,$$

gdzie z^* oznacza wartość początkową udziału objętościowego fazy martenzytycznej pewnego procesu cząstkowej przemiany fazowej, M_f, A_f oznaczają temperatury końca przemiany martenzytycznej i austenitycznej w warunkach bez naprężeniowych, zaś $\alpha_M = \pi/(M_s - M_f)$, $\alpha_A = \pi/(A_f - A_s)$, β_M, β_A stałe materiałowe równań kinetyki przemiany fazowej. Przez przemianę „pełną” rozumiana jest tutaj przemiana, która rozpoczyna się od stanu jednofazowego. Przez

przemianę „cząstkową” rozumiana jest przemiana rozpoczynająca się z jakiegokolwiek stanu dwufazowego.

Aktywna przemiana fazowa wprost, przy zerowym naprężeniu zewnętrznym $\sigma_{11} = 0$, może zachodzić tylko w zakresie temperatur $M_f \leq T \leq M_s$, podczas gdy aktywna przemiana odwrotna może zachodzić tylko w zakresie temperatur $A_s \leq T \leq A_f$.



Rys. 6.1 Schematyczna ilustracja formowania się zewnętrznej i wewnętrznych pętli histerezy przy pełnej i cząstkowych przemianach fazowych zgodnie z równaniami kinetyki Lianga i Rogersa.

Przyłożenie jednoosiowego naprężenia $\sigma_{11} = \sigma^*$ powoduje przesunięcie charakterystycznych temperatur przemiany fazowej w kierunku wyższych temperatur. Gdy do wzoru (6.4)₁ podstawią się $z^* = 0$ to uzyskuje się krzywą opisującą postęp pełnej przemiany fazowej (A→M), zaś gdy do wzoru (6.4)₂ podstawią się $z^* = 1$ to uzyskuje się krzywą opisującą postęp pełnej przemiany odwrotnej (M→A).

Formowanie się zewnętrznej i wewnętrznych pętli histerezy, przy pełnej i cząstkowych przemianach fazowych, zgodnie z równaniami kinetyki Lianga i Rogersa, zilustrowano schematycznie na rysunku 6.1. Strzałką zaznaczono kierunek przesuwania się „obszaru” stanów przemian fazowych na skutek przyłożenia naprężenia. Jakkolwiek „kosinusowy” model kinetyki Lianga i Rogersa jest efektywny, z obliczeniowego punktu widzenia, to stanowi on odejście od obserwacji metalurgicznych, które wskazują raczej na poprawność zależności logarytmicznej wyrażonej równaniem Koistinen-Marburgera, czy Tanaki i innych.

Dalszy znaczny postęp przy modelowaniu kinetyki termosprężystej martenzytycznej przemiany fazowej został osiągnięty przez Ranieckiego i Lexcellenta w roku 1992 [62]. Sformułowali oni w oparciu o formalizm termodynamiki nierównowagowej, niezwykle ogólne równania kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej. Równania te składają się z dwóch części tzw. ogólnych równań kinetyki przemiany, które określają stany termodynamiczne z jakich może rozpocząć się aktywna przemiana fazowa wprost lub odwrotna oraz przy jakich zmianach zewnętrznych zmiennych stanu może mieć to miejsce. Ogólne równania kinetyki przemiany zapewniają zgodność procesów przemiany fazowej z drugą zasadą termodynamiki.

Druga część równań kinetyki przemiany tzw. specyficzne równania kinetyki przemiany fazowej podają w postaci parametrycznej konkretne związki pomiędzy strumieniem termodynamicznym, tj. udziałem objętościowym fazy martenzytycznej z i termodynamiczną siłą napędową przemiany fazowej π_f . Autorzy przewidują ich obowiązywanie w przypadku wszystkich stopów z pamięcią kształtu, zaś zgodność przewidywań modelowych z krzywymi doświadczalnymi dla danego stopu SMA jest uzyskiwana poprzez właściwy dobór materiałowych parametrów kinetyki.

Równania kinetyki Ranieckiego i Lecellenta pozwalają na modelowanie przemiany fazowej, gdy wymuszenie stanowią złożone stany naprężenia, zawierają one również regułę formowania się wewnętrznych pętli histerezy. W roku 1994 model kinetyki Ranieckiego i Lexcellenta został wzbogacony i ulepszony, po to by lepiej opisywał początkowe stany przemiany fazowej [63]. W tym celu wprowadzono nowy element, tzw. funkcje „progowe”. Zaś postać specyficznych równań kinetyki przemiany fazowej została zaproponowana w postaci bardzo zbliżonej do tej jaka jest proponowana przez teorię JMAK. Podano zarówno scałkowaną postać równań obowiązującą dla procesów monotonicznych jak i postać przyrostową dogodną w obliczeniach numerycznych.

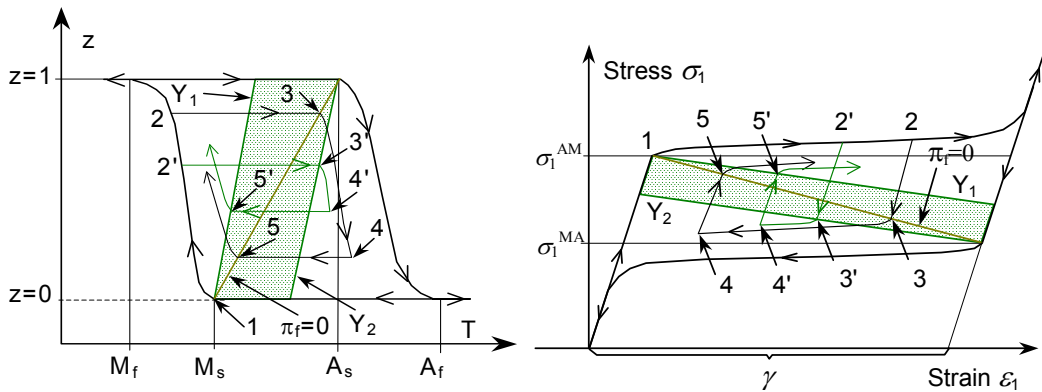
Podstawową słabością wszystkich modeli kinetyki proponowanych w ostatnich latach dla stopów SMA, jest skąpa ilość bądź zupełny brak danych doświadczalnych, które potwierdzałyby poprawność proponowanych podejść teoretycznych. Szczególnie w przypadku modeli kinetyki, które mają obowiązywać dla złożonych stanów naprężenia i przy połączonych obciążeniach termomechanicznych.

6.2 Formalne równania kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej – podstawy termodynamiczne

Jako punkt wyjściowy do dalszych rozważań nad kinetyką termosprężystej przemiany martenzytycznej zostanie przyjęty model kinetyki Ranieckiego i Lexcellenta z roku 1994 [63]. Autorzy tego modelu z jednej strony opierali się na bogatych informacjach podawanych w literaturze metalurgicznej, głównie dotyczących kinetyki przemian martenzytu nie termosprężystego, zaś z drugiej na wymogach formalizmu termodynamiki nierównowagowej z parametrami wewnętrznymi.

Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki, każdemu nieodwracalnemu termodynamicznie procesowi towarzyszy dyssypacja energii, którą w przypadku termosprężystej przemiany martenzytycznej można wyrazić wzorem $\dot{w}_{Disp} = \pi^f \dot{z} \geq 0$ – patrz także tekst poniżej wzoru (3.20). Przytoczona relacja z jednej strony wskazuje, w którym kierunku dopuszczalne jest zachodzenie aktywnej przemiany fazowej dla materiału znajdującego się w określonym stanie termodynamicznym, gdyż podczas aktywnej przemiany fazowej zawsze musi być

spełniony warunek $sign(\pi^f) = sign(\dot{z})$. Zaś z drugiej strony wskazuje ona, że musi istnieć pewien związek funkcyjny pomiędzy termodynamiczną siłą napędową przemiany fazowej i udziałem objętościowym fazy martenzytycznej, $\pi^f = \pi^f(z)$. Jawną postać tego związku stanowią specyficzne równania kinetyki przemiany fazowej. Termodynamika wskazuje na istnienie pewnych wyróżnionych stanów określonych równaniem $\pi^f(\sigma, T, z) = 0$ – por. (3.14), (3.35). Równanie to określa stany „krytyczne”, w których rozpoczyna się pełna przemiana wprost A→M lub odwrotna M→A ($z_{start} = 0$ lub $z_{start} = 1$), oraz w których rozpoczynają się cząstkowe przemiany fazowe wprost lub odwrotne ($z_{start} = z^*$; $0 < z^* < 1$) w stopach z pamięcią kształtu. Doświadczalne występowanie przewidywanych teoretycznie stanów krytycznych wykazał dla stopu z pamięcią kształtu CuZnAl Müller i Xu w roku 1991, patrz [44]. W przypadku niektórych stopów z pamięcią kształtu przemiana fazowa może rozpoczynać się z pewnym „opóźnieniem” po przekroczeniu linii $\pi^f = 0$ – patrz na przykład Tanaka [79]. Występowanie tego faktu spowodowało wprowadzenie do ogólnego modelu kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej tzw. funkcji wartości progowych $Y_\alpha(\sigma, T, z)$ ($\alpha = 1, 2$) – Raniecki, Lexcellent [63]. Funkcjonowanie tego modelu dla pełnej przemiany wprost i odwrotnej oraz dla przemian cząstkowych, przy indukowaniu przemiany temperaturą, zilustrowano schematycznie na rysunku 6.2a zaś przy indukowaniu przemiany naprężeniem na rysunku 6.2b. Przy obniżaniu temperatury przemiana wprost (austenit → martenzyt) rozpoczyna się po przekroczeniu linii $\pi^f = 0$, punkt 1. Gdy obniżanie temperatury zostanie zatrzymane w punkcie 2 to przemiana fazowa również się zatrzyma. Przy podwyższaniu temperatury przemiana odwrotna (martenzyt → austenit) rozpoczyna się po przekroczeniu linii $\pi^f = 0$, punkt 3. Jeśli podwyższanie temperatury zostanie zatrzymane w punkcie 4 to przemiana odwrotna również się zatrzyma (cząstkowa przemiana fazowa). Gdy następnie temperatura na powrót jest obniżana to cząstkowa przemiana fazowa wprost rozpoczyna się ponownie w punkcie 5, po przekroczeniu linii $\pi^f = 0$. Taki scenariusz jest realizowany w przypadku tych stopów z pamięcią kształtu, które nie wykazują występowania wartości progowych dla przemiany fazowej, tj. dla których można z dobrym przybliżeniem przyjąć że $Y_\alpha(\sigma, T, z) \equiv 0$ ($\alpha = 1, 2$). Stopy z pamięcią kształtu na bazie żelaza zamiast ścieżki 1-2-3-4-5 wykazują raczej zachowanie zgodne ze ścieżką 1-2'-3'-4'-5' – oznaczone kolorem zielonym na rysunku 6.2. Odpowiednie przemiany wprost rozpoczynają się w przypadku takich stopów po przekroczeniu linii Y_1 zaś odpowiednie pełna lub cząstkowe przemiany odwrotne rozpoczynają się po przekroczeniu linii Y_2 .



Rys. 6.2 Schematyczna ilustracja formowania się zewnętrznej i wewnętrznych pętli histerezy przy pełnej i częściowych przemianach fazowych zgodnie z równaniami kinetyki Ranieckiego i Lexcellenta [62], [65].

Modelowe ścieżki obciążenia i odciążenia obejmujące indukowane naprężeniem przemiany fazowe (przy stałej temperaturze) pokazano schematycznie we współrzędnych naprężenie – odkształcenie na rysunku 6.2b. W najogólniejszym przypadku termosprężysta przemiana fazowa może być zaindukowana połączonym działaniem naprężenia i temperatury.

Przydatnym jest wyrażenie równań modelu kinetyki Ranieckiego i Lexcellenta określonej wzorami (3.26) w postaci scałkowanej obowiązującej dla monotonicznych procesów przemiany fazowej, takich jak na przykład 1→2 lub 3→4 na rysunku 6.2. Mają one postać

$$D = [-r_1 \ln(1-z) + p_1 z]^{1/m_1} - C_0^{(1)}(z^*), \quad (6.5)$$

$$C_0^{(1)}(z^*) = [-r_1 \ln(1-z^*) + p_1 z^*]^{1/m_1},$$

$$(-D) = [-r_2 \ln(z) + p_2 (1-z)]^{1/m_2} - C_0^{(2)}(z^*),$$

$$C_0^{(2)}(z^*) = [-r_2 \ln(z^*) + p_2 (1-z^*)]^{1/m_2},$$

gdzie $m_1, r_1, p_1, m_2, r_2, p_2$ są stałymi materiałowymi kinetyki, które należy zidentyfikować indywidualnie dla każdego stopu SMA. Wzory (6.5)_{1,2} obowiązują dla przemian wprost, zaś wzory (6.5)_{3,4} obowiązują dla przemian odwrotnych. Z powyższego widać natychmiast, że równania kinetyki Ranieckiego i Lexcellenta sprowadzają się do modelu kinetyki JMKA po podstawieniu stałych materiałowych kinetyki $p_1 = p_2 = 0$. Wzory (6.5) opisują zarówno pełne jak i częściowe przemiany wprost i odwrotne. Przez proces „pełnej” przemiany fazowej wprost rozumiany jest tutaj monotoniczny proces p.f., który rozpoczyna się od początkowej wartości udziału fazy martenzytycznej $z_{start} = 0$ – czysta faza austenityczna, bez względu na to czy taka „pełna” p.f. dobiegnie monotonicznie do końca przemiany osiągając wartość $z=1$ (lub konwencjonalnie $z=0.99$). Podobnie „pełna” przemiana

odwrotna to monotoniczny proces p.f., który rozpoczyna się od początkowej wartości udziału fazy martenzytycznej $z_{start} = 1$ – czysta faza martenzytyczna, bez względu na to czy taka „pełna” odwrotna p.f. dobiegnie monotonicznie do końca osiągając wartość $z = 0$ (lub konwencjonalnie $z = 0.01$). Opis przebiegu pełnej przemiany fazowych wprost i odwrotnej uzyskuje się ze wzorów (6.5)_{2,4} po podstawieniu $C_0^{(1)}(z^* = 0) = 0$ i $C_0^{(2)}(z^* = 1) = 0$, odpowiednio. Ścieżki kompletnej pełnej przemiany wprost, i następującej po niej kompletnej pełnej przemiany odwrotnej przy założeniu utrzymywania stałej temperatury zaznaczają obwiednie stanów termodynamicznych, które są dostępne dla danego stopu SMA podczas dowolnego izotermicznego procesu przemian fazowych. Częstkowe p.f. wprost i odwrotne to wszystkie takie procesy, które rozpoczynają się od pewnej pośredniej startowej wartości udziału objętościowego fazy martenzytycznej $z_{start} = z^*$ (stan dwufazowy), która następnie rośnie w przypadku przemiany wprost bądź maleje w przypadku przemiany odwrotnej. Zależność funkcyjna stałych, dla danego procesu monotonicznego $C_0^{(\alpha)}(z^*) = f(z^*) = const$, od wartości startowej z^* decyduje o sposobie formowania się tzw. wewnętrznych pętli histerezy przy cząstkowych przemianach fazowych. Specjalny przypadek takiej zależności określony wzorami (6.5)_{2,4} przewiduje, że ścieżki dla cząstkowych przemian fazowych we współrzędnych $z - D$ – por. (3.35), uzyskuje się przez „przesuwanie” ścieżki dla pełnej przemiany fazowej równoległe do osi odciętych (D) aż do chwili gdy punkt przecięcia ścieżki dla pełnej przemiany odpowiadający z^* znajdzie się na osi rzędnych ($D = 0$).

6.3 Krzywe kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej, identyfikacja stałych kinetyki modelu Ranieckiego i Lexcellenta

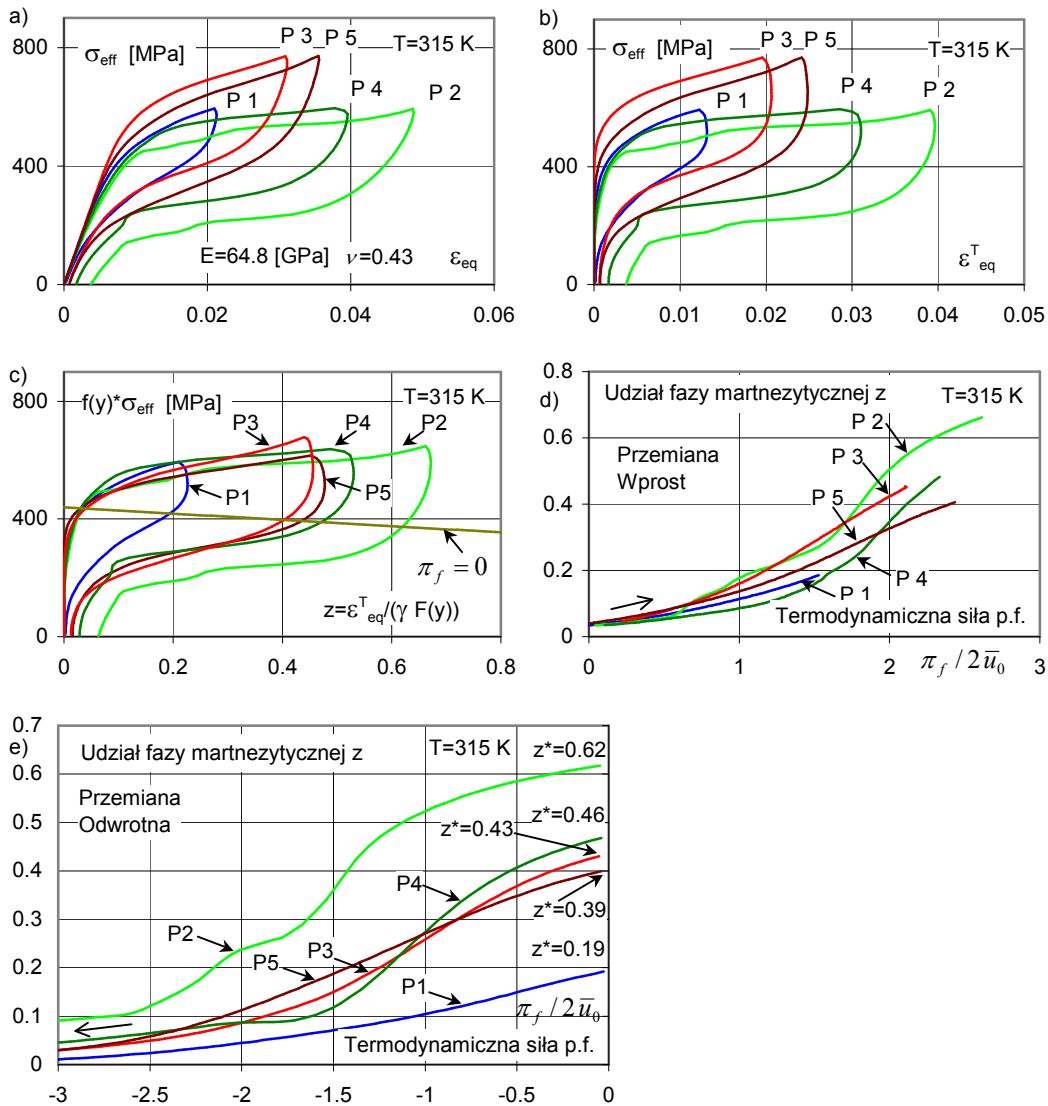
Do analizy kinetyki termosprężystej martenzytycznej przemiany fazowej wykorzystano dane doświadczalne dla polikrystalicznego stopu NiTi. Są to te same dane, których pozyskanie zostało szczegółowo opisane w rozdziale 5. A mianowicie, uzyskane w serii prób izotermicznych dla pięciu ścieżek proporcjonalnych przy wysokich obciążeniach próbki rurkowej, w temperaturach $T = 310, 315, 322.5$ K. Jak już wspomniano w rozdziale 5 – por. rysunek 5.2, w czasie prób wytrzymałościowych nie rejestrowano bezpośrednio sygnału umożliwiającego wprost ocenę zmienności w czasie udziału fazy martenzytycznej $z_{exp}(t)$ – na przykład poprzez pomiar oporności próbki. Z tego powodu, aby dokonać analiz dotyczących kinetyki przemiany fazowej oparto się na założeniach teoretycznych modelu R_L . W szczególności doświadczalne „półempiryczne” przebiegi czasowe zmian udziału objętościowego fazy martenzytycznej w próbce NiTi wyznaczono na podstawie pomierzonych efektów odkształceniowych opierając się na relacji (3.40). Bezpośredniego doświadczalnego potwierdzenia dopuszczalności założeń

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{\theta z} \xrightarrow{(5.4)} \varepsilon_{\theta z}^T \xrightarrow{(5.5)} \varepsilon_{eq}^T \xrightarrow{(3.40)} z = \varepsilon_{eq}^T / \gamma F(y) \\ \sigma_{\theta z} \xrightarrow{(5.1)} \sigma_{ef} \xrightarrow{(5.12)} f(y) \sigma_{ef} \xrightarrow{(3.35)} D = \pi_f(\sigma_{ef}, T, z) / 2\bar{u}_0 \end{array} \right\} z \leftrightarrow D = \frac{\pi_f}{2\bar{u}_0}$$

Rys. 6.3 Schemat przetwarzania danych prowadzący do ujawnienia doświadczalnej zależności pomiędzy półempirycznym udziałem objętościowym fazy martenzytycznej i unormowaną termodynamiczną siłą napędową przemiany fazowej $z(D)$.

modelu R_L , o istnieniu związku pomiędzy niesprężystym odkształceniem i udziałem objętościowym fazy martenzytycznej w stopach z pamięcią kształtu, dostarczyli Vacher i Lexcelent badając zachowanie polikrystalicznego stopu CuZnAl obciążanego jednoosiowo. Patrz także rysunek 3.5 i towarzyszący mu tekst w rozdziale 3. Przebiegi czasowe półempirycznego udziału objętościowego fazy martenzytycznej $z(D)$ w zależności od unormowanej termodynamicznej siły napędowej przemiany fazowej wyznaczano według procedury przetwarzania danych podanej schematycznie na rysunku 6.3. W tym celu jak również do wyliczania zmian unormowanej termodynamicznej siły napędowej przemiany fazowej D niezbędne było wcześniejsze wyznaczenie kompletu termostatycznych stałych i funkcji materiałowych modelu R_L dla badanego stopu NiTi, czego dokonano w rozdziale 5 – por. tabela 5.5,

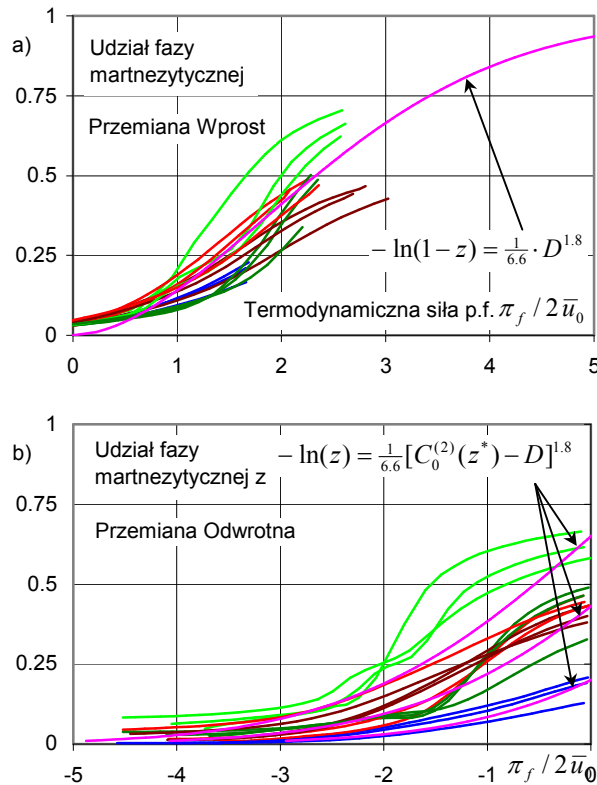
Na rysunku 6.4 pokazano proces przetwarzania danych zgodnie z procedurą podaną na rysunku 6.3 w przypadku danych doświadczalnych uzyskanych w próbach wykonanych w temperaturze 315 K dla pięciu ścieżek obciążenia. W wyniku tej procedury otrzymano krzywe kinetyki przemian fazowych dla monotonicznych przemian fazowych wprost $z_f(D)$ ($D \geq 0$) – por. rysunek 6.4d, i dla monotonicznych przemian fazowych odwrotnych $z_r(D)$ ($D \leq 0$) – por. rysunek 6.4e. Indeks dolny „f” stojący przy z oznacza przemianę wprost, zaś indeks dolny „r” oznacza przemianę odwrotną. Podane na rysunku 6.4e wartości z^* oznaczają maksymalne wartości udziału fazy martenzytycznej w chwili rozpoczęcia monotonicznej przemiany odwrotnej dla kolejnych proporcjonalnych ścieżek obciążenia. Dla każdej ścieżki są one inne, gdyż praktycznie niemożliwe było takie poprowadzenie prób, aby dla każdej ścieżki uzyskać identyczne zaawansowanie przemiany fazowej wprost. W analogiczny, jak to opisano powyżej, sposób otrzymano krzywe kinetyki przemian fazowych dla temperatur 310K i 322.5 K. Na rysunku 6.4c wykreślono linię wyznaczającą, zgodnie z przewidywaniami modelu R_L , stany pełnej równowagi termodynamicznej $\pi_f = 0$. Z dobrym przybliżeniem można przyjąć, że miejsca rozpoczęcia cząstkowych odwrotnych przemian fazowych znajdują się właśnie na tej linii. Uzasadnia to przyjęcie w przypadku badanego stopu NiTi zerowej wartości funkcji progowej $Y_2(\sigma, T, z) = 0$. Jakkolwiek nie wykonano dla badanego stopu prób obejmujących cząstkowe przemiany wprost



Rys. 6.4 Ilustracja procesu przetwarzania danych doświadczalnych w celu otrzymania empirycznych krzywych kinetyki przemiany fazowej. Kolejno wykresy a) Naprężenie efektywne \leftrightarrow odkształcenie ekwiwalentne $\sigma_{\text{ef}} \leftrightarrow \varepsilon_{\text{eq}}$. b) Naprężenie efektywne \leftrightarrow ekwiwalentne odkształcenie fazowe $\sigma_{\text{ef}} \leftrightarrow \varepsilon_{\text{eq}}^T$. c) Zredukowane naprężenie efektywne \leftrightarrow ekwiwalentne odkształcenie fazowe $f(y) \cdot \sigma_{\text{ef}} \leftrightarrow \varepsilon_{\text{eq}}^T$. d) Krzywe kinetyki dla przemiany wprost $z_f \leftrightarrow D$. e) Krzywe kinetyki dla przemiany odwrotnej $z_r \leftrightarrow D$.

to w dalszym ciągu poniżej przyjęto, że również dla cząstkowych przemian wprost funkcja progowa jest tożsamościowo równa zero $Y_1(\sigma, T, z) = 0$ dla analizowanego stopu NiTi.

Zestawienie doświadczalnych krzywych kinetyki przemian fazowych wprost i odwrotnych dla 15 prób, obejmujących pięć ścieżek obciążenia w trzech temperaturach, pokazano na rysunku 6.5. Zgodnie z nomenklaturą wprowadzoną powyżej wszystkie krzywe kinetyki przemiany pokazane na rysunku 6.5a to pełne przemiany fazowe gdyż startują one z jednofazowego stanu austenicznego $z_{start} = 0$. Model kinetyki Ranieckiego-Lexcellentta (R-L) przewiduje, iż pełną przemianę fazową wprost bez względu na typ ścieżki obciążenia, tj. wartość parametru y opisuje tylko jedna krzywa modelowa określona wzorem (6.5)₁, w którym należy podstawić $C_0^{(1)} = 0$. Takie podejście, które zostanie zachowane przez autora niniejszej rozprawy również przy modyfikacji modelu kinetyki



Rys. 6.5 Zestawienie krzywych kinetyki przemian fazowych wprost i odwrotnych indukowanych naprężeniem dla 15 prób obejmujących pięć ścieżek obciążenia w trzech temperaturach. Jeden kolor oznacza tę samą ścieżkę obciążenia. Różowym kolorem wykreślono krzywe przewidywane przez model kinetyki R-L.

proponowanego przez Ranieckiego i Lexcelent'a, motywowane jest konieczną prostotą modelu, zapewniającą efektywność numeryczną przy zachowaniu pożądanego poziomu dokładności przewidywań modelowych. Metodą prób i błędów stwierdzono, że wszystkie pokazane na rysunku 6.5a krzywe doświadczalne można opisać krzywą modelu kinetyki R-L, gdy zostaną podstawione wartości parametrów kinetyki przemiany $m_1 = 1.8, r_1 = 6.6, p_1 = 0$. Krzywą modelu kinetyki R-L uzyskaną dla tych wartości parametrów również wykreślono na rysunku 6.5a. Jak można zauważyć, kinetyka termosprężystej przemiany martenzytycznej w stopie NiTi jest niezwykle złożonym procesem i jeśli chce się opisywać tę kinetykę stosunkowo nieskomplikowanymi wzorami matematycznymi typu (6.5) to należy spodziewać się rozbieżności pomiędzy modelową i rzeczywistą wartością udziału fazy martenzytycznej rzędu nawet 0.15 dla tej samej wartości termodynamicznej siły napędowej przemiany fazowej. Jeżeli taka dokładność okazałaby się niewystarczająca to należy do modelu kinetyki wprowadzić parametr γ , tj. zależność modelu kinetyki od ścieżki obciążenia. Wszystkie krzywe odwrotnych przemian fazowych pokazane na rysunku 6.5b są „cząstkowymi” przemianami gdyż rozpoczynają się od wartości $z_{start} = z^* \neq 1$. Rozważania przedstawione w następnej sekcji wskazały, iż za pomocą modelu kinetyki R-L można uzyskać dobre wyniki modelowania kinetyki przemiany odwrotnej. Jeśli we wzorach (6.5), zostaną użyte te same wartości stałych kinetyki dla przemiany odwrotnej i dla przemiany wprost – tutaj $m_2 = 1.8, r_2 = 6.6, p_2 = 0$. Na rysunku 6.5b wykreślono dla przykładu dwie krzywe kinetyki przemiany odwrotnej opisywane wzorami (6.5)_{3,4} dla wartości startowych $z^* = 0.2$ i $z^* = 0.65$. O ile dla wartości $z^* = 0.2$ uzyskuje się dobrą zgodność pomiędzy krzywymi rzeczywistymi i modelowymi to w przypadku $z^* = 0.65$ występują rozbieżności i co do wartości i co do ogólnego charakteru pomiędzy krzywymi doświadczalnymi i modelowymi. Jak to zostanie wykazane w następnej sekcji rozbieżności co do ogólnego przebiegu krzywej kinetyki przemiany odwrotnej wynikają przede wszystkim z niedoskonałej reguły formowania się wewnętrznych pętli histerezy wyrażonej wzorem (6.5)₄.

6.4 Analiza i dyskusja danych doświadczalnych – profile prędkości termosprężystej przemiany martenzytycznej indukowanej naprężeniem w polikrystalicznym stopie NiTi

6.4.1 Nowy formalny model kinetyki cząstkowych przemian fazowych

Bardziej subtelnych informacji, dotyczących przebiegu termosprężystej przemiany martenzytycznej, niż te zilustrowane na rysunku 6.5, dostarcza analiza przebiegów prędkości przemiany fazowej. W szczególności analiza prędkości „właściwej”¹

¹ W literaturze angielskojęzycznej prędkość ta nazywana jest extended velocity.

odniesionej do bieżącej objętości transformującej się fazy, a określonej następującymi wzorami w przypadku przemiany wprost i odwrotnej

$$z_{ext_f}(D) \equiv \frac{1}{1-z(D)} \frac{dz}{dD}(D) \geq 0, \quad z_{ext_r}(D) \equiv -\frac{1}{z(D)} \frac{dz}{dD}(D) \leq 0. \quad (6.6)$$

Prędkość właściwa zdefiniowana powyżej w swej istocie eliminuje wpływ wyczerpywania się transformującej się fazy na prędkość przemiany fazowej. Innymi słowy zawiera ona informacje o wpływie na prędkość przemiany fazowej wszystkich innych czynników poza czynnikiem polegającym na ciągłym zmniejszaniu się ilości transformującej się fazy na skutek zachodzenia przemiany. Należy zwrócić uwagę, że dziedziny określoności funkcji $z_{ext_f}(D)$ i $z_{ext_r}(D)$ są odmiennie, gdyż pierwsza jest określona tylko dla $0 \leq D$ zaś druga tylko dla $D \leq 0$. Żmudne prace analityczne doprowadziły autora niniejszej rozprawy do interesującej obserwacji. Obserwacja ta prowadzi do wniosku, że można uznać z dobrym przybliżeniem, iż przebieg prędkości właściwej dla pełnej przemiany wprost dla określonej ścieżki obciążenia jest taki sam jak przebieg prędkości właściwej odpowiadającej jej cząstkowej przemiany odwrotnej. Pod warunkiem, że ten ostatni zostanie przeskalowany poprzez wartość początkową udziału fazy martenzytycznej w chwili rozpoczęcia przemiany odwrotnej. Prawidłowość ta została zilustrowana na wykresach po lewej stronie na rysunku 6.6 dla ścieżek z prób przeprowadzonych w temperaturze 322.5 K. Taka sama prawidłowość występuje również dla ścieżek w temperaturach 310 K i 315 K. Prawidłowość tę można wyrazić następującym wzorem matematycznym

$$z_{ext_f}(D) = \frac{(dz_f/dD)}{1-z_f} \Big|_{D=D} = z_r^* \cdot \frac{(dz_r/dD)}{z_r} \Big|_{D=-D} = -z_r^* \cdot z_{ext_r}(-D), \quad (6.7)$$

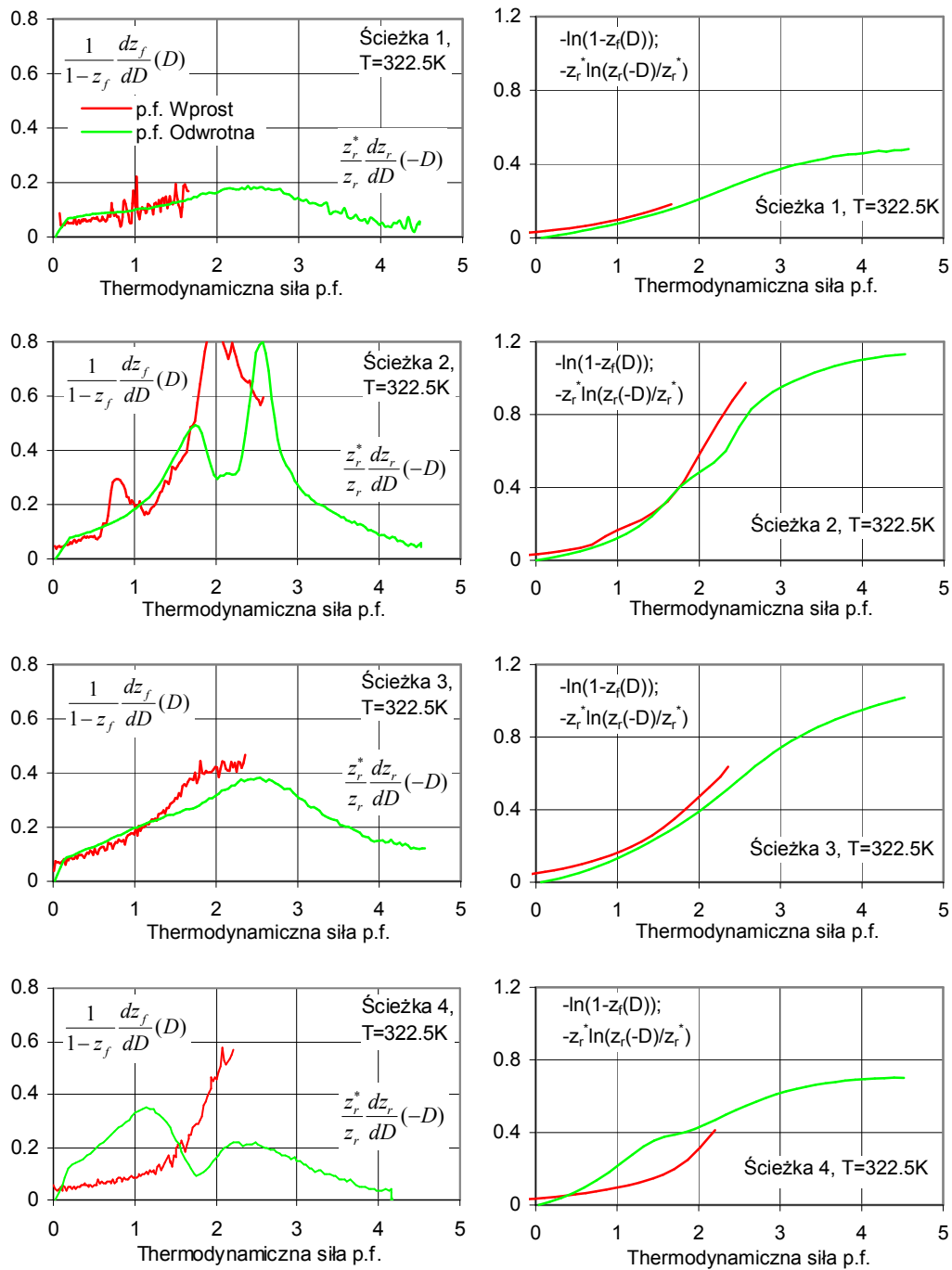
gdzie symbol z_r^* oznacza wartość udziału fazy martenzytycznej w chwili rozpoczęcia monotonicznej cząstkowej w sensie zdefiniowanym poniżej wzoru (6.5) przemiany odwrotnej – patrz także rysunek 6.2 punkt 3 (3'). Jest to jednocześnie w rozważanym przypadku maksymalne zaawansowanie poprzedzającej pełnej przemiany wprost.

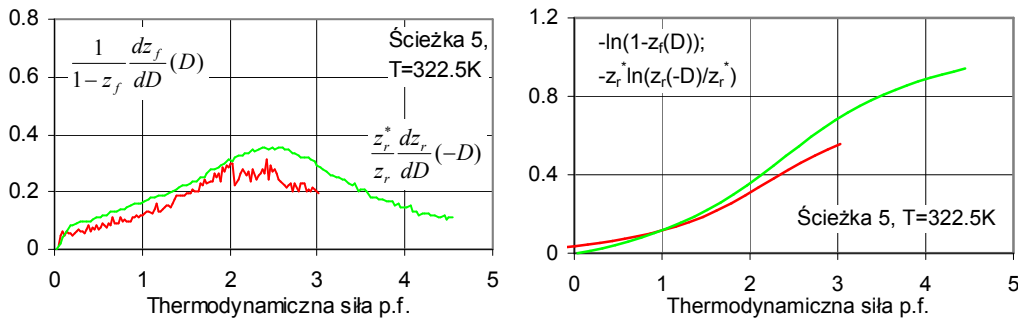
Powyżej opisana obserwacja poprzez jej uogólnienie dostarcza podstaw dla sformułowania nowego modelu kinetyki cząstkowych przemian fazowych, czy też nowego modelu formowania się wewnętrznych pętli histerezy, w oparciu o model kinetyki dla pełnych przemian fazowych. Nowy model kinetyki postulowany jest w postaci przyrostowej w następującej postaci

$$[(1-z_f^*)/(1-z)] \cdot (dz/dD) = df_f(D)/dD \quad 0 \leq D, \quad 0 \leq z_f^* \leq z - \text{p.f. wprost}, \quad (6.8)$$

$$-(z_r^*/z) \cdot (dz/dD) = df_r(D)/dD \quad D \leq 0 \quad z \leq z_r^* \leq 1 - \text{p.f. odwrotna},$$

przy czym powyższe zależności obowiązują tylko wtedy, gdy spełnione są warunki





Rys. 6.6 Porównanie wykresów prędkości właściwej przemian fazowych wprost i przeskalowanych przez wartość z^* wykresów prędkości właściwej przemian odwrotnych dla pięciu ścieżek obciążenia w temperaturze $T=322.5\text{ K}$ – lewa strona, oraz odpowiadające im wykresy całkowite – prawa strona.

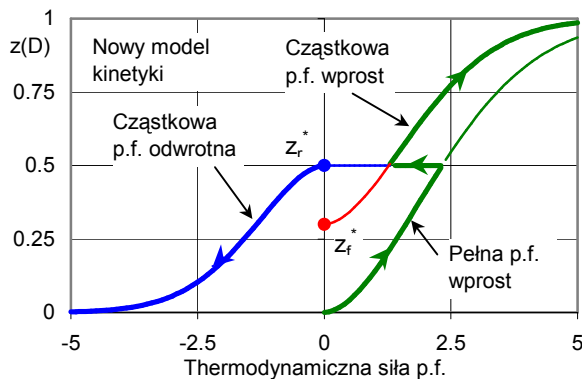
zachodzenia aktywnej przemiany fazowej. Parametry z_f^* i z_r^* należy wyznaczyć dla znanych aktualnych wartości z i D z następujących wzorów

$$-(1-z_f^*) \cdot \ln((1-z)/(1-z_f^*)) = f_f(D) \quad 0 \leq D \text{ p.f. wprost}, \quad (6.9)$$

$$-z_r^* \cdot \ln(z/z_r^*) = f_r(D), \quad D \leq 0 \text{ p.f. odwrotna}.$$

Dla konkretnej pary (z, D) istnieje tylko jedna wartość z_f^* , gdy $0 \leq D$ i tylko jedna wartość z_r^* , gdy $D \leq 0$, co zapewnia jednoznaczność równań modelu kinetyki (6.8), (6.9). Zależności określone wzorami (6.9) stanowią element modelu kinetyki przemiany fazowej, z których należy wyznaczyć z_f^* , z_r^* . Jednakże mają one jeszcze inną własność. Krzywe określone tymi wzorami stanowią we współrzędnych

$z \leftrightarrow D$ całki równań różniczkowych zwyczajnych (6.8) z warunkiem brzegowym $z_f^{start}(D=0) = z_f^*$ w przypadku przemiany wprost i z warunkiem brzegowym $z_r^{start}(D=0) = z_r^*$ w przypadku przemiany odwrotnej. Zatem wzory (6.9) określają krzywe całkowite kinetyki dla monotonicznych przemian fazowych wprost i odwrotnych. Sytuację tę zilustrowano na rysunku 6.7.



Rys. 6.7 Schematyczna ilustracja krzywych kinetyki dla monotonicznych przemian fazowych przewidywanych modelem kinetyki (6.8), (6.9).

Funkcja $f_f(D)$ występująca we wzorze (6.9)₁ określa krzywą kinetyki pełnej przemiany fazowej wprost, co łatwo można stwierdzić podstawiając $z_f^* = 0$. W analogiczny sposób podstawiając $z_r^* = 1$ do wzoru (6.9)₂ można stwierdzić, że funkcja $f_r(D)$ określa kinetykę pełnej przemiany fazowej odwrotnej. Porównując wzory (6.6) i (6.8) można stwierdzić, że dla pełnych przemian fazowych wprost i odwrotnej ($z_f^* = 0, z_r^* = 0$) pochodne funkcji $f_f(D)$, $f_r(D)$ względem siły termodynamicznej D są równe prędkościom właściwym przemiany fazowej wprost i odwrotnej, odpowiednio $z_{ext_f}(D) = df_f(D)/dD$, $z_{ext_r}(D) = df_r(D)/dD$. Jawna postać funkcji f_f i f_r musi być określona doświadczalnie i stanowi element modelu kinetyki.

Stwierdzoną doświadczalnie prawidłowość (6.7), dla pełnych przemian wprost ($z_f^* = 0$) i cząstkowych przemian odwrotnych, można odtworzyć zakładając obowiązywanie modelu kinetyki określonego wzorami (6.8), (6.9) tylko wtedy, gdy występujące tam funkcje $f_r(D)$ i $f_f(D)$ będą spełniały następującą relację

$$df_f/dD(D)|_{D=D} = -df_r/dD(D)|_{D=-D}. \quad (6.10)$$

Łatwo to wykazać wykorzystując relację (6.10) w relacji (6.8) do wyeliminowania pochodnych $f'_f(D)$ i $f'_r(D)$, by otrzymać (6.7). Obustronne całkowanie (6.10) z warunkami brzegowymi $f_r(D=0) = f_f(D=0) = 0$ prowadzi do zależności

$$f_r(D)|_{D=D} = f_f(D)|_{D=-D}. \quad (6.11)$$

Zatem funkcje $f_r(D)$ i $f_f(D)$ muszą stanowić swoje lustrzane odbicie względem osi rzędnych. Wykorzystując równość (6.11) we wzorach (6.9), traktowanych jako całkowite krzywe kinetyki dla pełnej przemiany wprost i cząstkowej przemiany odwrotnej, otrzymuje się zależność

$$-\ln(1-z) = f_f(D) = f_r(-D) = -z_r^* \cdot \ln(z/z_r^*). \quad (6.12)$$

W celu ilustracji i weryfikacji przedstawionych powyżej spostrzeżeń i rozważań sporządzono na podstawie danych doświadczalnych uzyskanych dla prób przeprowadzonych w temperaturze 322.5 K i wykreślono wspólnie na wykresach po prawej stronie rysunku 6.6 zależności $-\ln(1-z) \leftrightarrow D$ dla przemian wprost i $-z_r^* \cdot \ln(z/z_r^*) \leftrightarrow (-D)$ dla przemian odwrotnych. Widać przewidywaną wzorem (6.12) bardzo dobrą zgodność tych wykresów. Oprócz wykresów dla ścieżki 4.

Zbadanie przyczyn natury fizycznej powodujących występowanie w skali makroskopowej swoistej symetrii przemiany fazowej wprost i odwrotnej scharakteryzowanej równością (6.11), stanowi zdaniem autora interesujący otwarty problem naukowy wymagający badań materiałoznawczych. Jedną z takich przyczyn może być, obserwowane bardzo często dla termosprężystej przemiany

martenzytycznej w skali mikroskopowej, zjawisko tzw. krystalograficznej odwracalności przemiany. Polega ono na tym, że sekwencja zanikania płytek martenzytycznych przy zdejmowaniu obciążenia stanowi odwrotność sekwencji ich powstawania – jak na filmie puszczonego wstecz. Jak wskazują wykresy na rysunku (6.6), wzór (6.11) nie ma charakteru bezwzględnie obowiązującej zależności, a raczej stanowi przejaw pewnej tendencji wynikającej z uśrednienia do makroskopowej skali obserwacji pewnych procesów mikroskopowych o statystycznym charakterze.

W przypadku modelu kinetyki R-L dla pełnej przemiany fazowej wprost i odwrotnej funkcje $f_r(D)$ i $f_f(D)$ postulowane są w postaci $f_f(D) = D^{m_1} / r_1$ i $f_r(D) = (-D)^{m_2} / r_2$ ($p_1 = p_2 = 0$) – por. (6.5). Zatem własność (6.11) będzie miała miejsce wtedy, gdy odpowiadające sobie parametry kinetyki m_α, r_α określające krzywe kinetyki przemiany wprost i odwrotnej będą miały te same wartości. Gdyż jeśli $m_1 = m_2$ i $r_1 = r_2$ to

$$f'_f(D) = \frac{m_1}{r_1} D^{m_1-1} = \frac{m_2}{r_2} D^{m_2-1} = -f'_r(-D), \tag{6.13}$$

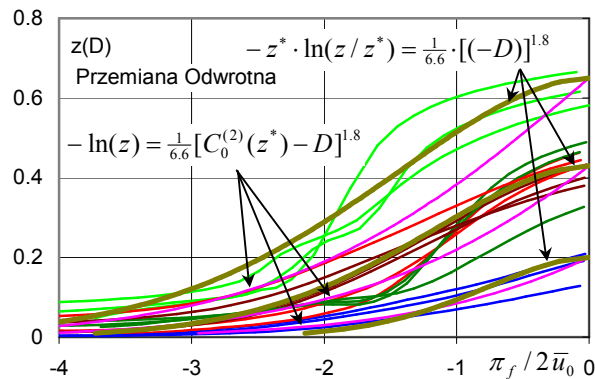
$$f_f(D) = D^{m_1} / r_1, \quad f_r(D) = (-D)^{m_2} / r_2,$$

$$f'_f(D) = \frac{m_1}{r_1} D^{m_1-1}, \quad f'_r(D) = -\frac{m_2}{r_2} (-D)^{m_2-1}.$$

Przeprowadzone powyżej rozważania dla polikrystalicznego stopu NiTi, sugerują przyjmowanie tych samych wartości parametrów kinetyki dla równań kinetyki opisujących przemianę wprost i odwrotną. Tak też uczyniono, przyjmując dla badanego stopu NiTi $m_1 = m_2 = 1.8$, $r_1 = r_2 = 6.6$, $p_1 = p_2 = 0$, patrz tabela 5.5.

Na rysunku 6.8 wykreślono przebieg krzywych modelowych dla monotonicznych cząstkowych przemian odwrotnych w przypadku specyficznego modelu kinetyki R-L (6.5), i w przypadku nowego specyficznego modelu kinetyki (6.9), dla trzech wartości udziału fazy martenzytycznej w chwili rozpoczęcia monotonicznej przemiany odwrotnej $z = 0.65, z = 0.43, z = 0.2$.

Przy czym w obu przypadkach użyto tych samych funkcji „tworzących”



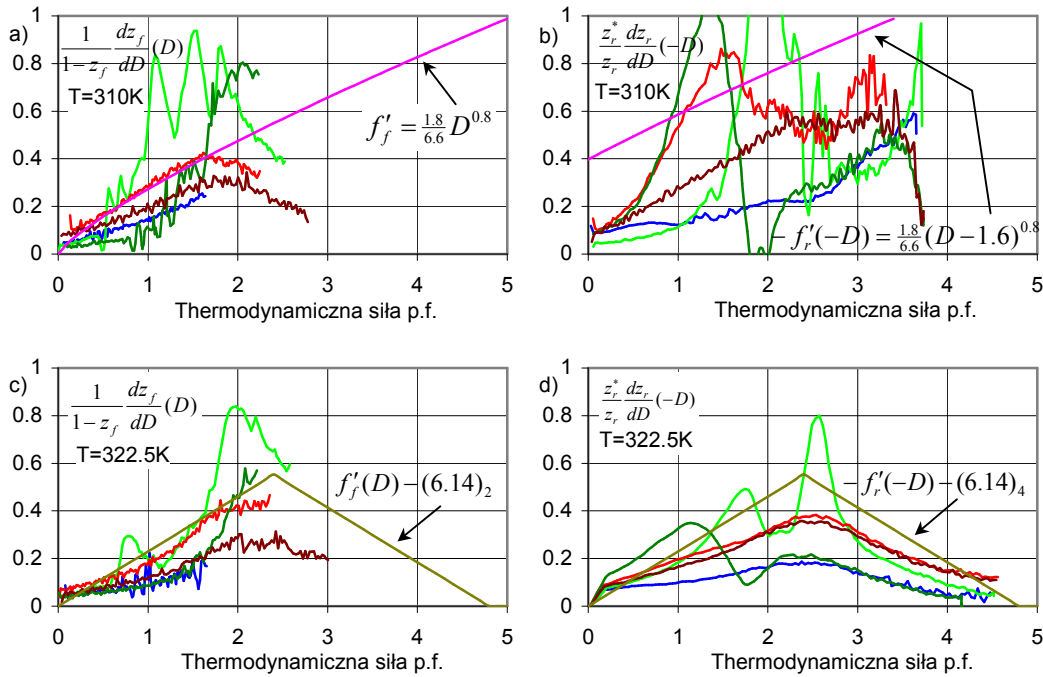
Rys. 6.8 Porównanie przewidywań modelu kinetyki R-L i modelu (6.8) pomiędzy sobą i z krzywymi doświadczalnymi.

$f_r = f_f = D^{1.8} / 6.6$ – por. (6.13)_{2,3}. Rysunek 6.6 zawiera również uzyskane z danych doświadczalnych krzywe kinetyki. Porównanie krzywych uzyskanych za pomocą nowego formalnego modelu kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej z krzywymi doświadczalnymi, pozwala stwierdzić że za pomocą nowego modelu w istotny sposób można poprawić zgodność przewidywań modelowych z doświadczeniem.

6.4.2 Nowy formalny model kinetyki pełnych przemian fazowych

Proponowana dotychczas w literaturze jawna matematyczna postać funkcji f_f , f_r , określających prędkość właściwą termosprężystej przemiany fazowej, przewiduje albo stałą wartość tej prędkości, co ma miejsce w przypadku modelu Tanaki i innych, albo monotoniczny wzrost jej wartości ze wzrostem termodynamicznej siły napędowej przemiany, jak to ma miejsce w przypadku modelu kinetyki R-L – por. (6.13). Tego typu założenia modelowe powodują, że jedynym czynnikiem jaki może spowodować zatrzymanie się przemiany fazowej, przy narastaniu termodynamicznej siły napędowej przemiany fazowej, jest wyczerpanie się transformującej się fazy. Jednakże, jak widać na rysunku 6.9a, na którym wykreślono przebieg prędkości właściwych dla pełnych przemian wprost dla prób przeprowadzonych w temperaturze 310K, prędkości właściwe rosną ze wzrostem termodynamicznej siły przemiany fazowej D tylko do jej pewnej wartości. Po czym osiągają maksimum dla wartości $D \approx 1.8 \div 2.0$, a następnie zaczynają maleć pomimo dalszego wzrostu siły termodynamicznej D . Dla porównania na rysunku 6.9a wykreślono również kolorem różowym krzywą prędkości właściwej przewidywaną przez model R-L przy wartościach parametrów kinetyki zidentyfikowanych dla badanego stopu NiTi, tj. $f_f' = \frac{1.8}{6.6} D^{0.8}$. Opisane powyżej dane doświadczalne wskazują, że w przypadku indukowanej naprężeniem termosprężystej przemiany martenzytycznej w stopie NiTi niemożliwe jest doprowadzenie przemiany fazowej do kompletności ($z = 0.99$) nawet przy bardzo dużych naprężeniach obciążających, pomimo że faza austenityczna nie została wyczerpana. Analiza wartości liczbowych prędkości właściwych pokazanych na rysunku 6.6 oraz odpowiadających im wartości zaawansowania przemiany wykreślonych na rysunku 6.5a wskazuje, że bez względu na maksymalną wartość naprężenia indukującego przemianę martenzytyczną zaawansowanie przemiany wprost dla dowolnej ścieżki obciążenia nie przekroczy $z = 0.75$.

Podobną obserwację o niekompletnym zachodzeniu termosprężystej przemiany martenzytycznej w stopie NiTi poczyniła Brinson i inni w pracy [11]. Oszacowała ona metodą optyczną, a zatem odmienną niż stosowana tutaj metoda oparta wyłącznie na efektach odkształceniowych, że maksymalne zaawansowanie przemiany martenzytycznej w badanym przez nią stopie NiTi, już po zakończeniu plateau plateau pseudosprężystego wynosiło około 0.7. Stwierdziła również, że



Rys. 6.9 Doświadczalne przebiegi prędkości właściwych dla pełnych przemian wprost i cząstkowych przemian odwrotnych w temperaturach 310K i 322.5K. Na wykresach 6.9a), 6.9b) wykresiono także dla porównania przebiegi prędkości właściwej przewidywanej przez model kinetyki R-L, por. (6.13)₁, dla przemiany pełnej wprost i cząstkowej przemiany odwrotnej przy $z^* = 0.4$. Na wykresach 6.9c), 6.9d) wykresiono dla porównania przebiegi prędkości właściwej przewidywanej przez model kinetyki proponowany w niniejszej pracy, por. (6.14).

dalsze obciążanie siłowe próbki nie prowadzi do zwiększania ilości fazy martenzytycznej. Zatem dwie niezależne metody wskazują na niekompletność zachodzenia termosprężystej przemiany martenzytycznej indukowanej naprężeniem w stopie NiTi. Na rysunku 6.9b wykresiono przebieg przeskalowanych prędkości właściwych dla cząstkowych przemian odwrotnych dla prób przeprowadzonych w temperaturze 310K. Zgodnie z hipotezą wysuniętą w poprzedniej sekcji wzór (6.11) przebiegi te określone są przez tę samą funkcją tworzącą co przebiegi dla pełnej przemiany wprost. Zatem przebiegi te, powinny mieć nie tylko jakościowo, ale również ilościowo taki sam charakter jak te znajdujące się na rysunku 6.9a. Jakkolwiek w przypadku cząstkowych przemian odwrotnych występuje, zgodnie z oczekiwaniami, maksimum prędkości właściwych dla wartości $D \approx 1.8 \div 2.0$, podobnie jak dla pełnych przemian wprost. To jednak dodatkowo pojawia się jeszcze jedno, nieoczekiwane, maksimum prędkości dla wartości $D \approx 3.2$. Zdaniem autora, najbardziej prawdopodobną przyczyną pojawiania się tego drugiego

maksimum jest zachodzenie w stopie NiTi odwrotnej przemiany R-fazowej. Hipotezę tę, potwierdzałby klarowny obraz przebiegu monoklinicznej termosprężystej przemiany martenzytycznej jaki uzyskuje się dla prób przeprowadzonych w temperaturze 322.5 K. W tej temperaturze przemiana R-fazowa w ogóle nie może zachodzić. Zilustrowano tę sytuację na rysunkach 6.9c i 6.9d, na których wykreślono przebieg prędkości właściwych dla pełnych przemian wprost i przeskalowanych cząstkowych przemian odwrotnych dla prób przeprowadzonych w temperaturze 322.5 K.

W związku z powyższymi obserwacjami proponuje się przyjęcie następującej parametrycznej postaci funkcji tworzących $f_f(D)$ i $f_r(D)$ określających przebieg pełnej przemiany fazowej wprost i odwrotnej

$$f_f(D) = \begin{cases} \frac{1}{2} a_1 \cdot D^2 & 0 \leq D \leq b_1 \\ \frac{1}{2} a_1 \cdot [D^2 - 2(b_1 - D)^2] & b_1 < D \leq 2b_1, \\ 0 & 2b_1 < D \end{cases} \quad (6.14)$$

$$f'_f(D) = \begin{cases} a_1 \cdot D & 0 \leq D \leq b_1 \\ a_1 \cdot (2b_1 - D) & b_1 < D \leq 2b_1, \\ 0 & 2b_1 < D \end{cases}$$

$$f_r(D) = \begin{cases} \frac{1}{2} a_2 \cdot (-D)^2 & 0 \leq -D \leq b_2 \\ \frac{1}{2} a_2 \cdot [(-D)^2 - 2(b_2 + D)^2] & b_2 < -D \leq 2b_2, \\ 0 & 2b_2 < -D \end{cases}$$

$$f'_r(D) = \begin{cases} -a_2 \cdot (-D) & 0 \leq -D \leq b_2 \\ -a_2 \cdot (2b_2 - (-D)) & b_2 < -D \leq 2b_2. \\ 0 & 2b_2 < -D \end{cases}$$

Występujące w powyższych wzorach stałe kinetyki $a_\alpha, b_\alpha; \alpha = 1, 2$ trzeba zidentyfikować dla każdego stopu z pamięcią kształtu na podstawie danych doświadczalnych.

Funkcje f_f, f_r określone wzorami (6.14) prowadzą do „trójkątnego” przebiegu prędkości właściwych określonego funkcjami f'_f, f'_r . Parametry a_α określają szybkość narastania prędkości właściwej w początkowym stadium przemiany, zaś parametry b_α określają położenie maksimum prędkości właściwych.

Pomimo wskazówek doświadczalnych, że termosprężystą przemianę martenzytyczną wprost i odwrotną można z dobrym przybliżeniem modelować za pomocą tylko jednego zestawu parametrów kinetyki, ze względów pragmatycznych zdecydowano się zachować dwa zestawy parametrów kinetyki. Uczyniono tak, aby mieć możliwość modelowego domykania pętli histerezy nawet kosztem utraty

pewnej dokładności wyników modelowych. Jednakże, mając w ten sposób możliwość uniknięcia kłopotów numerycznych, wynikających z pojawienia się ewentualnych niesprężystych odkształceń rezydualnych. W razie potrzeby domknięcie pętli histerezy można modelowo uzyskać w ten sposób, że należy zwiększyć szybkość narastania prędkości właściwej przemiany odwrotnej – czyli wartość parametru a_2 jednocześnie zmniejszając miejsce położenia maksimum tej prędkości – czyli wartość parametru b_2 . Analizując wykresy na rysunku 6.9 dla temperatury 310 i 322.5K można spostrzec, że w wyższej temperaturze przemiana fazowa zachodzi zauważalnie wolniej. Zdecydowano się nie wprowadzać tej zależności od temperatury do modelu kinetyki, aby go jeszcze bardziej nie komplikować.

Profile prędkości właściwych generowane dla przemian wprost i odwrotnych przez funkcje tworzące f_f, f_r , zdefiniowane wzorami (6.14) wykreślono na rysunkach 6.9c, 6.9d na tle profili doświadczalnych dla temperatury 322.5 K. Przy czym, jako zidentyfikowane dla badanego stopu NiTi parametry kinetyki nowego prawa przyjęto wartości $a_1 = a_2 = 0.23$, $b_1 = b_2 = 2.4$. Nieco za wysoka wartość maksimum proponowanych profili modelowych w porównaniu z danymi doświadczalnymi dla temperatury 322.5K wynika stąd, że parametry kinetyki nowego modelu zostały tak dobrane, aby uzyskać możliwie najlepszą zgodność profili modelowych z profilami doświadczalnymi dla wszystkich analizowanych temperatur, tj. 310, 315 i 322.5K.

Specyficzny model kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej (6.8) wygodnie jest wyrazić w postaci funkcji stanu $\lambda_{(\alpha)}^\sigma(\boldsymbol{\sigma}, T, z)$, występujących w ogólnym równaniu kinetyki (3.21), tak aby można było nimi zastąpić funkcje stanu określone wzorami (3.25). Mnożąc obustronnie równania (6.8) przez \dot{D} oraz korzystając z wyrażenia na \dot{D} otrzymanego ze wzoru (3.35)₂, po nieskomplikowanych przekształceniach otrzymuje się

$$\lambda_{(1)}^\sigma = \frac{(1-z) \cdot f'_f(D)}{2 \cdot \bar{u}_0 \cdot z_f^* - (1-z) \cdot f'_f(D) \cdot 2\phi_{ii}(T)}, \quad (6.15)$$

$$\lambda_{(2)}^\sigma = \frac{z \cdot f'_r(D)}{2 \cdot \bar{u}_0 \cdot z_r^* - z \cdot [-f'_r(D)] \cdot 2\phi_{ii}(T)}.$$

Występujące w powyższych wzorach funkcje f'_f, f'_r i parametry z_f^*, z_r^* określone są wzorami (6.14) i (6.9). W podobny sposób można uzyskać wzory na funkcje $\lambda_{(\alpha)}^\varepsilon(\boldsymbol{\varepsilon}, T, z)$ – por. (3.26)_{2,3}, przydatne przy analizowaniu procesów sterowanych odkształceniem

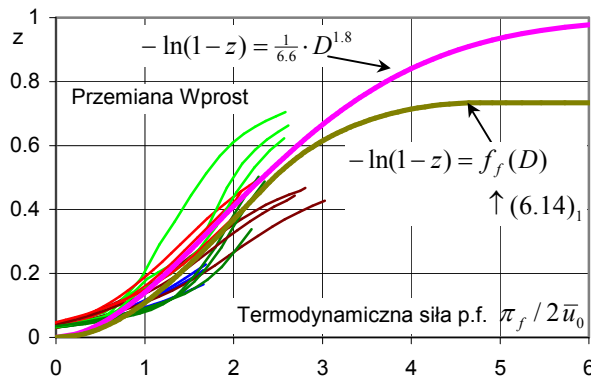
$$\lambda_{(1)}^\varepsilon = \frac{(1-z) \cdot f'_f(D)}{2 \cdot \bar{u}_0 \cdot z_f^* - (1-z) \cdot f'_f(D) \cdot [2\phi_{ii}(T) - \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\mathcal{L}} \mathbf{k} / \rho]}, \quad (6.16)$$

$$\lambda_{(2)}^{\varepsilon} = \frac{z \cdot f_r'(D)}{2 \cdot \bar{u}_0 \cdot z_r^* - z \cdot [-f_r'(D)] \cdot [2\phi_{it}(T) - \kappa \cdot \mathcal{L}\kappa / \rho]}$$

Funkcjonowanie nowego prawa kinetyki zilustrowano na rysunku 6.10, gdzie wykreślono wspólnie krzywą dla pełnej monotonicznej przemiany wprost przewidywaną przez model kinetyki R-L i przez nowy model kinetyki (6.15), (6.14), (6.9). Jak widać, w początkowym stadium przemiany fazowej przebieg modelowych krzywych kinetyki dla obu modeli różni się niewiele. Natomiast zasadnicza różnica w funkcjonowaniu obu modeli polega na tym, że model kinetyki R-L przewiduje możliwość doprowadzenia do kompletnej przemiany fazowej ($z=1$), na skutek przyłożenia dostatecznie dużego naprężenia w warunkach próby izotermicznej. Podczas, gdy nowy model nie przewiduje takiej możliwości dla wartości parametrów kinetyki zidentyfikowanych dla analizowanego stopu NiTi.

6.5 Podsumowanie

Analiza danych doświadczalnych uzyskanych dla stopu NiTi pozwoliła stwierdzić, iż w trakcie termosprężystej przemiany martenzytycznej prędkość właściwa przemiany początkowo rośnie ze wzrostem termodynamicznej siły napędowej przemiany, osiąga maksimum, a następnie maleje pomimo ciągłego wzrostu wartości termodynamicznej siły napędowej przemiany. Innym cennym spostrzeżeniem jest obserwacja wyrażona związkiem (6.7), pomiędzy prędkością właściwą przemiany wprost i prędkością właściwą odpowiadającej jej przemiany odwrotnej. Wykorzystanie powyższych spostrzeżeń i konsekwentna analiza teoretyczna, pozwoliły na sformułowanie i zaproponowanie nowego specyficznego modelu kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej. Model ten wyrażony wzorami (6.15), (6.14) i (6.9) pozwala na przewidywanie zarówno pełnych, jak i cząstkowych przemian fazowych, tj. tych odpowiedzialnych za formowanie się wewnętrznych pętli histerezy. Nowy model kinetyki lepiej niż model kinetyki R-L



Rys. 6.10 Porównanie kinetyki przemiany martenzytycznej przewidywanej przez model kinetyki R-L, nowy specyficzny model (6.14)₁ z krzywymi doświadczalnymi.

opisuje profile prędkości właściwej. Przewiduje również możliwość niekompletnego zachodzenia przemiany fazowej pomimo zakończenia plateau płynięcia pseudosprężystego. Niezależnie od przesłanek wskazujących na występowanie takiego zjawiska podanych w niniejszym rozdziale, o jego występowaniu donosi Brinson i inni w pracy [11] opierając się mikroskopowych obserwacjach doświadczalnych.

Nowy model kinetyki termosprężystej przemiany fazowej opiera się na szeregu hipotez. Na przykład równania dla przemian cząstkowych wprost zaproponowano tylko w oparciu o obserwację, że funkcja $f_r(D)$ stanowi lustrzane odbicie funkcji $f_r(D)$. Z tego powodu niezbędne jest wykonanie dalszych doświadczeń i obserwacji metalurgicznych potwierdzających poczynione założenia teoretyczne, jak również uzyskanie wprost z doświadczenia krzywych dla cząstkowych przemian fazowych wprost. Dalszych badań fizycznych wymaga także zbadanie przyczyn występowania maksimum prędkości właściwej, a zatem przyczyn nie zachodzenia kompletnej termosprężystej przemiany martenzytycznej indukowanej naprężeniem.

7. Fenomenologiczny termodynamiczny model zachowania stopów z pamięcią kształtu w oparciu o multiplikatywny rozkład tensora gradientu deformacji

7.1 Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale przedstawiono uogólnienie makroskopowego fenomenologicznego modelu pseudosprężystości Ranieckiego i Lexcellenta przypominanego w sekcji 3.3 na zakres skończonych deformacji. W tym celu wykorzystano koncepcję multiplikatywnego rozkładu gradientu całkowitej deformacji oraz opis deformacji sprężystych względem rodziny wirtualnych ruchomych odciążonych sprężystości konfiguracji odniesienia – formalizm Mandela [40]. Logarytmiczne (Hencke'go) odkształcenie sprężyste, temperatura i udział masowy fazy martenzytycznej $\{\underline{\mathbf{E}}^e(0), T, z\}$ zostały użyte jako zmienne stanu występujące w funkcji energii swobodnej opisującej stany dwufazowe makroelementu SMA. Zestawowi zmiennych stanu $\{\underline{\mathbf{E}}^e(0), T, z\}$, w opisie ruchomych konfiguracji naturalnych, odpowiada w opisie Eulerowskim na konfiguracji aktualnej zestaw zmiennych stanu $\{\underline{\mathbf{e}}^e(0), T, z\}$. W celu określenia efektów odkształceniowych związanych z przemianą fazową, bądź reorientacją fazy martenzytycznej, zaproponowano formalne równanie płynięcia dla tensora prędkości deformacji niesprężystej $\underline{\mathbf{d}}^{in}$. Formalne równanie kinetyki przemiany fazowej i kryteria określające warunki zachodzenia aktywnej przemiany fazowej wprost, odwrotnej odpowiednio zostały podane w postaci właściwej dla kinematyki skończonych deformacji, tj. niezmienniczej względem sztywnych obrotów. Równania konstytutywne w postaci prędkościowej, sformułowane w opisie ruchomych odciążonych sprężystości konfiguracji odniesienia, zostały przetransformowane do konfiguracji aktualnej, a następnie została podana ich postać odpowiednia dla zastosowania techniki numerycznej uaktualnianego opisu Lagrange'a. Postać ta wymaga powiązanego opisu ruchu i deformacji ciała poprzez podanie tzw. równania łączącego. Jego szczególnie prostą postać uzyskano, poprzez dobór orientacji rodziny odciążonych sprężystości konfiguracji odniesienia, w taki sposób, że w każdej chwili Eulerowski spin niesprężysty $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{in}$ jest tożsamościowo równy zeru. Praca zawarta w niniejszym rozdziale jest oryginalną pracą autora dotychczas niepublikowaną.

Jak się wydaje pierwszy makroskopowy model konstytutywny materiałów z pamięcią kształtu opracowany w formalizmie skończonych deformacji został zaproponowany przez Auricchio i Taylora w roku 1997 [1]. Niestety, teoretyczna baza modelu została zapożyczona bezpośrednio z uogólnionej teorii plastyczności, z możliwie najmniejszą ilością zmian jaka była tylko możliwa. To spowodowało, że model ten nie jest dobrze dostosowany do opisu materiałów z pamięcią kształtu gdyż fizyczne mechanizmy odpowiedzialne za odkształcenia plastyczne (poślizg

plastyczny) i efektów pamięci kształtu (zjawisko martenzytycznej przemiany fazowej i reorientacji na skutek dużej ruchliwości granic bliźniaczych) są różne. Model ten nie jest oparty na dobrze dostosowanym do opisu przemian fazowych formalizmie termodynamiki nierównowagowej.

Ostatnio najciekawszą zdaniem autora propozycją opisu zachowania materiałów z pamięcią kształtu, opracowaną w formalizmie skończonych deformacji, jest obszerna praca Ananda i Gurtina [2]. Podobne podejście, jednak w znacznie ograniczonym zakresie, proponują Jung, Papadopoulos, Ritchie [32]. Te ostatnie prace pozostają w nurcie konstytutywnych modeli mikromechanicznych zapoczątkowanych serią prac grupy Patoora [55]. Wszystkie znane autorowi mikromechaniczne modele materiałów z pamięcią kształtu oparte są na dobrze znanej metodologii teorii plastyczności kryształów. W teoriach tych klasyczne prawo plastycznego płynięcia $\mathbf{d}^p = \sum \dot{\gamma}^\alpha \mathbf{s}^\alpha \otimes \mathbf{m}^\alpha; \alpha = 1, \dots, N$ zastępowane jest prawem płynięcia przemiany fazowej/reorientacji fazy martenzytycznej $\mathbf{d}^m = \sum \dot{z}^\alpha \mathbf{t}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\alpha; \alpha = 1, \dots, M$ uzupełnionym o kryteria aktywnej przemiany fazowej/reorientacji wariantów martenzytu. Diady $\mathbf{s}^\alpha \otimes \mathbf{m}^\alpha$ oznaczają dobrze znane systemy poślizgu, N jest liczbą dostępnych systemów poślizgu. Diady $\mathbf{t}^\alpha \otimes \mathbf{h}^\alpha$ oznaczają systemy „transformacji fazowej”, czy też mikroskopowe odkształcenia własne wariantów martenzytu (czasem w miejsce odkształceń własnych pojedynczego wariantu martenzytu, wykorzystywane są odkształcenia własne charakterystycznych grup wariantów martenzytu).

Podczas, gdy modele mikromechaniczne materiałów z pamięcią kształtu mogą dostarczyć dużo ważnych informacji na przykład o ewolucji mikrostruktury, własnościach materiałowych mieszaniny faz, etc. to wydaje się, iż w chwili obecnej wymagają one nawet większej ilości założeń konstytutywnych, w niektórych przypadkach bardzo trudnych do zweryfikowania doświadczalnego, niż modele makroskopowe. Ich rozwój jest pożądany z punktu widzenia podstawowych badań fizycznych, co z kolei może pomóc przy stawianiu uzasadnionych hipotez przy budowie makroskopowych modeli konstytutywnych. Jednakże, modele mikroskopowe nie są zdaniem autora odpowiednie dla potrzeb projektowania konstrukcji i urządzeń inżynierskich zawierających stopy z pamięcią kształtu, gdyż są one niezwykle wymagające jeśli chodzi o moc obliczeniową.

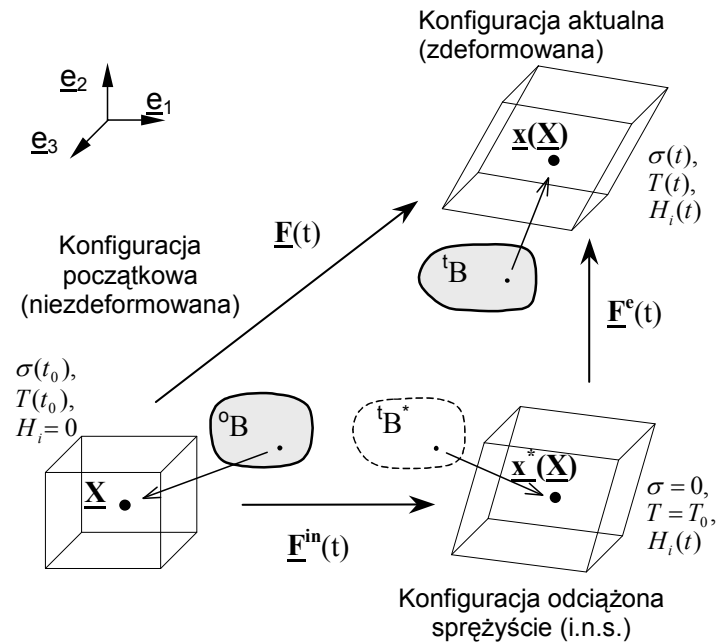
Wydaje się, iż opisany w niniejszym rozdziale model jest pierwszym trójwymiarowym makroskopowym, fenomenologicznym modelem materiałów z pamięcią kształtu, pozwalającym w tak wszechstronny sposób opisywać ilościowo ich zachowanie pseudosprężyste z uwzględnieniem nieliniowych efektów geometrycznych wynikających ze skończonych deformacji. Ponieważ model rozwijany jest w oparciu o formalizm termodynamiki procesów nierównowagowych w naturalny sposób pozwala on przewidywać zarówno efekty mechaniczne, cieplne jak również postęp termosprężystej martenzytycznej przemiany fazowej wprost i

odwrotnej, która to przemiana jest zjawiskiem fizycznym odpowiedzialnym za efekty pseudosprężyste w stopach z pamięcią kształtu.

Opracowany w niniejszej sekcji model, po jego implementacji w kodzie metody elementów skończonych, doskonale nadaje się do prowadzenia obliczeń projektowych konstrukcji inżynierskich zawierających elementy wykonane ze stopów z pamięcią kształtu. Przy analizowaniu sytuacji, gdy występują duże obroty elementów konstrukcyjnych w trakcie nominalnych warunków pracy, jak również przy rozważaniu sytuacji awaryjnych gdy mogą wystąpić duże odkształcenia.

7.2 Zależności kinematyczne przy skończonych deformacjach

Niech ciało polikrystaliczne \mathcal{B} wykonane ze stopu z pamięcią kształtu zajmuje w pewnej chwili $t = t_0$ konfigurację 0B , patrz rysunek 7.1. Ciało \mathcal{B} podlega ruchowi $\underline{x}(\underline{X}, t)$, odkształceniu na skutek przykładania obciążeń termomechanicznych, i w chwili $t = t$ zajmuje konfigurację aktualną, zdeformowaną tB . W celu zbudowania makroskopowego modelu konstytutywnego stopów z pamięcią kształtu założono, że w otoczeniu arbitralnego punktu materialnego zajmującego w chwili początkowej położenie \underline{X} w konfiguracji 0B można określić makroelement, tzw. reprezentatywny element objętości (RVE). Makroelement ten (RVE) musi być



Rys. 7.1 Kinematyka skończonych deformacji.

dostatecznie duży, aby odzwierciedlał charakterystyczne cechy mikrostrukturalne opisywanego materiału, a jednocześnie dostatecznie mały w porównaniu z charakterystycznym wymiarem konstrukcji inżynierskich, dla modelowania których rozwijany obecnie model ma znaleźć zastosowanie, aby pola w jego objętości można było traktować jako jednorodne. Makroelement zajmujący początkowo w konfiguracji nie zdeformowanej położenie $\underline{\mathbf{X}}$ jest zilustrowany symbolicznie na rysunku 7.1 poprzez sześcián. Makroelement ten ulega deformacji na skutek przykładanych obciążeń zewnętrznych i w chwili t zajmuje położenie $\underline{\mathbf{x}}(\underline{\mathbf{X}}, t)$. W dalszym ciągu gradient deformacji $\underline{\mathbf{F}} = \partial \underline{\mathbf{x}} / \partial \underline{\mathbf{X}}$ traktowany jest jako jednorodny w każdej chwili procesu deformacji w całej objętości RVE. Wiadomo, że stopy z pamięcią kształtu przy ich obciążaniu termomechanicznym mogą ulegać martenzytycznej przemianie fazowej wprost lub odwrotnej, co prowadzi do dwufazowej mikrostruktury makroelementu SMA. Z przemianą tą jak również z ewolucją mikrostruktury makroelementu, np. reorientacją fazy martenzytycznej, związane są niesprężyste efekty odkształceniowe. W rozwijanym w niniejszym rozdziale makroskopowym modelu SMA „fazowe” efekty odkształceniowe opisywane są za pomocą dwóch parametrów makroskopowych z i $\underline{\mathbf{k}}$ traktowanych odpowiednio jako skalarny parametr wewnętrzny, i funkcja tensorowa pewnej liczby skalarnych parametrów wewnętrznych H_i charakteryzujących mikrostrukturę makroelementu. Parametr z oznacza udział objętościowy fazy martenzytycznej charakteryzujący zawansowanie przemiany fazowej, zaś tensorowy parametr $\underline{\mathbf{k}}$ to tzw. makroskopowy tensor odkształceń fazowych. Podobnie jak w przypadku modelu R_L , patrz rozdział 3, przyjęto że makroelement SMA zawsze pozostaje w termodynamicznej równowadze mikrostrukturalnej, czyli że jego mikrostruktura „optymalnie adaptuje się do zmieniającego się obciążenia zewnętrznego”. W przypadku małych deformacji Raniecki i LExcellent wykazali formalnie, iż w stanach równowagi mikrostrukturalnej dla $H_i = H_i^{eq}$ następuje minimalizacja funkcji energii swobodnej względem parametrów wewnętrznych H_i . W konsekwencji wymóg optymalnej adaptacji mikrostruktury doprowadził tych autorów do wniosku, że tensor $\underline{\mathbf{k}}(H_i)$ w stanach równowagi mikrostrukturalnej ($H_i = H_i^{eq}$) musi być pewną funkcją zewnętrznych parametrów stanu $(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, T)$, tj. $\underline{\mathbf{k}}(H_i^{eq}) = \underline{\mathbf{k}}^{eq}(H_i^{eq}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, T)) = \underline{\mathbf{k}}^{eq}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, T)$ – patrz także wzór 3.6 w rozdziale 3. Tutaj akceptując podobną argumentację jak w teorii małych deformacji bez formalnego dowodu przyjęto, że tensor $\underline{\mathbf{k}}$ jest funkcją zewnętrznych parametrów stanu $(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, T)$ poprzez równowagowe wartości $H_i = H_i^{eq}$, a zatem że również w przypadku skończonych deformacji mikrostruktura makroelementu SMA optymalnie adaptuje się do zewnętrznego obciążenia. I analogicznie jak w przypadku teorii małych

deformacji postuluje się istnienie potencjału niesprężystego g^{Ra} , z pomocą którego można wygenerować κ .

Aby poprawnie opisać niesprężyste efekty odkształceniowe związane z przemianą fazową wygodnie jest wprowadzić znaną koncepcję wirtualnych odciążonych sprężystości, chwilowych „naturalnych” konfiguracji odniesienia. Chwilowa, naturalna konfiguracja odniesienia to taka konfiguracja, którą osiągnąłby makroelement SMA w danej chwili t , gdyby wektor naprężeń powierzchniowych \underline{t}_n zostały chwilowo sprowadzony do zera ($\underline{\sigma} = \underline{0}$) i temperatura T sprowadzona do temperatury $T = T_0$, gdzie T_0 oznacza pewną ustaloną temperaturę odniesienia. Przy czym wewnętrzna mikrostruktura makroelementu pozostawałaby niezmienniona „zamrożona”, tj. wartości zbioru wewnętrznych parametrów stanu charakteryzujących mikrostrukturę pozostawałyby w procesie odciążenia sprężystego stałe $z = const$ i $(H_i = const) \Leftrightarrow (\kappa = const)$. Na rysunku 7.1 konfigurację naturalną dla chwili t oznaczono symbolicznie przez ${}^tB^*$. Stan makroelementu (RVE) pozostającego w opisanej powyżej koncepcyjnej odciążonej sprężystości konfiguracji będzie nazywany chwilowym stanem naturalnym. Nie należy stanów naturalnych $(\underline{\sigma} = \underline{0}, T = T_0, z = const, H_i = const)$ mylić z termodynamicznym stanem odniesienia, dla którego jest $(\underline{\sigma} = \underline{0}, T = T_0, z = 0, H_i = 0)$. W przypadku teorii plastyczności stan naturalny mógł przynajmniej teoretycznie być osiągnięty w sposób fizyczny, poprzez termomechaniczne odciążenie makroskopowego ciała odkształconego sprężysto-plastycznie i podzielenie go na niewielkie części tak, aby nie występowały naprężenia rezydualne. W obecnym przypadku chwilowa konfiguracja naturalna jest zupełnie wirtualna i nie może być osiągnięta fizycznie w żaden sposób. Przyczyną tego jest fakt, że niemożliwe jest powstrzymanie zachodzenia odwrotnej martensytycznej przemiany fazowej, przy termomechanicznym odciążaniu makroelementu, do stanu naturalnego, tj. utrzymanie stałości parametrów $z, H_i = const$, w zakresie pseudosprężystego zachowania stopu SMA – $T > A_f^0$. Pomimo tego, koncepcja stanów naturalnych jest niezwykle użyteczna przy budowie makroskopowego modelu stopów z pamięcią kształtu. Pozwala ona w wygodny sposób rozprząc efekty odkształceń sprężystych od efektów odkształceń związanych z przemianą fazową. Przy tym podejściu teoretycznym, w miejsce rzeczywistego procesu deformacji makroelementu, kiedy jednocześnie mają miejsce deformacje sprężyste i niesprężyste. Rozważa się wirtualny proces czystej deformacji niesprężystej od konfiguracji początkowej do chwilowej konfiguracji naturalnej ${}^0B \rightarrow {}^tB^*$ – opisany gradientem deformacji \underline{F}^{in} , a następnie proces czystej deformacji sprężystej od konfiguracji naturalnej do konfiguracji aktualnej ${}^tB^* \rightarrow {}^tB$ – opisany gradientem deformacji \underline{F}^e . W efekcie otrzymuje się deformację od

konfiguracji początkowej do aktualnej ${}^0B \rightarrow {}^tB$ – opisaną gradientem deformacji $\underline{\mathbf{F}}$. Prowadzi to do znanej koncepcji multiplikatywnego rozkładu tensora gradientu deformacji

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}}^e \underline{\mathbf{F}}^{in}. \quad (7.1)$$

Zmienne w czasie konfiguracje ${}^tB^*$ stanowią wygodne konfiguracje odniesienia dla operacyjnego określania odkształcenia sprężystego, przy czym nawet przy już ustalonej konfiguracji ${}^tB^*$ wybór konkretnej miary odkształcenia sprężystego nadal pozostaje swobodny. Znajomość odkształcenia sprężystego pozwala na wyspecyfikowanie, w nie uwikłanej postaci, potencjału termodynamicznego energii swobodnej, w którym odkształcenie sprężyste musi występować jako zmienna stanu, a zatem wygodny opis sprężystej „gałęzi” zachowania materiału.

Chociaż istnieje ograniczenie co do swobody wyboru konfiguracji naturalnej ${}^tB^*$ definiującej tensor $\underline{\mathbf{F}}^e$, gdyż zgodnie z jej definicją musi to być konfiguracja bez naprężeniowa, to nadal pozostaje zupełna swoboda w wyborze orientacji konfiguracji ${}^tB^*$ względem ustalonego układu laboratoryjnego.

Swoboda wyboru orientacji konfiguracji naturalnych ${}^tB^*$ znajduje swoje odzwierciedlenie w niejednoznaczności multiplikatywnego rozkładu gradientu deformacji na część sprężystą i niesprężystą. Dla dowolnego tensora obrotu $\underline{\mathbf{Q}}$

($\underline{\mathbf{Q}}^T \underline{\mathbf{Q}} = \underline{\mathbf{I}}$), jest $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}}^e \underline{\mathbf{F}}^{in} = (\underline{\mathbf{F}}^e \underline{\mathbf{Q}})(\underline{\mathbf{Q}}^T \underline{\mathbf{F}}^{in}) = \underline{\mathbf{F}}_1^e \underline{\mathbf{F}}_1^{in}$, gdzie $\underline{\mathbf{F}}_1^e$, $\underline{\mathbf{F}}_1^{in}$ są nowymi gradientami deformacji zdefiniowanymi poprzez nową konfigurację naturalną ${}^tB_1^*$ obróconą o obrót zdefiniowany tensorem $\underline{\mathbf{Q}}$ w porównaniu do konfiguracji ${}^tB^*$. Naturalnie niejednoznaczność w definicji konfiguracji odciążonej występuje dopiero po tym, gdy pojawia się jakakolwiek deformacja niesprężysta $\underline{\mathbf{F}}^{in} \neq \mathbf{0}$. Przed tą chwilą $\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{F}}^e$ i konfiguracja naturalna jest określona w sposób jednoznaczny wynikający z warunków początkowych problemu mechaniki.

O wyborze konkretnej orientacji konfiguracji naturalnej decydują albo przesłanki natury fizycznej, jak to ma miejsce na przykład w przypadku krystalograficznej teorii plastyczności. Wtedy orientacja taka stanowi element modelu konstytutywnego. Albo jeśli takich przesłanek natury fizycznej do wyboru orientacji konfiguracji naturalnej brak, jak to ma miejsce w przypadku makroskopowej teorii izotropowej, wtedy konkretny jej wybór podyktowany jest pragnieniem uzyskania prostoty matematycznej opisu zachowania materiału. Zostanie tylko zasygnalizowane, że równanie więzów wyznaczające jednoznacznie rodzinę konfiguracji naturalnych dla rozwijanego tutaj modelu SMA stanowi ten ostatni przypadek i ma postać $\underline{\omega}^{in} \equiv \mathbf{0}$. Zagadnienie to będzie jeszcze dyskutowane w dalszej części niniejszego rozdziału, patrz sekcja 7.9.2 i Aneks 7.4.

Z multiplikatywnym rozkładem tensora gradientu deformacji (7.1) związane są następujące znane relacje kinematyczne

$$\underline{\mathbf{L}} = \partial \underline{\mathbf{v}} / \partial \underline{\mathbf{x}} = \dot{\underline{\mathbf{F}}} \underline{\mathbf{F}}^{-1} = \underline{\mathbf{L}}^e + \underline{\mathbf{L}}^{in}, \quad \underline{\mathbf{L}}^e = \dot{\underline{\mathbf{F}}}^e \underline{\mathbf{F}}^{e-1}, \quad \underline{\mathbf{L}}^{in} = \underline{\mathbf{F}}^e \underline{\mathbf{L}}^* \underline{\mathbf{F}}^{e-1}, \quad \underline{\mathbf{L}}^* = \dot{\underline{\mathbf{F}}}^{in} \underline{\mathbf{F}}^{in-1}, \quad (7.2)$$

$$\underline{\mathbf{d}} = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{L}} + \underline{\mathbf{L}}^T] = \underline{\mathbf{d}}^e + \underline{\mathbf{d}}^{in}, \quad \underline{\mathbf{d}}^e = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{L}}^e + \underline{\mathbf{L}}^{eT}], \quad \underline{\mathbf{d}}^{in} = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{L}}^{in} + \underline{\mathbf{L}}^{inT}], \quad \underline{\mathbf{D}}^* = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{L}}^* + \underline{\mathbf{L}}^{*T}], \quad (7.3)$$

$$\underline{\mathbf{\omega}} = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{L}} - \underline{\mathbf{L}}^T] = \underline{\mathbf{\omega}}^e + \underline{\mathbf{\omega}}^{in}, \quad \underline{\mathbf{\omega}}^e = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{L}}^e - \underline{\mathbf{L}}^{eT}], \quad \underline{\mathbf{\omega}}^{in} = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{L}}^{in} - \underline{\mathbf{L}}^{inT}], \quad \underline{\mathbf{\Omega}}^* = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{L}}^* - \underline{\mathbf{L}}^{*T}], \quad (7.4)$$

gdzie $\underline{\mathbf{L}}$ oznacza tensor gradientu prędkości, $\underline{\mathbf{d}}$ jest tensorem prędkości deformacji, a $\underline{\mathbf{\omega}}$ tensorem spinu materialnego (wirowości). Indeksy górne oznaczają odpowiednio obiekty „e” – sprężyste, „in” – sprężysto-niesprężyste, „*” – czysto niesprężyste tutaj związane wyłącznie z odkształceniami własnymi przemiany fazowej.

7.3 Termodynamiczne zmienne stanu makroelementu SMA

Podobnie jak w przypadku małych deformacji (por. sekcja 3.3) przyjmuje się, że dwufazowy makroelement stopu z pamięcią kształtu (RVE) jest systemem termodynamicznym pozostającym w dowolnym momencie procesu deformacji w stanie ograniczonej równowagi termodynamicznej. Ponieważ rozważane jest tutaj zachowanie punktu materialnego dlatego rozważa się tylko procesy jednorodne. Badania doświadczalne wskazują, że polikrystaliczne stopy z pamięcią kształtu z dobrym przybliżeniem mogą być traktowane jako izotropowo sprężyste, tj. ich własności sprężyste nie zależą od orientacji w przestrzeni. W konsekwencji przyjmuje się tutaj, że potencjał energii swobodnej ϕ dla tych materiałów jest skalarną funkcją izotropową¹ względem kanonicznych dla niej zmiennych stanu.

Jako zmienne charakteryzujące stan termodynamiczny makroelementu SMA przyjęto odkształcenie sprężyste $\underline{\mathbf{E}}^e = \underline{\mathbf{E}}^e(\underline{\mathbf{U}}^e)$ będące funkcją tensora rozciągnięć sprężystych $\underline{\mathbf{U}}^e$, temperaturę T oraz udział objętościowy fazy martenzytycznej z . Obowiązują następujące zależności wynikające z rozkładów polarnego i spektralnego tensora gradientu odkształceń sprężystych

$$\underline{\mathbf{F}}^e = \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\mathbf{U}}^e = \underline{\mathbf{V}}^e \underline{\mathbf{R}}^e, \quad \underline{\mathbf{U}}^e = \sum \lambda_i^e \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_i^e, \quad \underline{\mathbf{V}}^e = \sum \lambda_i^e \underline{\mathbf{n}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{n}}_i^e, \quad (7.5)$$

gdzie tensor $\underline{\mathbf{R}}^e$ jest tensorem ortogonalnym. Dodatkowo określone symetryczne tensory $\underline{\mathbf{U}}^e$, $\underline{\mathbf{V}}^e$ to prawy i lewy tensor sprężystego rozciągnięcia. Skalary λ_i^e to

¹ Izotropowa funkcja skalarna $\phi(\underline{\mathbf{T}})$ argumentu tensorowego $\underline{\mathbf{T}}$ z definicji spełnia relację $\phi(\underline{\mathbf{Q}}\underline{\mathbf{T}}\underline{\mathbf{Q}}^T) = \phi(\underline{\mathbf{T}})$ dla wszystkich właściwych tensorów ortogonalnych $\underline{\mathbf{Q}}$.

wspólne dla tensorów $\underline{\mathbf{U}}^e$ i $\underline{\mathbf{V}}^e$ wartości główne sprężystego rozciągnięcia, stanowiące rozwiązanie równania charakterystycznego $\det((\underline{\mathbf{F}}^e)^T \underline{\mathbf{F}}^e - \lambda^2 \underline{\mathbf{I}}) = 0$. Odpowiadające im wektory własne $\underline{\mathbf{N}}_i^e$ i $\underline{\mathbf{n}}_i^e$ to kierunki główne tensorów $\underline{\mathbf{U}}^e$ i $\underline{\mathbf{V}}^e$, nazywane także Lagrangeowskimi (materialnymi) i Eulerowskimi (przestrzennymi) kierunkami głównymi. Kierunki główne $\underline{\mathbf{N}}_i^e$ mogą być obrócone do kierunków głównych $\underline{\mathbf{n}}_i^e$ za pomocą tensora obrotu $\underline{\mathbf{R}}^e$

$$\underline{\mathbf{n}}_i^e = \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\mathbf{N}}_i^e, \quad \underline{\mathbf{R}}^e = \underline{\mathbf{n}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_i^e, \quad (\underline{\mathbf{R}}^e)^T \underline{\mathbf{R}}^e = \underline{\mathbf{I}}, \quad \det(\underline{\mathbf{R}}^e) = \underline{\mathbf{I}}. \quad (7.6)$$

Logarytmiczna (Hencky'ego) miara odkształcenia została wybrana tutaj jako miara odkształcenia sprężystego. W opisie ruchomych naturalnych konfiguracji odniesienia oparta jest ona na tensorze $\underline{\mathbf{U}}^e$, zaś w opisie Eulerowskim na tensorze $\underline{\mathbf{V}}^e$

$$\underline{\mathbf{E}}^e(0) = \ln(\underline{\mathbf{U}}^e) = \sum \ln(\lambda_i^e) \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_i^e, \quad \underline{\mathbf{e}}^e(0) = \ln(\underline{\mathbf{V}}^e) = \sum \ln(\lambda_i^e) \underline{\mathbf{n}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{n}}_i^e, \quad (7.7)$$

$$\underline{\mathbf{e}}^e(0) = \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\mathbf{E}}^e(0) (\underline{\mathbf{R}}^e)^T.$$

Lagrangeowska (materialna) i Eulerowska (przestrzenna) logarytmiczna miara odkształcenia sprężystego związane są ze sobą wzorem (7.7)₃. Miara $\underline{\mathbf{E}}^e(0)$ jest elementem parametrycznej rodziny Lagrangeowskich miar odkształcenia sprężystego dla wartości parametru $n=0$, analogicznej do tej wprowadzonej przez Hilla dla odkształceń całkowitych – por. [28]

$$\underline{\mathbf{E}}^e(n) = ((\underline{\mathbf{U}}^e)^{2n} - \underline{\mathbf{I}}) / (2n); \quad n \neq 0, \quad \underline{\mathbf{E}}^e(0) = \ln(\underline{\mathbf{U}}^e); \quad n = 0, \quad (7.8)$$

$$\underline{\mathbf{E}}^e(n) = \sum f(\lambda_i^e) \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_i^e,$$

$$f(\lambda_i^e) = ((\lambda_i^e)^{2n} - 1) / 2n, \quad n \neq 0, \quad f(\lambda_i^e) = \ln(\lambda_i^e), \quad n = 0.$$

Funkcja skali $f(\lambda_i^e)$ posiada własności $f(\lambda_i^e)|_{\lambda_i^e=1} = 0$ i $df(\lambda_i^e)/d\lambda_i^e|_{\lambda_i^e=1} = 1$.

Własności te powodują, że wszystkie miary odkształcenia z rodziny (7.8) zbiegają do tensora małych odkształceń $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^e \equiv 0.5(\underline{\mathbf{F}}^e + \underline{\mathbf{F}}^e{}^T - 2\underline{\mathbf{I}})$, gdy gradient tensora deformacji zbiega do jedności $(\underline{\mathbf{F}}^e - \underline{\mathbf{I}}) \rightarrow \underline{\mathbf{0}}$.

Tensor odkształceń logarytmicznych ma użyteczną własność. Część kulista tego tensora opisuje wyłącznie deformację objętościową makroelementu, przy jego skończonych deformacjach, zaś jego część dewiatorowa opisuje wyłącznie deformację postaciową

$$\underline{\mathbf{E}}^e(0) = \ln(\underline{\mathbf{U}}^e) = \tilde{\underline{\mathbf{E}}}^e(0) + \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\mathbf{E}}^e(0)) \underline{\mathbf{I}}, \quad E_{ij}^e = \ln(\lambda_i^e) = \tilde{E}_{ij}^e + \frac{1}{3} \ln(\lambda_1^e \lambda_2^e \lambda_3^e) \delta_{ij}, \quad (7.9)$$

$$\text{tr}(\underline{\mathbf{E}}^e(0)) = \lambda_1^e + \lambda_2^e + \lambda_3^e = \ln(J^e), \quad J^e \equiv \det(\underline{\mathbf{F}}^e) = \rho^* / \rho = \det(\underline{\mathbf{U}}^e) = \lambda_1^e \lambda_2^e \lambda_3^e,$$

gdzie $\tilde{\mathbf{E}}^e(0)$ oznacza dewiator tensora odkształcenia sprężystego ($\tilde{E}_1^e + \tilde{E}_2^e + \tilde{E}_3^e = 0$).

Właśnie ta własność, której nie mają inne miary odkształcenia z rodziny (7.8) np. miara Greena-Lagrange'a $\mathbf{E}^e(1)$, zadecydowała o wyborze tej miary jako parametru stanu w rozwijanym tutaj modelu. Wartości główne tensora rozciągnięcia sprężystego \mathbf{U}^e można wyznaczyć, jeśli znane są składowe logarytmicznego odkształcenia sprężystego, za pomocą wzoru $\lambda_i^e = (J^e)^{1/3} \exp(\tilde{E}_i^e)$.

Jak wskazują badania doświadczalne materiały metaliczne przy dowolnych obciążeniach wykazują jedynie niewielkie postaciowe odkształcenia sprężyste, gdyż przy odkształceniach rzędu 0.002 zaczynają płynąć plastycznie. Duże odkształcenia sprężyste mogą być jedynie objętościowe, na przykład przy obciążeniach dynamicznych gdy występują wysokie ciśnienia. W konsekwencji specjalna własność logarytmicznej miary odkształcenia sprężystego, polegająca na rozprzęgnięciu efektów objętościowych i postaciowych czyni tę miarę szczególnie użyteczną do budowy modeli konstytutywnych materiałów metalicznych, gdyż pozwala bez komplikacji na proponowanie niezależnie od siebie związków konstytutywnych dla odkształceń postaciowych i odkształceń objętościowych.

7.4 Równania stanu – przypadek ogólny

W trakcie deformacji sprężystej makroelementu moc pracy na jednostkę masy deformującego się ciała \dot{w}_e można wyrazić wzorem

$$\rho^0 \dot{w}_e = \text{tr}(\boldsymbol{\tau} \mathbf{d}^e), \quad \boldsymbol{\tau} \equiv J \boldsymbol{\sigma}, \quad \boldsymbol{\tau} = \sum \tau_{ij} \mathbf{n}_i^e \otimes \mathbf{n}_j^e, \quad \mathbf{d}^e = \sum d_{ij}^e \mathbf{n}_i^e \otimes \mathbf{n}_j^e, \quad (7.10)$$

gdzie $\boldsymbol{\tau}$ oznacza klasyczny tensor naprężenia Kirchoffa, $\boldsymbol{\sigma}$ tensor naprężenia Cauchego, $J \equiv \det(\mathbf{F}) = \rho^0 / \rho$ wartość wyznacznika gradientu całkowitych odkształceń, \mathbf{d}^e to tensor prędkości deformacji sprężystych – por. (7.3)₁.

Hill [28] stosując opis Lagrangeowski wprowadził koncepcję miary naprężenia $\mathbf{T}(n)$ sprzężonej poprzez pracę z dowolną Lagrangeowską miarą odkształcenia całkowitego $\mathbf{E}(n)$ z rodziny analogicznej do (7.8), ale zdefiniowanej na tensorze rozciągnięć całkowitych \mathbf{U} ($\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}$). Oparł się przy tym na przesłance, że moc pracy w procesie deformacji nie może zależeć od sposobu jej opisu – jest niezmiennicza przy zmianie miary odkształcenia.

Przyjmując, że również moc pracy sprężystej w procesie deformacji nie może zależeć od sposobu jej opisu i postępując podobnie jak Hill wprowadza się tutaj pojęcie sprzężonego poprzez pracę sprężystą tensora naprężenia $\mathbf{T}^e(n)$ do dowolnej sprężystej Lagrangeowskiej miary odkształcenia $\mathbf{E}^e(n)$ zgodnie z następującą definicją

$$\rho^0 \dot{w}_e = \text{tr}(\underline{\boldsymbol{\tau}} \underline{\mathbf{d}}^e) = \text{tr}(\underline{\mathbf{T}}^e(n) \dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(n)), \quad \underline{\mathbf{T}}^e(n) = T_{ij}^e(n) \mathbf{N}_i^e \otimes \mathbf{N}_j^e, \quad (7.11)$$

gdzie $\dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(n)$ oznacza zwykłą pochodną materialną Lagrangeowskiej miary odkształcenia sprężystego z rodziny (7.8), zaś $\underline{\mathbf{T}}^e(n)$ miarę naprężenia sprzężoną poprzez pracę sprężystą do $\underline{\mathbf{E}}^e(n)$. Tylko w niewielu przypadkach istnieją proste wzory dla $\underline{\mathbf{T}}^e(n)$ w zapisie bezindeksowym, tak jak to jest w przypadku miary Greena-Lagrange'a $\underline{\mathbf{E}}^e(1)$

$$\underline{\mathbf{T}}^e(1) \equiv \underline{\mathbf{F}}^e \underline{\boldsymbol{\tau}} \underline{\mathbf{F}}^e, \quad (7.12)$$

gdzie $\underline{\mathbf{T}}^e(1)$ oznacza tensor naprężeń sprężystych II tensor Pioli-Kirchoffa. Dowód jest prosty ($\text{tr}(\underline{\boldsymbol{\tau}} \underline{\mathbf{d}}^e) = \text{tr}(\underline{\mathbf{F}}^e \underline{\boldsymbol{\tau}} \underline{\mathbf{F}}^e \underline{\mathbf{d}}^e \underline{\mathbf{F}}^e) = \text{tr}(\underline{\mathbf{T}}^e(1) \dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(1))$, $\dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(1) = \underline{\mathbf{F}}^e \underline{\mathbf{d}}^e \underline{\mathbf{F}}^e$). Pomimo, że w przypadku miary Greena-Lagrange'a łatwo jest podać bezindeksowy wzór na sprzężony z nią tensor naprężenia to, jak już wspomniano powyżej część kulista i część dewiatorowa odkształcenia Greena-Lagrange'a opisuje w sposób sprzężony efekty objętościowe i postaciowe.

Należy starannie odróżniać tensory $\underline{\mathbf{T}}^e(n)$ sprzężone poprzez pracę sprężystą, pojawiające się w opisie ruchomych naturalnych konfiguracji odniesienia, od tensorów sprzężonych poprzez pracę całkowitą pojawiające się w klasycznym całkowitym opisie Lagrange'a, stosowanym przez Hilla i Rice'a [27]. Te pierwsze miary zależą od $\underline{\mathbf{F}}^e$ ($\underline{\mathbf{T}}^e(n) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{F}}^e)$), te drugie od $\underline{\mathbf{F}}$ ($\underline{\mathbf{T}}(n) = \underline{\mathbf{f}}(\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{F}})$) (np. klasyczny II tensor Pioli Kirchoffa wyraża się wzorem $\underline{\mathbf{T}}(1) \equiv \underline{\mathbf{F}} \underline{\boldsymbol{\tau}} \underline{\mathbf{F}}$, zaś sprężysty wzorem (7.12). Odpowiednie miary naprężenia są sobie równe $\underline{\mathbf{T}}^e(n) = \underline{\mathbf{T}}(n)$ tylko wtedy gdy $\underline{\mathbf{F}}^m = \underline{\mathbf{I}}$.

W ogólnym przypadku bezindeksowe wzory na naprężenie $\underline{\mathbf{T}}^e(n)$ sprzężone poprzez pracę sprężystą z $\underline{\mathbf{E}}^e(n)$ są skomplikowane. Jednakże Hill [28] stosując rozwiniętą przez siebie „metodę osi głównych” podał proste wzory na, wyrażone na osiach głównych, składowe tensorów naprężenia sprzężonych poprzez pracę całkowitą z odpowiadającymi im miarami odkształcenia. W tym celu wyprowadził zależności wiążące składowe $\dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(n)$, wyrażone na osiach Lagrangeowskich ze składowymi $\underline{\mathbf{d}}$ wyrażonymi na osiach Eulerowskich. Wystarczy we wzorach Hilla podstawić w miejsce obiektów pochodzących od $\underline{\mathbf{F}}$ obiekty pochodzące od $\underline{\mathbf{F}}^e$, aby uzyskać związki pomiędzy $\dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(n)$ i $\underline{\mathbf{d}}^e$. Tutaj ograniczymy się do podania odpowiednich relacji wyłącznie dla pochodnej materialnej miary logarytmicznej $\dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(0)$ – por. (7.7)₁

$$\begin{aligned} \bar{E}_{ij}^e &= d_{ij}^e = \lambda_i^e / \lambda_j^e && \text{dla } i = j \\ \bar{E}_{ij}^e &= \frac{2(\lambda_i^e / \lambda_j^e) \ln(\lambda_i^e / \lambda_j^e)}{(\lambda_i^e / \lambda_j^e)^2 - 1} d_{ij}^e && \text{dla } i \neq j \text{ oraz } \lambda_i^e \neq \lambda_j^e, \end{aligned} \quad (7.13)$$

$$\dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(0) = \ln(\underline{\mathbf{U}}^e) = \sum \bar{E}_{ij}^e \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e.$$

Wyprowadzenie powyższego wzoru zostało podane w Aneksie 7.1, tak aby niniejsza praca stanowiła samodzielną całość – por. (A7.24).

Wzór (7.11) wyspecyfikowany dla $n=0$ ($tr(\underline{\mathbf{T}}^e(0)\dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(0)) = tr(\underline{\boldsymbol{\tau}}\underline{\mathbf{d}}^e)$) przyjmuje następującą postać

$$\tau_{ij} d_{ij}^e = T_{ij}^e(0) \bar{E}_{ij}^e. \quad (7.14)$$

Powyższa relacja obowiązuje dla dowolnej prędkości deformacji $\underline{\mathbf{d}}^e$. Zatem składowe tensora naprężenia $\underline{\mathbf{T}}^e(0)$, sprzężonego poprzez pracę sprzęzystą z logarytmicznym odkształceniem sprzęzystym $\underline{\mathbf{E}}^e(0)$, w zapisie na Lagrangeowskich sprzęzystych osiach głównych, muszą spełniać relacje – por. (7.13)

$$T_{ij}^e(0) = \tau_{ij} \quad i = j, \quad T_{ij}^e(0) \frac{2\lambda_i^e \lambda_j^e \ln(\lambda_i^e / \lambda_j^e)}{(\lambda_i^e)^2 - (\lambda_j^e)^2} = \tau_{ij} \quad i \neq j. \quad (7.15)$$

Powyższe związki obowiązuja bez względu na symetrie prawa konstytutywnego jakiegokolwiek materiału.

7.5 Równania stanu – materiały izotropowe sprzężycie

Przy rozważaniach nad materiałami izotropowo sprzęzystymi wygodnie jest wprowadzić pojęcia obróconego sprzężycie tensora naprężenia Kirchoffa $\underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}}$ i obróconego sprzężycie tensora gradientu prędkości deformacji $\underline{\mathbf{D}}^e$ zdefiniowanych następująco

$$\underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}} \equiv \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\boldsymbol{\tau}} \underline{\mathbf{R}}^e, \quad \underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}} = T_{ij}^{\text{Re}} \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e, \quad \underline{\mathbf{D}}^e = \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\mathbf{d}}^e \underline{\mathbf{R}}^e, \quad \underline{\mathbf{D}}^e = \sum D_{ij}^e \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e. \quad (7.16)$$

Jak łatwo zauważyć składowe $\underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}}$ i $\underline{\mathbf{D}}^e$, na Lagrangeowskich sprzęzystych osiach głównych, są równe odpowiednio składowym tensora Kirchoffa $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ i składowym tensora $\underline{\mathbf{d}}^e$, na Eulerowskich sprzęzystych osiach głównych – por. (7.10)

$$T_{ij}^{\text{Re}} = \tau_{ij}, \quad D_{ij}^e = d_{ij}^e. \quad (7.17)$$

Podstawiając do (7.11) wyrażenia (7.16) na $\underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}}$ i $\underline{\mathbf{D}}^e$ otrzymuje się

$$tr(\mathbf{T}^{\text{Re}} \mathbf{D}^e) = tr(\mathbf{R}^e \boldsymbol{\tau} \mathbf{R}^e \mathbf{R}^e \mathbf{d}^e \mathbf{R}^e) = tr(\boldsymbol{\tau} \mathbf{d}^e) = \rho^0 \dot{w}_e = tr(\mathbf{T}^e(0) \dot{\mathbf{E}}^e(0)). \quad (7.18)$$

Gdy materiał jest izotropowy sprężyste, tj. jego własności sprężyste są niezależne od orientacji w przestrzeni, wtedy związek konstytutywny łączący tensory $\mathbf{T}^e(n)$ i $\mathbf{E}^e(n)$ musi być izotropową funkcją tensorową². Zatem wszystkie tensory $\mathbf{T}^e(n)$ muszą mieć kierunki główne \mathbf{N}_i^e wspólne z $\mathbf{E}^e(n)$ a więc z tensorem \mathbf{U}^e . Formalny dowód znajduje się w wielu podręcznikach, patrz np. monografia Ogdena [47]. W konsekwencji dowolny tensor spośród wyżej wymienionych może mieć niezerowe tylko diagonalne elementy na Lagrangeowskich sprężystych osiach głównych. Zaś dowolne dwa tensory spośród wymienionych komutują np.

$$\mathbf{T}^e(n) = \sum T_i^e(n) \mathbf{N}_i^e \otimes \mathbf{N}_i^e, \quad \mathbf{T}^e(n) \mathbf{E}^e(n) = \mathbf{E}^e(n) \mathbf{T}^e(n). \quad (7.19)$$

Analogicznie, w opisie Eulerowskim w przypadku izotropii sprężystej tensory naprężenia Cauchego $\boldsymbol{\sigma}$, Kirchoffa $\boldsymbol{\tau}$ oraz tensory odkształceń sprężystych $\mathbf{e}^e(n)$ mają wspólne kierunki główne pokrywające się z kierunkami głównymi \mathbf{n}_i^e tensora \mathbf{V}^e – por. (7.7)₃. W konsekwencji dowolny tensor z grupy $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{e}^e(n)$ może mieć niezerowe tylko diagonalne elementy na Eulerowskich sprężystych osiach głównych, zaś dowolne dwa tensory spośród wymienionych komutują, np.

$$\boldsymbol{\tau} = \sum \tau_i \mathbf{n}_i^e \otimes \mathbf{n}_i^e, \quad \boldsymbol{\tau} \mathbf{e}^e(n) = \mathbf{e}^e(n) \boldsymbol{\tau}. \quad (7.20)$$

W takim przypadku również obrócony tensor naprężenia Kirchoffa \mathbf{T}^{Re} , jak wynika z (7.17)₁, ma niezerowe tylko diagonalne elementy na Lagrangeowskich sprężystych osiach głównych, a więc kierunki \mathbf{N}_i^e stanowią jego kierunki główne i komutuje on z tensorem \mathbf{U}^e

$$\mathbf{T}^{\text{Re}} = T_i^{\text{Re}} \mathbf{N}_i^e \otimes \mathbf{N}_i^e, \quad T_i^{\text{Re}} = \tau_i \quad i = j, \quad T_{ij}^{\text{Re}} = 0 \quad i \neq j, \quad \mathbf{T}^{\text{Re}} \mathbf{U}^e = \mathbf{U}^e \mathbf{T}^{\text{Re}}. \quad (7.21)$$

Podobnie tensor $\mathbf{T}^e(0)$ ma niezerowe tylko diagonalne składowe na Lagrangeowskich sprężystych osiach głównych ($T_i^e(0) = \tau_i \quad i = j$, $T_{ij}^e(0) = 0 \quad i \neq j$), jak wynika z (7.15) i (7.20).

Z powyższych faktów można wywnioskować, że w przypadku izotropii sprężystej tensor naprężenia $\mathbf{T}^e(0)$ sprzężony poprzez pracę sprężystą z odkształceniem $\mathbf{E}^e(0)$ jest identyczny z obróconym sprężyste tensorem Kirchoffa \mathbf{T}^{Re}

² Izotropowa funkcja tensorowa $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{T})$ argumentu tensorowego \mathbf{T} z definicji spełnia relację

$$\boldsymbol{\chi}(\mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}) = \mathbf{Q} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{T}) \mathbf{Q} \quad \text{dla wszystkich właściwych tensorów ortogonalnych } \mathbf{Q}.$$

$$\mathbf{T}^e(0) = \mathbf{T}^{\text{Re}}, \quad \mathbf{T}^e(0)\mathbf{U}^e = \mathbf{U}^e\mathbf{T}^e(0) = \mathbf{T}^{\text{Re}}\mathbf{U}^e = \mathbf{U}^e\mathbf{T}^{\text{Re}}. \quad (7.22)$$

W literaturze poświęconej mechanice obliczeniowej bardzo często tensor \mathbf{T}^{Re} traktuje się jako tensor naprężenia sprzężony, poprzez pracę sprężystą, z odkształceniem $\mathbf{E}^e(0)$. Bez należytego podkreślenia, iż tak jest wyłącznie w przypadku izotropii sprężystej. Może to mniej doświadczonych czytelników wprowadzić w błąd, iż tak jest w każdym przypadku symetrii materiałowej, co nie jest prawdą – por. (7.15).

Obecnie zostanie podany sposób otrzymywania oraz struktura równań konstytutywnych dla materiału SMA, gdy z założenia znana jest funkcja energii swobodnej ϕ . Założenie, że materiał SMA, z dobrym przybliżeniem można traktować jako izotropowo sprężysty prowadzi do wymogu, aby potencjał energii swobodnej ϕ był izotropową funkcją skalarną względem swoich zmiennych kanonicznych tj. parametrów stanu $\{\mathbf{E}^e(0), T, z\}$, w opisie ruchomych naturalnych konfiguracji odniesienia lub równoważnie $\{\mathbf{e}^e(0), T, z\}$, w opisie Eulera. Jest to bardzo ogólny przypadek obejmujący także nieliniową sprężystość, jaka może się pojawiać w opisie makroskopowym stopu SMA. Brak jest obecnie danych doświadczalnych dla zaproponowania jawnej postaci funkcji energii swobodnej dla stopów z pamięcią kształtu dla tak ogólnego przypadku. W dalszej części pracy zostanie wyspecyfikowana jawna postać tej funkcji przewidująca liniowo sprężyste zachowanie materiału – względem odkształcenia logarymicznego, co jak wskazują badania doświadczalne wykonane na stopie NiTi opisane w rozdziale 5 stanowi dobre przybliżenie modelowe. Użycie odkształcenia logarymicznego jako zmiennej stanu, przy modelowaniu sprężystego zachowania stopu SMA, umożliwi stosunkowo łatwe rozszerzenie modelu na zakres wysokich ciśnień. Gdyż wtedy wystarczy podać, sformułowany na podstawie dostępnych danych doświadczalnych dla stopu z pamięcią kształtu, ewentualnie nieliniowy związek konstytutywny wiążący kulistą część tensora naprężenia z kulistą częścią tensora odkształcenia. Pozostawiając związek pomiędzy częściami postaciowymi tych tensorów niezmienny.

Fundamentalne równanie stanu Gibssa określające różniczkę zupełną potencjału $\phi(\mathbf{E}^e(0), T, z)$ przyjmuje następującą postać

$$\dot{\phi} = -s\dot{T} + \dot{w}_0, \quad (7.23)$$

$$\dot{w}_0 = \text{tr}(\mathbf{T}^{\text{Re}}\dot{\mathbf{E}}^e(0)) / \rho^0 - \pi_1 \dot{z}, \quad \dot{w}_0 = \text{tr}(\boldsymbol{\tau}\dot{\mathbf{e}}^e(0)) / \rho^0 - \pi_1 \dot{z} \quad [J/kg],$$

gdzie s oznacza entropię właściwą, na jednostkę masy, π_1 to termodynamiczna siła martenzytycznej przemiany fazowej w stanie beznaprężeniowym, \dot{w}_0 to moc właściwa pracy na jednostkę masy, jaka musiałaby być wykonana nad makroelementem w równoważnym procesie odwracalnym termodynamicznie. Wzór

(7.23)₂ określa moc pracy odwracalnej \dot{w}_0 w opisie ruchomych naturalnych konfiguracji odniesienia, zaś wzór (7.23)₃ określa \dot{w}_0 w opisie Eulera na konfiguracji aktualnej.

Z równań (7.23)_{1,2} wynikają następujące równania stanu dla makroelementu, wykonanego z izotropowo sprężystego materiału SMA, w stanach ograniczonej równowagi termodynamicznej w opisie ruchomych naturalnych konfiguracji odniesienia

$$\underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}} = \rho^0 \frac{\partial \phi(\underline{\mathbf{E}}^e(0), T, z)}{\partial \underline{\mathbf{E}}^e(0)}, \quad s = -\frac{\partial \phi(\underline{\mathbf{E}}^e(0), T, z)}{\partial T}, \quad (7.24)$$

$$\pi_1 = -\frac{\partial \phi(\underline{\mathbf{E}}^e(0), T, z)}{\partial z}, \quad \dot{\phi} = (\partial \phi / \partial \underline{\mathbf{E}}^e(0)) \dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(0) + (\partial \phi / \partial T) \dot{T} + (\partial \phi / \partial z) \dot{z}.$$

Ponieważ funkcja ϕ jest z założenia funkcją izotropową więc jej postać matematyczna nie ulega zmianie po jej wyrażeniu w zmiennych $\{\underline{\mathbf{e}}^e(0), T, z\}$, gdyż tensory $\underline{\mathbf{E}}^e(0)$ i $\underline{\mathbf{e}}^e(0)$ różnią się tylko obrotem – por. (7.7)₃. Ta własność pozwala na łatwe otrzymanie równań stanu makroelementu SMA w opisie Eulerowskim następująco

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} \equiv \rho^0 \frac{\partial \phi(\underline{\mathbf{e}}^e(0), T, z)}{\partial \underline{\mathbf{e}}^e(0)}, \quad s \equiv -\frac{\partial \phi(\underline{\mathbf{e}}^e(0), T, z)}{\partial T}, \quad \pi_1 \equiv -\frac{\partial \phi(\underline{\mathbf{e}}^e(0), T, z)}{\partial z}. \quad (7.25)$$

Własność izotropii sprężystej zapewnia kolinearność par tensorów $\underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{e}}^e(n)$ i $\underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}}, \underline{\mathbf{E}}^e(0)$, tensory te komutują – por. (7.20), (7.22). Gdy zapewnione są warunki różniczkowalności zależności funkcyjnych $\underline{\boldsymbol{\tau}} = \underline{\boldsymbol{\tau}}(\underline{\mathbf{e}}^e(0))$, $\underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}} = \underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}}(\underline{\mathbf{E}}^e(0))$ prowadzi to do następujących własności

$$(\partial \underline{\boldsymbol{\tau}} / \partial \underline{\mathbf{e}}^e(0)) [\underline{\mathbf{e}}^e(0) \underline{\boldsymbol{\omega}}^* - \underline{\boldsymbol{\omega}}^* \underline{\mathbf{e}}^e(0)] = [\underline{\boldsymbol{\tau}} \underline{\boldsymbol{\omega}}^* - \underline{\boldsymbol{\omega}}^* \underline{\boldsymbol{\tau}}], \quad (7.26)$$

$$(\partial \underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}} / \partial \underline{\mathbf{E}}^e(0)) [\underline{\mathbf{E}}^e(0) \underline{\boldsymbol{\omega}}^* - \underline{\boldsymbol{\omega}}^* \underline{\mathbf{E}}^e(0)] = [\underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}} \underline{\boldsymbol{\omega}}^* - \underline{\boldsymbol{\omega}}^* \underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}}],$$

gdzie $\underline{\boldsymbol{\omega}}^* = \dot{\underline{\mathbf{Q}}} \underline{\mathbf{Q}}^T$ jest dowolnym tensorem spinu generowanym tensorem obrotu $\underline{\mathbf{Q}}$.

Powyższe wzory stanowią specyfikację znanej własności izotropowych funkcji tensorowych argumentu tensorowego.

7.6 Prędkościowe równania stanu

Prędkościowe równania stanu makroelementu SMA na konfiguracji aktualnej można otrzymać poprzez obliczenie dowolnej pochodnej korotacyjnej wielkości (7.25), przy czym z przyczyn które podano nieco poniżej wygodnie jest wykorzystać w tym

celu pochodną sprężystą Zaremby-Jaumanna³. W takim wypadku równania prędkościowe na konfiguracji aktualnej przyjmują postać

$$\underline{\boldsymbol{\tau}}^{(Je)} = \rho^0 [\underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^E \underline{\boldsymbol{e}}^e(0) - \underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^E \dot{T} - (\partial \pi_1 / \partial \underline{\boldsymbol{e}}^e(0)) \dot{z}], \quad (7.27)$$

$$T \dot{s} = T \underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^E \underline{\boldsymbol{e}}^e(0) + c_\varepsilon \dot{T} + T (\partial \pi_1 / \partial T) \dot{z},$$

$$\dot{\pi}_1 = \frac{\partial \pi_1}{\partial \underline{\boldsymbol{e}}^e(0)} \underline{\boldsymbol{e}}^e(0) + \frac{\partial s}{\partial z} \dot{T} + \frac{\partial \pi_1}{\partial z} \dot{z},$$

gdzie $\underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^E$ oznacza, tzw. energetyczny izotropowy tensor modułów sztywności sprężystej, $\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^E$ energetyczny tensor sprężystych naprężeń termicznych, $c_\varepsilon \equiv T(\partial s / \partial T)$ pojemność cieplną właściwą, na jednostkę masy, przy stałym odkształceniu. Tensor $\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^E$ związany jest z izotropowym tensorem rozszerzalności termicznych $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \alpha_0 \mathbf{I}$ wzorem $\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^E = \underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^E \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0$.

Przy obliczaniu zależności (7.27) skorzystano z własności, iż pochodna korotacyjna funkcji skalarnej to zwykła pochodna materialna np. $\frac{0}{T}^{(Je)} = \dot{T}$, oraz z własności (7.26)₁ dla spinu $\underline{\boldsymbol{\omega}}^e$ – por. (7.4)₂ i definicji (7.28)₁, tj. z zależności $\rho^0 \underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^E [\underline{\boldsymbol{e}}^e(0) \underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^e \underline{\boldsymbol{e}}^e(0)] = [\underline{\boldsymbol{\tau}} \underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^e \underline{\boldsymbol{\tau}}]$.

Znajomość jawnej postaci potencjału energii swobodnej ϕ pozwala wyznaczyć chwilowe wartości własności $\underline{\boldsymbol{\mathcal{L}}}^E$, $\underline{\boldsymbol{\mathcal{B}}}^E$ i $\partial \pi_1 / \partial \underline{\boldsymbol{e}}^e(0)$ z następujących wzorów

³ Pochodna korotacyjna dowolnego tensora $\underline{\mathbf{T}}$ drugiego rzędu zdefiniowana jest następująco

$$\frac{0}{\underline{\mathbf{T}}}^Q \equiv \underline{\mathbf{Q}}^e \frac{D}{Dt} ({}^T \underline{\mathbf{Q}}^e \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{Q}}^e) {}^T \underline{\mathbf{Q}}^e = \dot{\underline{\mathbf{T}}} + \underline{\mathbf{T}} \underline{\boldsymbol{\omega}}^Q - \underline{\boldsymbol{\omega}}^Q \underline{\mathbf{T}},$$

gdzie $\underline{\boldsymbol{\omega}}^Q$ to spin generujący daną pochodną korotacyjną $\underline{\boldsymbol{\omega}}^Q = \dot{\underline{\mathbf{Q}}} \underline{\mathbf{Q}}^T$, $\underline{\mathbf{Q}}$ jest właściwym tensorem obrotu ($\underline{\mathbf{Q}} \cdot \underline{\mathbf{Q}}^T = \mathbf{I}$, $\det(\underline{\mathbf{Q}}) = 1$). Po podstawieniu odpowiedniego spinu można otrzymać różne pochodne korotacyjne, np. Zaremby-Jaumanna – $\frac{0}{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{(J)} = \dot{\underline{\boldsymbol{\tau}}} + \underline{\boldsymbol{\tau}} \underline{\boldsymbol{\omega}} - \underline{\boldsymbol{\omega}} \underline{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\rho^0}{\rho} [\dot{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\boldsymbol{\omega}} - \underline{\boldsymbol{\omega}} \underline{\boldsymbol{\sigma}} + \underline{\boldsymbol{\sigma}} tr(\underline{\mathbf{d}})]$ ($\underline{\boldsymbol{\tau}} = \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\boldsymbol{\sigma}}$); sprężystą Zaremby-Jaumanna –

$\frac{0}{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{(Je)} = \frac{\rho^0}{\rho} [\dot{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} + \underline{\boldsymbol{\sigma}} \underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^e \underline{\boldsymbol{\sigma}} + \underline{\boldsymbol{\sigma}} tr(\underline{\mathbf{d}})]$, Greena-Naghdiego, etc. Jeśli w miejsce tensora $\underline{\mathbf{T}}$ zostanie podstawiona wielkość skalarna to mówi się o pochodnej korotacyjnej wielkości skalarnej. Jak łatwo stwierdzić przez bezpośrednie obliczenie taka pochodna jest równa zwykłej pochodnej materialnej, np. $\frac{0}{T}^Q = \dot{T}$.

$$\underline{\mathcal{L}}^E = \underline{\mathcal{L}}^E(\underline{\mathbf{e}}^e(0), T, z) \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial \underline{\mathbf{e}}^e(0) \partial \underline{\mathbf{e}}^e(0)} = \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \underline{\mathbf{e}}^e(0)}, \quad (7.28)$$

$$\underline{\mathcal{B}}^E = \underline{\mathcal{B}}^E(\underline{\mathbf{e}}^e(0), T, z) \equiv -\frac{\partial^2 \phi}{\partial T \partial \underline{\mathbf{e}}^e(0)} = \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial T},$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \underline{\mathbf{e}}^e(0)} \equiv -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \underline{\mathbf{e}}^e(0)} = -\frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial z},$$

przy czym ostatnie równości po prawych stronach w powyższych wzorach wynikają z relacji wzajemności Maxwella.

Energetyczne tensory własności $\underline{\mathcal{L}}^E$, $\underline{\mathcal{B}}^E$ powiązane są z klasycznymi tensorami modułów sztywności sprężystej i sprężystych naprężeń termicznych wzorami,

$$\underline{\mathcal{L}}^E = \underline{\mathcal{L}} / \rho, \quad \underline{\mathcal{B}}^E = \underline{\mathcal{B}} / \rho, \quad \underline{\mathcal{B}}^E = \underline{\mathcal{L}}^E \boldsymbol{\alpha}_0, \quad \underline{\mathcal{B}} = \underline{\mathcal{L}} \boldsymbol{\alpha}_0, \quad (7.29)$$

gdzie ρ oznacza gęstość na konfiguracji aktualnej.

Stosowany w niniejszej pracy rozkład multiplikatywny tensora gradientu deformacji oparty jest na rodzinie, tzw. izoklinicznych ruchomych konfiguracji naturalnych określonych warunkiem $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{in} = \mathbf{0}$ – por. (7.54), patrz także Aneks 7.4. Oznacza to, że „reper orientujący” $\{\underline{\mathbf{m}}_i\}$ $i = 1, 2, 3$, wyznaczający w każdej chwili zorientowanie konfiguracji naturalnych ${}^i B^*$ w ustalonym laboratoryjnym układzie współrzędnych, utrzymuje cały czas tę samą orientację względem osi laboratoryjnych (pochodne materialne $\dot{\underline{\mathbf{m}}}_i \equiv \mathbf{0}$). Ponieważ konfiguracje ${}^i B^*$, wykorzystywane jako konfiguracje odniesienia dla podania równań stanu (7.24), są izokliniczne – wersory $\{\underline{\mathbf{m}}_i\}$ nie obracają się w żadnej chwili procesu deformacji niesprężystej. Więc prędkościowe równania stanu określone względem tych konfiguracji, obliczone jako zwykle pochodne materialne, zachowują swój konstytutywny charakter. Równania te przyjmują postać

$$\dot{\mathbf{T}}^{Re} = \rho^0 [\underline{\mathcal{L}}^E \dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(0) - \underline{\mathcal{B}}^E \dot{T} - (\partial \pi_1 / \partial \underline{\mathbf{E}}^e(0)) \dot{z}], \quad (7.30)$$

$$T \dot{s} = T \underline{\mathcal{B}}^E \dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(0) + c_\varepsilon \dot{T} + T (\partial \pi_1 / \partial T) \dot{z},$$

$$\dot{\pi}_1 = \frac{\partial \pi_1}{\partial \underline{\mathbf{E}}^e(0)} \dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(0) + \frac{\partial s}{\partial z} \dot{T} + \frac{\partial \pi_1}{\partial z} \dot{z},$$

gdzie

$$\underline{\mathcal{L}}^E = \underline{\mathcal{L}}^E(\underline{\mathbf{E}}^e(0), T, z) \equiv \frac{\partial^2 \phi}{\partial \underline{\mathbf{E}}^e(0) \partial \underline{\mathbf{E}}^e(0)} = \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \mathbf{T}^{Re}}{\partial \underline{\mathbf{E}}^e(0)}, \quad (7.31)$$

$$\underline{\mathcal{B}}^E = \underline{\mathcal{B}}^E(\underline{\mathbf{E}}^e(0), T, z) \equiv -\frac{\partial^2 \phi}{\partial T \partial \underline{\mathbf{E}}^e(0)} = \frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \mathbf{T}^{Re}}{\partial T},$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \underline{\mathbf{E}}^e(0)}(\underline{\mathbf{E}}^e(0), T, z) \equiv -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \underline{\mathbf{E}}^e(0)} = -\frac{1}{\rho^0} \frac{\partial \mathbf{T}^{\text{Re}}}{\partial z}.$$

Tensory $\underline{\mathcal{L}}^E$, $\underline{\mathcal{B}}^E$ występujące we wzorach (7.28), (7.31) to te same tensory, tylko traktowane jako zależności funkcyjne są one wyrażone poprzez inne zmienne.

Istnieje następujący związek kinematyczny pomiędzy pochodną sprężystą Zaremby-Jaumanna $\overset{\circ}{\underline{\mathbf{e}}}^e(0) \stackrel{\text{(Je)}}{\equiv} \dot{\underline{\mathbf{e}}}^e(0) + \underline{\mathbf{e}}^e(0)\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^e \underline{\mathbf{e}}^e(0)$ i tensorem sprężystej prędkości

odkształcenia $\underline{\mathbf{d}}^e$, patrz także (7.4)₂

$$\overset{\circ}{\underline{\mathbf{e}}}^e(0) \stackrel{\text{(Je)}}{=} [\underline{\mathbf{I}}^{(4)} + \underline{\mathcal{E}}^{de}(\underline{\mathbf{U}}^e)] \underline{\mathbf{d}}^e, \quad (7.32)$$

$$\mathcal{E}_{ijkl}^{de} d_{kl}^e = e_{ij}^{Je} - d_{ij}^e = \begin{cases} 0, & i = j \\ \left[\frac{(\lambda_i^e / \lambda_j^e)^2 + 1}{(\lambda_i^e / \lambda_j^e)^2 - 1} \ln(\lambda_i^e / \lambda_j^e) - 1 \right] d_{ij}^e; & i \neq j \end{cases}$$

gdzie $\underline{\mathbf{I}}^{(4)}$ oznacza tensor jednostkowy 4 rzędu, zaś tensor czwartego rzędu $\underline{\mathcal{E}}^{de}$ zależy wyłącznie od stanu odkształcenia sprężystego lecz nie zależy od $\underline{\mathbf{d}}^e$. Wyprowadzenie tej zależności znajduje się w Aneksie 7.3 – por. (A7.31). Tamże wykazano również pewne własności tensora $\underline{\mathcal{E}}^{de}$, tj. $\underline{\mathcal{L}} \underline{\mathcal{E}}^{de} = \underline{\mathcal{E}}^{de} \underline{\mathcal{L}}$, $\underline{\mathcal{E}}^{de} \underline{\mathbf{s}} = \mathbf{0}$ if $\underline{\mathbf{s}} \underline{\boldsymbol{\tau}} = \underline{\boldsymbol{\tau}} \underline{\mathbf{s}}$. Po raz pierwszy związek (7.32) został w takiej ścisłej matematycznie postaci podany przez Ranieckiego i Nguyena [60].

Podstawiając zależność (7.32) do (7.27) otrzymuje się

$$\underline{\boldsymbol{\tau}} \stackrel{\circ}{=} \rho^0 [\underline{\mathcal{L}}^{E(Je)} \underline{\mathbf{d}}^e - \underline{\mathcal{L}}^E \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 \dot{T} - \frac{\partial \pi_1}{\partial \underline{\mathbf{e}}^e} \dot{z}], \quad \underline{\mathcal{L}}^{E(Je)} \equiv \underline{\mathcal{L}}^E (\underline{\mathbf{I}}^{(4)} + \underline{\mathcal{E}}^{de}(\underline{\mathbf{U}}^e)), \quad (7.33)$$

$$\dot{s} = \underline{\mathcal{L}}^{E(Je)} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 \underline{\mathbf{d}}^e + (c_\varepsilon / T) \dot{T} + \frac{\partial \pi_1}{\partial T} \dot{z}, \quad \dot{s} = \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 \cdot \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \stackrel{\circ}{=} + (c_p / T) \dot{T} + \frac{\partial \pi_1}{\partial z} \dot{z},$$

$$\dot{\pi}_1 = \frac{\partial \pi_1}{\partial \underline{\mathbf{e}}^e} [\underline{\mathbf{I}}^{(4)} + \underline{\mathcal{E}}^{de}(\underline{\mathbf{U}}^e)] \underline{\mathbf{d}}^e + \frac{\partial s}{\partial z} \dot{T} + \frac{\partial \pi_1}{\partial z} \dot{z},$$

gdzie $\underline{\mathcal{L}}^{E(Je)}$ nazwano tensorem sprężystej prędkościowej sztywności energetycznej Zaremby-Jaumanna. Z uwagi na zależność (7.29) jest też $\underline{\mathcal{L}}^{(Je)} = \rho \underline{\mathcal{L}}^{E(Je)} = \underline{\mathcal{L}}(\underline{\mathbf{I}}^{(4)} + \underline{\mathcal{E}}^{de}(\underline{\mathbf{U}}^e))$. Należy zwrócić uwagę, że tensor $\underline{\mathcal{L}}^{E(Je)}$ ($\underline{\mathcal{L}}^{(Je)}$) nie zależy od prędkości odkształcenia sprężystego $\underline{\mathbf{d}}^e$, lecz jest wyłącznie funkcją stanu odkształcenia makroelementu.

Zależność (7.32) ma poważne znaczenie dla modelowania konstytutywnego zachowania materiałów metalicznych. Niemal wszystkie materiały metaliczne

ulegają jedynie małym postaciowym odkształceniom sprężystym przy arbitralnych wieloosiowych obciążeniach, chociaż jednocześnie mogą ulegać dużym objętościowym odkształceniom sprężystym, na przykład przy obciążeniach udarowych. Ta specjalna własność fizyczna materiałów metalicznych pozwala na uzyskanie interesującego oszacowania pochodnej sprężystej Zaremby-Jaumanna odkształcenia logarytmicznego przy pomocy tensora sprężystej prędkości deformacji, co z kolei pozwala na dokonanie znaczącego uproszczenia prędkościowych równań konstytutywnych kosztem niewielkiego błędu akceptowalnego w większości przypadków obliczeń inżynierskich. Jeśli stosunki wartości sprężystych rozciągnięć głównych spełniają warunek $5/6 \leq \lambda_i^e / \lambda_j^e \leq 7/6$, co dla szczególnego przypadku prostego ściskania odpowiada odkształceniu 16% ($\underline{\mathbf{e}}^e(0)(\lambda_i^e / \lambda_j^e = 0.85) = -0.16$), to przez zwykłe podstawienie do wzoru (7.32) można stwierdzić, iż różnice pomiędzy składowymi pochodnej sprężystej Zaremby-Jaumanna – por. przypis 3, i tensora sprężystej prędkości odkształcenia na Eulerowskich osiach głównych spełniają warunek $|e_{ij}^{Je} - d_{ij}^e| \leq 1.1\%$. Odpowiadające takiemu odkształceniu naprężenie sprężyste wynosi $\sigma = 2\mu \cdot (-0.16) = -0.32\mu$, gdzie μ oznacza postaciowy moduł sprężystości. Symbol $||$ oznacza różnice pomiędzy poszczególnymi składowymi tensorów. W przypadku większości stopów z pamięcią kształtu odkształcenia sprężyste z reguły nie przekraczają 1%. Przy większych odkształceniach materiał SMA płynie pseudosprężystość na skutek zachodzenia przemiany fazowej. Przy takim poziomie odkształcenia sprężystego spełniona jest relacja $|e_{ij}^{Je} - d_{ij}^e| \leq 3 \cdot 10^{-5} = 0.003 [\%]$

$$\frac{5}{6} \leq \frac{\lambda_i^e}{\lambda_j^e} \leq \frac{7}{6}, e_{eq} = -0.16 \Rightarrow |e_{ij}^{Je} - d_{ij}^e| \leq 0.011 = 1.1 [\%], \quad (7.34)$$

$$e_{eq} = 0.01 \Rightarrow |e_{ij}^{Je} - d_{ij}^e| \leq 3 \cdot 10^{-5} = 0.003 [\%].$$

Zależność (7.34)₂ oznacza, iż w praktyce obliczeń inżynierskich w przypadku materiałów SMA, jak również innych metali, dla których odkształceniowa granica sprężystości może być zdefiniowana jako $\varepsilon_{offset} = 0.2 [\%]$, można przyjąć z przybliżeniem określonym wzorami (7.34)₂ a więc bardzo dobrym, że

$$\underline{\mathbf{e}}^e(0) \stackrel{0}{=} \underline{\mathbf{d}}^e, \quad \underline{\mathcal{L}}^{E(Je)} = \underline{\mathcal{L}}^E, \quad \underline{\mathcal{L}}^{(Je)} = \underline{\mathcal{L}}. \quad (7.35)$$

Powyższe oszacowania wskazują korotacyjną pochodną sprężystą Zaremby-Jaumanna jako szczególnie przydatną do wykorzystania przy formułowaniu prędkościowych równań konstytutywnych sprężystości. Gdyż w większości praktycznych przypadków ten sam tensor modułów sprężystości, tensor styczny, jaki występuje w nie prędkościowych równaniach stanu, może być użyty w

odpowiadających im równaniach prędkościowych wyrażonych poprzez tensor prędkości deformacji sprężystej $\underline{\mathbf{d}}^e$ – por. (7.25), (7.33). Pozwala to na uzyskanie dużych korzyści numerycznych.

W istocie, równanie (7.33)₁ stanowi ściśle matematycznie przejście od równań mechanicznych hypersprężystości do równań hyposprężystości. W szczególności, biorąc przypadek izotermicznej sprężystości ($\dot{T} = 0$, $\dot{z} = 0$), ścisłym matematycznie odpowiednikiem prawa nieliniowej hypersprężystości (7.25) jest w postaci prędkościowej prawo hyposprężystości – por. (7.29), (7.28), (7.33)

$$(\underline{\boldsymbol{\tau}}^{(Je)} = \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\mathcal{L}}^{(Je)} \underline{\mathbf{d}}^e) \Leftrightarrow (\underline{\boldsymbol{\tau}} = \rho^0 \partial \phi / \partial \underline{\mathbf{e}}^e(0)), \quad (7.36)$$

$$\underline{\mathcal{L}}^{(Je)} = \underline{\mathcal{L}}[\underline{\mathbf{I}}^{(4)} + \underline{\mathcal{E}}^{de}(\underline{\mathbf{U}}^e)], \quad \underline{\mathcal{L}} = \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial (\underline{\mathbf{e}}^e(0))^2}.$$

Przybliżenie (7.35) jest używane w mechanice obliczeniowej już od wielu lat w oparciu o oszacowania dostarczone przez Hilla i Rice'a. Jednakże dopiero Raniecki i

Nguyen w [60] podali ściśle matematycznie związki pomiędzy $\frac{\rho^0}{\rho} \underline{\mathbf{e}}^e(0)$ i $\underline{\mathbf{d}}^e$.

Omówione tutaj w kontekście równoważności opisu zachowania materiału równaniami konstytutywnymi hypersprężystymi i hyposprężystymi.

Jeśli przybliżenie (7.35) prowadzi do zbyt dużych błędów w obliczeniach numerycznych, wtedy należy użyć dokładnej stycznej $\underline{\mathcal{L}}^{(Je)}$ określonej wzorem (7.36)₃. Taka konieczność powstaje na przykład przy prowadzeniu obliczeń dla problemu prostego ścinania w reżimie skończonych deformacji. W którym to przypadku w wielu publikacjach donoszono o modelowym przewidywaniu oscylacji naprężenia – czego nie stwierdzano doświadczalnie, gdy do wyznaczania przewidywań modelowych w hyposprężystym prawie konstytutywnym używano sprężystej pochodnej Zaremby-Jaumanna i stycznej $\underline{\mathcal{L}}$.

7.7 Równanie łącznikowe – łączące opis własności materiałowych i ruchu

Istnieje duża swoboda przy matematycznej specyfikacji prędkościowych równań konstytutywnych opisujących fizyczne zachowanie materiału. Ograniczeniem jest wymóg obiektywności związku konstytutywnego, tj. wymóg aby odpowiedź materiału uzyskana w wyniku zastosowania równań konstytutywnych nie zależała od obserwatora opisującego jego zachowanie. W terminach matematycznych oznacza to wymóg, niezmienniczości związków konstytutywnych względem transformacji $\underline{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{Q}}(t) \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}(t)$, gdzie $\underline{\mathbf{Q}}(t)$ jest zależnym od czasu właściwym tensorem obrotu. Innymi słowy, obiektywność związku konstytutywnego oznacza, że bez względu na to czy dany proces fizyczny opisywany jest za jego pomocą przez obserwatora nieruchomego względem globalnego ustalonego układu laboratoryjnego, czy też przez innego obserwatora, który obraca się względem

układu laboratoryjnego i co więcej stosującego inną skalę czasu, to otrzymany opis przebiegu procesu jest identyczny. Relacje konstytutywne, które są niezmiennicze względem transformacji $\underline{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{Q}}(t)\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}(t)$ nazywa się obiektywnymi. W ogólnym przypadku trudno jest natychmiast stwierdzić czy dany związek konstytutywny jest, czy nie jest obiektywny. Wymaga to szczegółowego badania. Aby taką ocenę ułatwić przyjęło się stosować do formułowania prędkościowych związków konstytutywnych wyrażen obiektywnych. Wyrażenie jest obiektywne, jeśli jest niezmiennicze względem transformacji $\underline{\mathbf{x}}' = \underline{\mathbf{Q}}(t)\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{c}}(t)$. Na przykład pochodne korotacyjne – por. przypis 3 w niniejszym rozdziale, są wyrażeniami obiektywnymi. Jeśli związki konstytutywne są wyrażone poprzez wyrażenia obiektywne to z racji własności obiektywności poszczególnych wyrażen również całe związki konstytutywne są obiektywne i nie trzeba sprawdzać tej ich własności w dodatkowej procedurze.

Sformułowanie obiektywnych prędkościowych związków konstytutywnych, przy pomocy jednych wyrażen obiektywnych, może być bardziej wygodne niż przy pomocy innych. Czynniki decydującymi może być tutaj chęć uzyskania prostoty matematycznej lub możliwość zastosowania pewnych przybliżeń. Właśnie te przyczyny spowodowały, że w niniejszym rozdziale wyrażono obiektywne związki konstytutywne z wykorzystaniem pochodnej sprężystej Zaremy-Jaumanna – por. (7.35).

Chociaż użycie obiektywnych pochodnych miar naprężenia jest dogodne przy formułowaniu konstytutywnych praw zachowania materiału, to ich wykorzystanie w prędkościowych równaniach równowagi mechanicznej nie jest dogodne. Przy formułowaniu tych równań, z wykorzystaniem różnych konfiguracji odniesienia, kluczową rolę odgrywa, niesymetryczny, nieobiektywny tensor nominalnej prędkości naprężenia $\underline{\Pi}^{(*)}$ (ang. nominal rate of stress), jak zostało to wyjaśnione w sposób oryginalny przez Hilla [28]. Równanie równowagi mechanicznej w przypadku quasi-statycznym zapisane na konfiguracji aktualnej w postaci słabej i lokalnej ma postać

$$\oint_{\partial V^t} \underline{\boldsymbol{\sigma}} d\mathbf{a} + \oint_{V^t} \rho \mathbf{b} dv = \mathbf{0}, \quad \text{div } \underline{\boldsymbol{\sigma}}^T + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0}, \quad (7.37)$$

gdzie V^t , ∂V^t oznacza objętość i powierzchnię zamykającą konfigurację aktualną w chwili t zaś $\mathbf{b}(\underline{\mathbf{x}}, t)$ oznacza intensywność sił objętościowych na jednostkę masy wyrażoną w zmiennych przestrzennych. Przy otrzymywaniu postaci lokalnej równań równowagi korzysta się z twierdzenia Gaussa⁴ i zakłada odpowiednią regularność funkcji podcałkowych tak, aby założenia tego twierdzenia były spełnione.

⁴ $\oint_{\partial V^t} \underline{\boldsymbol{\sigma}} d\mathbf{a} = \oint_{V^t} \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\sigma}}^T dv.$

Korzystając ze wzoru na zmianę elementarnej powierzchni $d\mathbf{a}$ w konfiguracji aktualnej na elementarną powierzchnię $d\mathbf{A}$ w konfiguracji początkowej i dokonując zamiany współrzędnych, równania równowagi w konfiguracji początkowej przyjmują następującą postać

$$\oint_{\partial V^0} \underline{\mathbf{N}}^T d\mathbf{A} + \int_{V^0} \rho^0 \underline{\mathbf{b}}_0 dV = \mathbf{0}, \quad \text{Div} \underline{\mathbf{N}} + \rho^0 \underline{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{0}, \quad (7.38)$$

$$\oint_{\partial V^0} \underline{\mathbf{N}}^T d\mathbf{A} = \int_{V^0} \nabla \cdot \underline{\mathbf{N}} dV, \quad \underline{\mathbf{N}} \equiv J \underline{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\boldsymbol{\sigma}}, \quad d\mathbf{a} = J \underline{\mathbf{F}}^{-T} d\mathbf{A},$$

$$\underline{\mathbf{b}}_0(\mathbf{X}, t) = \underline{\mathbf{b}}_0(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \underline{\mathbf{b}}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \underline{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t),$$

gdzie $\underline{\mathbf{N}}$ oznacza niesymetryczny tensor naprężeń nominalnych, zaś $\underline{\mathbf{N}}^T$ I tensor Pioli-Kirchoffa, zgodnie z nomenklaturą Ogdena – por. [47], $\underline{\mathbf{b}}_0(\mathbf{X}, t)$ oznacza intensywność sił objętościowych na jednostkę masy wyrażoną w zmiennych materialnych.

Korzystając z faktu, że konfiguracja początkowa nie zmienia się w czasie, przy obliczaniu poniższych pochodnych materialnych można przejść z różniczkowaniem pod znak całki. Następnie dokonując transformacji do konfiguracji aktualnej otrzymuje się

$$\frac{D}{Dt} \int_{V^0} \nabla \cdot \underline{\mathbf{N}} dV = \int_{V^0} \nabla \cdot \dot{\underline{\mathbf{N}}} dV = \int_{\partial V^0} \dot{\underline{\mathbf{N}}}^T d\mathbf{A} = \int_{\partial V^t} \underline{\boldsymbol{\Pi}}^{(*)T} d\mathbf{a} = \int_{V^t} \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\Pi}}^{(*)} dv, \quad (7.39)$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V^0} \rho^0 \underline{\mathbf{b}}_0 dv = \int_{V^0} \rho^0 \dot{\underline{\mathbf{b}}}_0 dV = \int_{V^t} \rho \underline{\mathbf{b}}^{(*)} dv.$$

w wzorach (7.39) wykorzystano następującą definicję tensora nominalnej prędkości naprężenia $\underline{\boldsymbol{\Pi}}^{(*)}$ i wektora nominalnej prędkości intensywności sił objętościowych

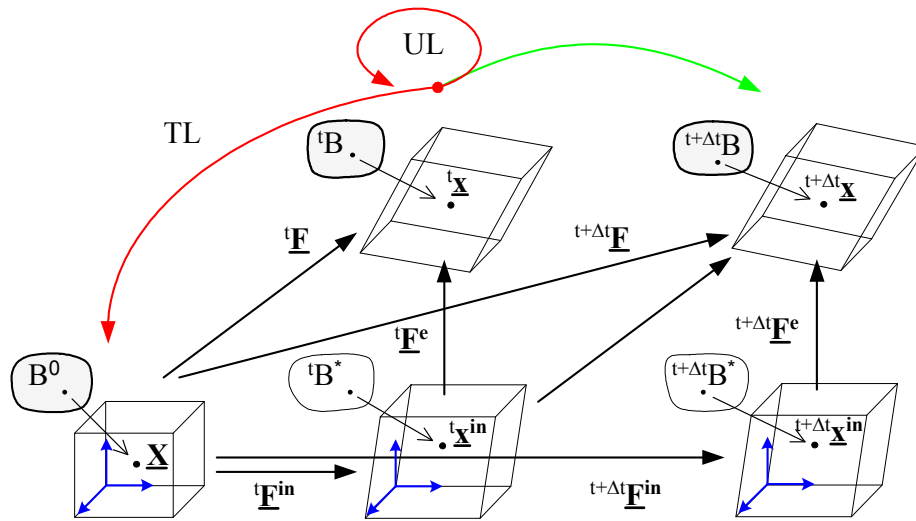
$$\underline{\boldsymbol{\Pi}}^{(*)} \equiv J^{-1} \underline{\mathbf{F}} \dot{\underline{\mathbf{N}}}, \quad \dot{\underline{\mathbf{b}}}_0 = \dot{\underline{\mathbf{b}}}_0(\mathbf{X}, t) = \frac{D}{Dt} \underline{\mathbf{b}}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \frac{\partial \underline{\mathbf{b}}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{\mathbf{b}}}{\partial t} \equiv \underline{\mathbf{b}}^{(*)}. \quad (7.40)$$

Obliczając pochodną materialną (7.38)₁ i wykorzystując zależności (7.39) otrzymuje się następujące postacie prędkościowych równań równowagi mechanicznej dla chwili t

$$\int_{V^t} \nabla \cdot \underline{\boldsymbol{\Pi}}^{(*)} dv + \int_{V^t} \rho \underline{\mathbf{b}}^{(*)} dv = \mathbf{0}, \quad \text{div} \underline{\boldsymbol{\Pi}}^{(*)} + \rho \underline{\mathbf{b}}^{(*)} = \mathbf{0}, \quad (7.41)$$

$$\int_{V^0} \nabla \cdot \dot{\underline{\mathbf{N}}} dV + \int_{V^0} \rho^0 \dot{\underline{\mathbf{b}}}_0 dV = \mathbf{0}, \quad \text{Div} \dot{\underline{\mathbf{N}}} + \rho^0 \dot{\underline{\mathbf{b}}}_0 = \mathbf{0}.$$

W (41)_{1,2} konfiguracja aktualna ($t = t$) została użyta jako konfiguracja odniesienia, zaś w (41)_{3,4} konfiguracja początkowa ($t = 0$) została użyta jako konfiguracja odniesienia. Dwie techniki numeryczne są najczęściej wykorzystywane w mechanice ciała stałego do rozwiązywania problemów nieliniowych, tzw. technika



Rys. 7.2 Schematyczne porównanie techniki całkowitego opisu Lagrange'a – TL i uaktualnianego opisu Lagrange'a – UL.

opisu całkowitego Lagrange'a (TL – od angielskojęzycznej nazwy Total Lagrangian), oraz technika opisu uaktualnianego Lagrange'a (UL – od angielskojęzycznej nazwy Updated Lagrangian), patrz rysunek 7.2. W przypadku techniki opisu całkowitego Lagrange'a (TL) prędkościowe równania równowagi mechanicznej są zapisywane dla kolejnych chwil czasowych przy użyciu całej czasu jednej ustalonej konfiguracji odniesienia. Jest nią konfiguracja początkowa ($t = 0$). W przypadku uaktualnianego opisu Lagrange'a prędkościowe równania równowagi mechanicznej są zapisywane dla kolejnych chwil czasowych przy użyciu kolejnych uaktualnianych konfiguracji odniesienia. Konfiguracją odniesienia jest zawsze ostatnia znana konfiguracja, na której uzyskano stan równowagi mechanicznej, tj. konfiguracja z chwili ($t = t$).

Pod względem metodologicznym obie techniki są identyczne. Punktem startowym w obu przypadkach jest sformułowanie słabej postaci równań równowagi w postaci, tzw. prędkościowej zasady prac wirtualnych. Do jej sformułowania wykorzystuje się warunki brzegowe postawionego problemu oraz równania równowagi mechanicznej w postaci lokalnej. W technice TL jest to równanie (7.41)₄, zaś w technice UL równanie (7.41)₂, po to by otrzymać

$$\oint_{V^t} \underline{\Pi}^{(*)} \cdot (\underline{\nabla} \otimes \underline{\eta}) dv - \oint_{\partial V^t} \underline{t}^* \cdot \underline{\eta} da - \oint_{V^t} \rho \underline{b}^{(*)} \cdot \underline{\eta} dv = \underline{0}, \quad \underline{\Pi}^{(*)}(\underline{\sigma}, \underline{L}), \quad (7.42)$$

$$\oint_{V^0} \underline{\dot{\mathbf{N}}}^T \cdot (\underline{\nabla}_0 \otimes \underline{\boldsymbol{\eta}}_0) dV - \oint_{\partial V^0} \underline{\dot{\mathbf{t}}}_0 \cdot \underline{\boldsymbol{\eta}}_0 d\mathbf{A} - \oint_{V^0} \rho^0 \underline{\mathbf{b}}_0 \cdot \underline{\boldsymbol{\eta}}_0 dV = \mathbf{0},$$

$$\underline{\dot{\mathbf{N}}} = \underline{\dot{\mathbf{N}}}(\underline{\boldsymbol{\sigma}}, \underline{\mathbf{F}}, \underline{\mathbf{L}}) - \text{por. (7.40)}, \quad \underline{\mathbf{t}}^* \equiv J^{-1} \underline{\mathbf{F}} \underline{\dot{\mathbf{t}}}_0, \quad \underline{\mathbf{t}}^* = \underline{\boldsymbol{\Pi}}^{(*)} \underline{\mathbf{n}}^{out},$$

$$J \underline{\boldsymbol{\Pi}}^{(*)T} = \underline{\dot{\mathbf{N}}}^T \underline{\mathbf{F}}^T, \quad \underline{\nabla} \otimes \underline{\boldsymbol{\eta}} = (\underline{\nabla}_0 \otimes \underline{\boldsymbol{\eta}}_0) \underline{\mathbf{F}}^{-T}, \quad \underline{\dot{\mathbf{N}}} = J \underline{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\boldsymbol{\Pi}}^{(*)},$$

gdzie $\underline{\nabla}_0 = \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{\mathbf{e}}_i$ oznacza Lagrangeowski operator nabra, $\underline{\boldsymbol{\eta}}_0$ pole prędkości wirtualnej na konfiguracji początkowej, $\underline{\dot{\mathbf{t}}}_0$ prędkościowe siłowe warunki brzegowe na konfiguracji początkowej, zaś $\underline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underline{\mathbf{e}}_i$ Eulerowski operator nabra, $\underline{\boldsymbol{\eta}}$ pole prędkości wirtualnej na konfiguracji aktualnej, $\underline{\mathbf{t}}^*$ prędkościowe siłowe warunki brzegowe na konfiguracji aktualnej, $\underline{\mathbf{n}}^{out}$ oznacza wersor normalny skierowany na zewnątrz RVE.

Równanie wyrażające prędkościową zasadę prac wirtualnych (7.42)₁ lub (7.42)₂, po jego zlinearyzowaniu wokół stanu równowagi mechanicznej z chwili t , służy do wyznaczenia chwilowego pola prędkości $\underline{\mathbf{v}}(t)$. Nowy stan równowagi i nowa konfiguracja równowagi dla chwili $t + \Delta t$ jest wyznaczana za pomocą tak wyznaczonego chwilowego pola prędkości.

W kategoriach teoretycznych obie wyżej wspomniane techniki są równoważne i prowadzą do tego samego rozwiązania matematycznego, patrz także Bathe [5] sekcja 6.2.3 gdzie szerzej dyskutowane są zalety i wady obu wyżej wspomnianych technik. Jedyna różnica teoretyczna pomiędzy nimi leży w wyborze innych konfiguracji odniesienia.

Wykorzystanie techniki TL jest celowe przede wszystkim w tych sytuacjach, w których konfiguracja początkowa ma sens fizyczny i uzasadnione jest ciągłe odwoływanie się do niej. Taka sytuacja ma miejsce na przykład w przypadku rozważania problemów nieliniowej sprężystości, w którym to przypadku nie naprężona konfiguracja początkowa stanowi konfigurację odniesienia dla wyznaczania odkształceń sprężystych. W problemach gdzie konfiguracja początkowa nie ma tak istotnego znaczenia fizycznego, co ma miejsce w przypadku teorii sprężysto-plastyczności, czy rozwijanego tutaj modelu materiałowego gdzie do określania odkształcenia sprężystego wykorzystywana jest rodzina ruchomych konfiguracji naturalnych, optymalną techniką wydaje się być technika UL.

Bez względu na to czy do rozwiązania problemu nieliniowej mechaniki zostanie zastosowana technika TL czy UL, w przypadku każdej z tych technik istotną rolę pełni tensor nominalnej prędkości naprężenia $\underline{\boldsymbol{\Pi}}^{(*)}$ jak wynika ze wzorów (7.42). Właśnie ten tensor wnosi do równań równowagi mechanicznej informację o zachowaniu materiału. Wymaga to podania związku pomiędzy nieobiektywnym tensorem $\underline{\boldsymbol{\Pi}}^{(*)}$ i pewnym obiektywnym strumieniem naprężenia $\underline{\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}}^{(*)}$ występującym

w prędkościowym materiałowym prawie konstytutywnym $\overset{\circ}{\underline{\sigma}}^{(*)} = \underline{\mathcal{L}}^{(*)} \underline{\mathbf{d}}$. Taka zależność została po raz pierwszy podana przez Hilla, który nazwał ją równaniem łącznikowym „bridging equation”. Równanie łącznikowe wiąże opis własności materiałowych ciała z opisem jego ruchu. Związek taki zostanie wyprowadzony tutaj w nieco inny sposób niż zrobił to Hill. Obliczając pochodną materialną tensora naprężeń nominalnych otrzymuje się – por. (7.38)₄

$$\underline{\dot{\mathbf{N}}} = J \underline{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\dot{\underline{\sigma}}} + J \dot{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} \underline{\sigma} + J \underline{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\dot{\underline{\sigma}}}. \quad (7.43)$$

Mnożąc następnie lewą i prawą stronę przez $J^{-1} \underline{\mathbf{F}}$ i wykorzystując zależności

$$\underline{\dot{J}} = J \operatorname{tr}(\underline{\mathbf{d}}), \quad (\dot{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} = -\underline{\mathbf{F}}^{-1} \underline{\mathbf{L}}) \Leftrightarrow \left(\frac{D}{Dt} (\underline{\mathbf{F}} \underline{\mathbf{F}}^{-1}) = \frac{D}{Dt} (\underline{\mathbf{I}}) = \underline{\mathbf{0}} \right), \quad (7.44)$$

otrzymuje się,

$$\underline{\Pi}^{(*)} = \underline{\dot{\underline{\sigma}}} + \underline{\sigma} \operatorname{tr}(\underline{\mathbf{d}}) - \underline{\mathbf{L}} \underline{\sigma}, \quad \underline{\dot{\mathbf{N}}} = J \underline{\mathbf{F}}^{-1} (\underline{\dot{\underline{\sigma}}} + \underline{\sigma} \operatorname{tr}(\underline{\mathbf{d}}) - \underline{\mathbf{L}} \underline{\sigma}). \quad (7.45)$$

Wykorzystując pochodną Jaumanna tensora naprężenia Cauchego jest

$$\underline{\Pi}^{(*)}(\underline{\sigma}, \underline{\mathbf{L}}) = \overset{\circ}{\underline{\sigma}}^{(J)} + \underline{\sigma} \operatorname{tr}(\underline{\mathbf{d}}) - \underline{\mathbf{d}} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{\omega}. \quad (7.46)$$

Właśnie taką postać równania łącznikowego podał Hill – por. wzór (1.91) w [28]. W równaniu łącznikowym można naturalnie użyć jakiegokolwiek innego obiektywnego strumienia naprężenia, jeśli jest to korzystne z punktu widzenia formułowania prawa materiałowego. W rozważanym tutaj przypadku wygodnie jest wyrazić $\underline{\Pi}^{(*)}$ przez pochodną Jaumanna tensora Kirchoffa odniesioną do konfiguracji aktualnej $\overset{\circ}{\underline{\sigma}}^{(0)}$

$$\underline{\Pi}^{(*)}(\underline{\sigma}, \underline{\mathbf{L}}) = \overset{\circ}{\underline{\sigma}}^{(0)} - \underline{\mathbf{d}} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{\omega}, \quad (7.47)$$

$$\overset{\circ}{\underline{\sigma}}^{(0)} \equiv [\underline{\dot{\underline{\sigma}}} + \underline{\sigma} \underline{\omega} - \underline{\omega} \underline{\sigma} + \underline{\sigma} \operatorname{tr}(\underline{\mathbf{d}})] = J^{-1} \overset{\circ}{\underline{\tau}}^{(J)}, \quad J^{-1} \overset{\circ}{\underline{\tau}}^{(J)} = J^{-1} \overset{\circ}{\underline{\tau}}^{(Je)} + [\underline{\sigma} \underline{\omega}^{in} - \underline{\omega}^{in} \underline{\sigma}].$$

Ostatecznie, korzystając ze wzorów (7.33), (7.28)₃, (7.29)₁, (7.3)₁ otrzymuje się następujący materiałowy związek konstytutywny, wyrażony w postaci dogodnej dla rozwiązywania prędkościowego problemu brzegowo początkowego techniką uaktualnianego opisu Lagrange'a

$$\underline{\Pi}^{(*)}(\underline{\sigma}, \underline{\mathbf{L}}, \dot{T}) = \underline{\mathcal{L}}^{(Je)}(\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{d}}^{in}) - \underline{\mathcal{L}} \alpha_0 \dot{T} + \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial z} \dot{z} - \underline{\mathbf{d}} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{\omega} + \underline{\sigma} \underline{\omega}^{in} - \underline{\omega}^{in} \underline{\sigma}, \quad (7.48)$$

$$\overset{\circ}{\underline{\sigma}}^{(0)}(\underline{\mathbf{d}}, \dot{T}) = \underline{\mathcal{L}}^{(Je)}(\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{d}}^{in}) - \underline{\mathcal{L}} \alpha_0 \dot{T} + \frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial z} \dot{z} + \underline{\sigma} \underline{\omega}^{in} - \underline{\omega}^{in} \underline{\sigma}.$$

Warto porównać w tym miejscu zalety wynikające z zastosowania opisu ruchomych naturalnych konfiguracji odniesienia (Mandela), w połączeniu z techniką uaktualnianego opisu Lagrange'a, w porównaniu do uaktualnianego całkowitego opisu Lagrange'a stosowanego przez Hilla i Rice'a [27]

$$\overset{\circ}{\underline{\sigma}}^{(0)} = \underline{\mathcal{L}}^{(Je)}[\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{d}}^{(0)in}] - \underline{\mathcal{L}} \alpha_0 \dot{T}, \quad (7.49)$$

$$\mathbf{d}^{(0)\text{in}} = \mathbf{d}^{\text{in}} - \underline{\mathcal{L}}^{(Je)} \left[\frac{\partial \underline{\sigma}}{\partial z} \dot{z} + \underline{\sigma} \underline{\omega}^{\text{in}} - \underline{\omega}^{\text{in}} \underline{\sigma} \right] \quad (\text{Mandel}),$$

$$\underline{\sigma}^{(0)} = \underline{\mathcal{L}}^{(\text{H-R})} [\mathbf{d} - \mathbf{d}^{(\text{H-R})\text{in}}] - \underline{\mathcal{L}} \underline{\alpha}_0 \dot{T} \quad (\text{Hill-Rice}).$$

W przypadku zastosowania opisu ruchomych konfiguracji naturalnych, w klarowny operacyjny sposób, ujawniona została struktura niesprężystej prędkości deformacji $\mathbf{d}^{(0)\text{in}}$ co w zasadniczy sposób ułatwia stawianie postulatów odnośnie jej jawnej postaci.

7.8 Dyssypacja pracy

Moc właściwa pracy całkowitej \dot{w} i moc pracy odwracalnej \dot{w}_0 wykonywanej nad makroelementem SMA, w opisie Eulerowskim mogą być wyrażone następującymi wzorami

$$\dot{w} = \text{tr}(\underline{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{d}) / \rho^0 \quad [J / kg], \quad \dot{w}_0 = \text{tr}(\underline{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{d}^e) / \rho^0 - \pi_1 \dot{z}. \quad (7.50)$$

Wzór (7.50)₂ wynika ze wzoru (7.23)₃ i (7.11). Zgodnie z koncepcjami termodynamiki procesów nierównowagowych moc właściwa, na jednostkę masy, dyssypacji pracy mechanicznej \dot{w}_{Disp} stanowi różnicę pomiędzy $\dot{w} - \dot{w}_0$ – por. także (7.3)₁

$$\dot{w}_{\text{Disp}} = \text{tr}(\underline{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{d}^{\text{in}}) / \rho^0 + \pi_1 \dot{z} \geq 0. \quad (7.51)$$

Zgodnie z II zasadą termodynamiki dyssypacja pracy mechanicznej w dowolnym procesie termodynamicznym musi być większa od zera lub równa zero. Jej wielkość jest określona poprzez związki pomiędzy odpowiednimi siłami i strumieniami termodynamicznymi $\underline{\boldsymbol{\tau}} \leftrightarrow \mathbf{d}^{\text{in}}$, $\pi_1 \leftrightarrow \dot{z}$. Jednocześnie ta sama zasada wskazuje, że takie związki w ogóle istnieją. Należy zwrócić uwagę, iż II zasada termodynamiki nie narzuca żadnych ograniczeń na spin $\underline{\omega}^{\text{in}}$ – por. (7.4)₃.

7.9 Specjalny liniowy sprężyste model pseudosprężystości stopów z pamięcią kształtu

W poprzednich sekcjach podano bardzo ogólną strukturę równań makroskopowej termodynamicznej teorii pseudosprężystości stopów z pamięcią kształtu. W niniejszej sekcji są proponowane, w jawnej postaci w opisie Eulerowskim, następujące elementy szczególnego liniowego sprężyste modelu SMA,

- potencjał energii swobodnej – $\phi(\mathbf{e}^e, T, z)$,
- Eulerowska reprezentacja spinu niesprężystego – $\underline{\omega}^{\text{in}}$,
- formalne równanie płynięcia pseudosprężystego – \mathbf{d}^{in} ,
- formalne równania kinetyki przemiany fazowej zapisane w postaci właściwej dla formalizmu skończonych deformacji.

W ten sposób wyspecyfikowany zostanie model konstytutywny stopów z pamięcią kształtu liniowy sprężyste, w mierze logarytmicznej. Model ten stanowi rozszerzenie modelu R_L omówionego w sekcji 3.3 na zakres skończonych deformacji.

7.9.1 Funkcja energii swobodnej

Potencjał energii swobodnej właściwej, na jednostkę masy, dwufazowego makroelementu stopu z pamięcią kształtu (RVE), pozostającego w stanie „ograniczonej równowagi fazowej” i ulegającego skończonym deformacjom, postulowany jest w opisie ruchomych naturalnych konfiguracji odniesienia w następującej postaci

$$\phi(\underline{\mathbf{E}}^e(0), T, z) = \phi^0(T) + \phi^{tm}(\underline{\mathbf{E}}^e(0), T) + \phi^{int}(T, z), \quad (7.52)$$

$$\phi^0(T) = u_0^{*(1)} - T s_0^{*(1)} - z \pi_0^f(T) + c_v [(T - T_0) - T \ln(T/T_0)],$$

$$\phi^{tm}(\underline{\mathbf{E}}^e(0), T) = \underline{\mathbf{E}}^e(0) \cdot \underline{\mathcal{L}}^E \underline{\mathbf{E}}^e(0) / 2 - (T - T_0) \underline{\alpha}_0 \cdot \underline{\mathcal{L}}^E \underline{\mathbf{E}}^e(0),$$

$$\phi^{int}(T, z) = \phi_{it}(T)(1 - z)z, \quad \phi_{it}(T) = \bar{u}_0 - T \bar{s}_0,$$

$$\pi_0^f(T) = \Delta u^* - T \Delta s^*, \quad \Delta u^* = u_0^{*(1)} - u_0^{*(2)}, \quad \Delta s^* = s_0^{*(1)} - s_0^{*(2)}.$$

Człony $\phi^0(T)$ i $\phi^{tm}(\underline{\mathbf{E}}^e(0), T)$ oznaczają termiczną i termosprężystą część energii swobodnej makroelementu SMA, zaś $\phi^{int}(T, z)$ oznacza tzw. energię oddziaływań wewnętrznych, $u_0^{*(\alpha)}, s_0^{*(\alpha)}$ $\alpha = 1, 2$ oznaczają właściwą energię wewnętrzną i entropię formowania się fazy austenicznej ($\alpha = 1$) i martenzytycznej ($\alpha = 2$), w termodynamicznym stanie odniesienia, tj. w stanie bez naprężeniowym – $\underline{\sigma} = 0$, w termodynamicznej temperaturze odniesienia $T = T_0$, z oznacza udział masowy fazy martenzytycznej, człon $\pi_0^f(T)$ oznacza, tzw. „chemiczną siłę napędową przemiany fazowej”, $c_v = const$ pojemność cieplną przy ustalonym odkształceniu, $\underline{\mathcal{L}}^E$ izotropowy tensor energetycznych modułów sprężystości ($\underline{\mathcal{L}}^E_{ijkl} = \underline{\mathcal{L}}_{ijkl} / \rho = [\mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl}] / \rho = const$, $\lambda = (K - 2\mu/3)$) przyjmowany jest jako stały, $\underline{\alpha}_0 = \alpha_0 \mathbf{I}$ oznacza izotropowy tensor rozszerzalności termicznej ($(\alpha_0)_{ij} = \alpha_0 \delta_{ij}$), \bar{u}_0, \bar{s}_0 stałe materiałowe charakteryzujące energię oddziaływań wewnętrznych.

Powyższa jawna postać funkcji energii swobodnej odpowiada, tej postulowanej przez Ranieckiego i Lexcelenta dla małych deformacji, patrz także Raniecki, Lexcelent [62], [63], [65], Müller, Xu [1991]. Przy czym, tutaj przy specyfikacji potencjału energii swobodnej występuje jawnie odkształcenie sprężyste, podczas gdy Raniecki i Lexcelent wyrazili ten potencjał za pomocą odkształcenia całkowitego i odkształcenia fazowego. Po skorzystaniu z addytywnego rozkładu

tensora odkształcenia całkowitego na część sprężystą i niesprężystą obowiązującego w teorii małych deformacji potencjał Ranieckiego i LExcellent przyjmuje formalną matematyczną postać identyczną do podanej tutaj wzorem (7.52).

Aby uzyskać postać potencjału energii swobodnej w opisie Eulerowskim wystarczy zastąpić Lagrangeowską miarę odkształcenia sprężystego $\underline{\mathbf{E}}^e(0)$ przez jej odpowiednik Eulerowski $\underline{\mathbf{e}}^e(0)$.

Relacje odwrotne odkształcenie – naprężenie odpowiadające relacjom naprężenie – odkształcenie, wynikającym z zaproponowanej postaci potencjału energii swobodnej (7.52), można łatwo otrzymać poprzez formalne zróżniczkowanie potencjału Gibbsa. Potencjał Gibbsa na konfiguracji naturalnej i aktualnej odpowiednio można uzyskać w klasyczny sposób za pomocą transformacji Legendre'a $g(\underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}}, T, z) \equiv \phi - (1/\rho^0)\underline{\mathbf{T}}^{\text{Re}} \underline{\mathbf{E}}^e(0)$, $g(\underline{\boldsymbol{\tau}}, T, z) \equiv \phi - (1/\rho^0)\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{e}}^e(0)$ [J/kg].

Zgodnie z formalizmem termodynamiki równania stanu, wynikające z potencjału ϕ (7.52) w opisie Eulerowskim, stanowiące jawną specyfikację równań (7.25), przyjmują postać

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\rho}{\rho^0} \underline{\boldsymbol{\tau}} = \underline{\mathcal{L}}[\underline{\mathbf{e}}^e(0) - \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0(T - T_0)], \quad \underline{\mathcal{L}} = \rho \underline{\mathcal{L}}^E, \quad (7.53)$$

$$s = c_v \ln(T/T_0) + s_0^{*(1)} - z\Delta s^* + \bar{s}_0(1-z)z + \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 \cdot \underline{\mathcal{L}} \underline{\mathbf{e}}^e(0) / \rho,$$

$$\pi_1 = \pi_0^f(T) - (1-2z)\phi_{it}(T).$$

7.9.2 Tensor spinu niesprężystego $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{in}$

Rozwijany tutaj model konstytutywny jest z założenia modelem izotropowym. Z tego powodu brak jest przesłanek natury fizycznej wskazujących na to, że wybór danej konkretnej orientacji rodziny naturalnych konfiguracji odniesienia byłby z fizycznego punktu widzenia bardziej korzystny niż innej. W istocie z konstytutywnego punktu widzenia jest on całkiem dowolny. Jednakże wybór takiej konkretnej orientacji ma duże znaczenie z pragmatycznego punktu widzenia. Mianowicie, dokonanie „właściwego” wyboru orientacji rodziny konfiguracji naturalnych prowadzi do prostoty wzorów matematycznych i w konsekwencji do większej efektywności numerycznej modelu przy tych samych przewidywaniach fizycznych. Taką prostotę matematyczną zapewnia przyjęcie założenia, że spin niesprężysty $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{in}$ jest tożsamościowo równy zeru w trakcie dowolnego procesu deformacji

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^{in} = \underline{\mathbf{0}}, \quad \underline{\boldsymbol{\omega}}^e = \underline{\boldsymbol{\omega}}, \quad \underline{\boldsymbol{\tau}}^{\circ(Je)} = \underline{\boldsymbol{\tau}}^{\circ(J)}. \quad (7.54)$$

Wtedy pochodna sprężysta Jaumanna zdefiniowana spinem $\underline{\boldsymbol{\omega}}^e$ staje się tożsamościowo równa pochodnej Jaumanna zdefiniowanej spinem $\underline{\boldsymbol{\omega}}$ – por. (4)₁, co prowadzi do znacznych uproszczeń matematycznych modelu bez utraty jego

ogólności. Wybór innej niż (7.54) rodziny konfiguracji naturalnych powoduje konieczność ciągłego śledzenia spinu $\underline{\omega}^{in}$, po to by móc wyznaczyć spin $\underline{\omega}^e = \underline{\omega} - \underline{\omega}^{in}$. Naturalnie warunek (7.54) usuwa niejednoznaczność w multiplikatywnym rozkładzie całkowitego gradientu deformacji na część sprężystą i niesprężystą – por. (7.1). Warunek ten w istocie prowadzi do wyboru izoklinicznej rodziny konfiguracji naturalnych, o jakiej była mowa poniżej wzoru (7.1). Dowód tego ostatniego twierdzenia znajduje się w Aneksie 7.4. Koncepcja konfiguracji izoklinicznych pozwala na harmonijne włączenie do makroskopowego modelu konstytutywnego pewnych elementów mikrostrukturalnych, takich jak ewolucja tekstury, czy efekt anizotropii indukowanej dużymi odkształceniami. Elementy takie można włączyć do prezentowanego tutaj modelu stopów z pamięcią kształtu, gdy zajdzie tego potrzeba, a przede wszystkim wtedy gdy będą dostępne wiarygodne dane doświadczalne dotyczące, na przykład ewolucji mikrostruktury. Dane takie muszą pozwalać na sformułowanie równania analogicznego do (7.54) przy czym wtedy będzie to już równanie konstytutywne.

7.9.3 Tensor prędkości odkształceń fazowych w opisie Eulerowskim \underline{d}^{in}

Wyniki eksperymentalne dla stopu NiTi, poddawanego wieloosiowym obciążeniom proporcjonalnym, przedstawione i przedyskutowane w rozdziale 5 wskazują, że z dobrym przybliżeniem modelowym makroskopowy tensor odkształceń fazowych, opisujący niesprężyste efekty odkształceniowe związane z przemianą fazową, można wyrazić za pomocą izotropowej funkcji naprężenia makroskopowego. Pokazane w rozdziale 5 na rysunku 5.4 wykresy wskazują, że z dobrym przybliżeniem stosunki składowych makroskopowego odkształcenia fazowego pozostawały stałe, w odpowiedzi na utrzymywanie stałości takich stosunków składowych wymuszającego naprężenia. Można zatem pośrednio wnioskować, że kierunki główne tensora makroskopowego odkształcenia fazowego pozostawały z dobrym przybliżeniem stałe, gdy stałe pozostawały kierunki główne wymuszającego naprężenia. Próby przeprowadzone przez Roguedę [71] na stopie CuZnAl, przez Bouveta i innych na stopie CuAlBe [7] – rysunki 17,18,19, patrz także Bouvet i inni [8], Helma i Haupta na stopie NiTi [25] – rysunki 7,8 dla nieproporcjonalnych ścieżek obciążenia wskazują, iż stosunki składowych makroskopowego odkształcenia fazowego podążały za stosunkami składowych wymuszającego naprężenia makroskopowego. Wyniki te stanowią co najmniej jakościowe potwierdzenie koncepcji przyjętej przez Ranieckiego i Lexcellenta „optymalnego dostosowywania się mikrostruktury stopu SMA” do zmieniającego się obciążenia zewnętrznego. Stanowią one także ważną przesłankę potwierdzającą akceptowalność przyjęcia hipotezy, że makroskopowy tensor odkształceń fazowych może być z dobrym przybliżeniem wyrażony za pomocą izotropowej funkcji naprężenia makroskopowego. Koncepcja „optymalnego dostosowywania się

mikrostruktury stopu SMA”, łącznie z rozważaniami dotyczącymi warunków termodynamicznej równowagi mikrostrukturalnej, doprowadziła Ranieckiego i innych do wniosku, że istnieje potencjał generujący makroskopowy tensor fazowych odkształceń własnych \mathbf{k} . Potencjał g^{Ra} , generujący tensor odkształceń fazowych \mathbf{k} , w dalszym ciągu będzie nazywany potencjałem Ranieckiego. Z rozważań termodynamicznych wynika, że wygodnie jest postulować jego postać jako funkcję jednorodną stopnia pierwszego względem naprężenia – por. (3.9). Zgodnie z tą przesłanką jawna postać tego potencjału została zaproponowana w postaci (3.32). Dalsze dotychczas nie opublikowane analizy teoretyczne (Raniecki rozmowy prywatne) wskazały, iż potencjał g^{Ra} odgrywa niezwykle ważną rolę, nie tylko przy modelowaniu dyskutowanego tutaj pseudosprężystego zachowania stopów z pamięcią kształtu, ale również jednokierunkowego efektu pamięci kształtu. Gdyż, potencjał ten stanowi energetyczną miarę mikrostrukturalnych oddziaływań fazowych.

W związku z przywołanymi powyżej przesłankami natury doświadczalnej i teoretycznej, przy budowie modelu zachowania stopów SMA w zakresie skończonych deformacji zdecydowano się na przyjęcie koncepcji optymalnego dostosowywania się mikrostruktury stopu SMA z wszystkimi wynikającymi z tego postulatu konsekwencjami. W szczególności przyjmuje się postulat, iż potencjał odkształceniowych efektów fazowych w opisie Eulerowskim, ma identyczną jawną postać jak w przypadku modelu R_L – por. (3.32), tj.

$$\rho g^{Ra}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \eta f(y) \boldsymbol{\sigma}', \quad \rho^0 g^{Ra}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) = \mathbf{k} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}} = \eta f(y) \boldsymbol{\tau}'. \quad (7.55)$$

Potencjał Ranieckiego (7.55) generuje tensor makroskopowych odkształceń fazowych \mathbf{k}

$$\mathbf{k} \equiv \rho \partial g^{Ra}(\boldsymbol{\sigma}) / \partial \boldsymbol{\sigma} = \rho^0 \partial g^{Ra}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) / \partial \bar{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\mathbf{k}} + \bar{\bar{\mathbf{k}}}, \quad (7.56)$$

$$\bar{\mathbf{k}} = \eta f(y) \mathbf{n}_\sigma, \quad \bar{\bar{\mathbf{k}}} = \sqrt{6} \eta \boldsymbol{\tau}' \frac{df(y)}{dy} \frac{dy}{d\bar{\boldsymbol{\tau}}} = 3 \eta (df(y)/dy) [\sqrt{6}(\mathbf{n}_\sigma^2 - (1/3)\mathbf{1}) - y \mathbf{n}_\sigma],$$

gdzie \mathbf{n}_σ oznacza wektor „kierunkowy” tensora naprężenia Cauchego i jednocześnie Kirchhoffa

$$\mathbf{n}_\sigma \equiv \bar{\boldsymbol{\sigma}} / \boldsymbol{\sigma}' = \bar{\boldsymbol{\tau}} / \boldsymbol{\tau}', \quad \mathbf{n}_\sigma \cdot \mathbf{n}_\sigma = \mathbf{1}, \quad y \equiv \sqrt{6} \text{tr}(\mathbf{n}_\sigma^3), \quad (7.57)$$

$$\boldsymbol{\sigma}' = (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \bar{\boldsymbol{\sigma}})^{1/2}, \quad \boldsymbol{\tau}' = (\bar{\boldsymbol{\tau}} \cdot \bar{\boldsymbol{\tau}})^{1/2}, \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\boldsymbol{\tau}} = \text{dev}(\boldsymbol{\tau}).$$

Z uwagi na własność izotropii potencjału $g^{Ra}(\boldsymbol{\sigma})$, można ten potencjał i tensor odkształceń fazowych \mathbf{k} natychmiast wyrazić na konfiguracji naturalnej następująco

$$\rho^0 g^{ph}(\bar{\mathbf{T}}^{\text{Re}}) = \bar{\mathbf{T}}^{\text{Re}} \cdot \mathbf{K}^* = \eta f(y) (\bar{\mathbf{T}}^{\text{Re}})', \quad \mathbf{K}^* \equiv \rho^0 \partial g^{ph}(\bar{\mathbf{T}}^{\text{Re}}) / \partial \bar{\mathbf{T}}^{\text{Re}}, \quad (7.58)$$

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{R}^e \mathbf{k} \mathbf{R}^e, \quad \mathbf{K}^* \cdot \bar{\mathbf{T}}^{\text{Re}} = \bar{\mathbf{T}}^{\text{Re}} \cdot \mathbf{K}^*,$$

$$(T^{Re})' = (\bar{\mathbf{T}}^{Re} \cdot \bar{\mathbf{T}}^{Re})^{1/2}, \quad \mathbf{N}_T \equiv \bar{\mathbf{T}}^{Re} / (T^{Re})', \quad y = \sqrt{6} \operatorname{tr}(\mathbf{N}_T^3), \quad \bar{\mathbf{T}}^{Re} = \operatorname{dev}(\mathbf{T}^{Re}).$$

Własność izotropii potencjału $g^{Ra}(\boldsymbol{\sigma})$ względem tensora naprężenia prowadzi do kolinearności tensora odkształceń fazowych \mathbf{k} z tensorem Kirchoffa $\boldsymbol{\tau}$ – por. (7.56). Z tego też powodu spełnione są tożsamościowo dla dowolnego tensora spinu $\boldsymbol{\omega}^*$ relacje poniżej – co można łatwo wykazać przez obliczenie wprost

$$\mathbf{k} \cdot [\boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega}^* \boldsymbol{\tau}] = 0, \quad \boldsymbol{\tau} \cdot [\mathbf{k} \boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{k}] = 0, \quad \mathbf{k} \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \mathbf{k}. \quad (7.59)$$

Ponieważ zależność funkcyjna $\mathbf{k} = \mathbf{k}(\boldsymbol{\tau})$ jest izotropową funkcją tensorową więc prawdziwa jest dla każdego spinu $\boldsymbol{\omega}^*$ ($\boldsymbol{\omega}^{*T} = -\boldsymbol{\omega}^*$) znana z teorii izotropowych funkcji tensorowych argumentu tensorowego relacja

$$(\partial \mathbf{k} / \partial \boldsymbol{\tau}) [\boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega}^* \boldsymbol{\tau}] = [\mathbf{k} \boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{k}]. \quad (7.60)$$

Istotnie dla każdej izotropowej funkcji tensorowej jest

$$\overline{\mathbf{Q} \mathbf{k}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{Q}^T} = \overline{\mathbf{k}(\mathbf{Q} \boldsymbol{\tau} \mathbf{Q}^T)}, \quad (7.61)$$

zatem

$$\mathbf{Q} [\mathbf{k} + \mathbf{k} \boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega}^* \mathbf{k}] \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q} (\partial \mathbf{k} / \partial \boldsymbol{\tau}) \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} [\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \boldsymbol{\omega}^* - \boldsymbol{\omega}^* \boldsymbol{\tau}] \mathbf{Q}^T, \quad \boldsymbol{\omega}^* = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T. \quad (7.62)$$

Powyższa zależność obowiązuje dla dowolnego spinu $\boldsymbol{\omega}^*$ i dla dowolnego $\dot{\boldsymbol{\tau}}$. Podstawiając $\dot{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{0}$ otrzymuje się zależność (7.60).

Wygodnie jest wprowadzić następujące oznaczenie pochodnej $\partial \mathbf{k} / \partial \boldsymbol{\tau}$

$$\underline{\rho} \equiv \rho^0 \frac{\partial^2 g^{Ra}(\boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \boldsymbol{\tau}} = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \boldsymbol{\tau}}, \quad \underline{\rho} \equiv \rho \frac{\partial^2 g^{Ra}(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma} \partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}. \quad (7.63)$$

Jawna postać tensora 4 rzędu $\underline{\rho}$ w przypadku potencjału Ranieckiego $g^{Ra}(\boldsymbol{\sigma})$ podana jest poniżej

$$\begin{aligned} \underline{\rho}(\boldsymbol{\sigma}) = \underline{\rho}(\boldsymbol{\tau}) = & [\eta \frac{df(y)}{dy} - 3\eta \frac{df(y)}{dy}] \frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \mathbf{n}_\sigma + [\eta f(y) - 3\eta y \frac{df(y)}{dy}] \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \\ & + [\eta \sigma' \frac{d^2 f(y)}{dy^2}] \frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + 3\sqrt{6}\eta y \frac{df(y)}{dy} \frac{\partial (\mathbf{n}^2)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \end{aligned} \quad (7.64)$$

$$\partial y / \partial \boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{\sigma} [\sqrt{6}(\mathbf{n}_\sigma^2 - \frac{1}{3} \mathbf{I}) - y \mathbf{n}_\sigma], \quad \partial \mathbf{n}_\sigma / \partial \boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\sigma} [(\mathbf{I}^{(4)} - \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) - \frac{\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma}}{(\sigma')^2}].$$

Postulowana postać potencjału $g^{Ra}(\boldsymbol{\sigma})$ jest funkcją jednorodną stopnia pierwszego względem $\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\sigma}$), więc zależność funkcyjna $\mathbf{k}(\boldsymbol{\tau})$ – por. (7.56) jest funkcją izotropową, jednorodną stopnia zerowego względem $\boldsymbol{\tau}$. W konsekwencji tensor $\underline{\rho}$ ma cenną własność

$$\underline{\rho} \boldsymbol{\tau} = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \boldsymbol{\tau}} \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}, \quad \underline{\rho} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (7.65)$$

co można stwierdzić poprzez bezpośrednie wyliczenie, patrz także (3.9).

Jak wynika ze wzoru (7.62) dowolną pochodną korotacyjną tensora $\underline{\mathbf{k}}$ można wyrazić za pomocą odpowiadającej jej pochodnej korotacyjnej tensora naprężenia Kirchoffa następująco wykorzystując oznaczenie (7.63)

$$\overset{\circ}{\underline{\mathbf{k}}}^{(*)} = \dot{\underline{\mathbf{k}}} + \underline{\mathbf{k}}\underline{\boldsymbol{\omega}}^* - \underline{\boldsymbol{\omega}}^*\underline{\mathbf{k}} = \underline{\rho}\overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{(*)}, \quad \overset{\circ}{\underline{\mathbf{k}}}^{(*)} = \underline{\rho}\overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(*)}, \quad (7.66)$$

W przypadku proponowanego tutaj liniowego sprężystości modelu SMA

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^c} = -\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial z} = \underline{\mathbf{0}}. \quad (7.67)$$

Zatem prędkościowe mechaniczne równanie stanu (7.33)₁ upraszcza się do postaci

$$\overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{(Je)} = \rho^0 [\underline{\mathcal{L}}^{E(Je)}(\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{d}}^{in}) - \underline{\mathcal{L}}^E \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 \dot{T}], \quad \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\sigma}}}^{(0)} = \underline{\mathcal{L}}^{(Je)}(\underline{\mathbf{d}} - \underline{\mathbf{d}}^{in}) - \underline{\mathcal{L}} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 \dot{T}, \quad (7.68)$$

przy czym powyżej skorzystano z własności $\underline{\mathcal{L}} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \underline{\mathcal{L}}^{(Je)} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0$ – patrz (A7.39).

Powyższe równanie wymaga specyfikacji tensora prędkości deformacji niesprężystych $\underline{\mathbf{d}}^{in}$. Formalne prawo płynięcia pseudosprężystego określające tensor prędkości odkształceń niesprężystych postulowane jest niniejszym w następującej postaci

$$\underline{\mathbf{d}}^{in} = \overset{\circ}{z} \underline{\mathbf{k}}^{(Je)} = \dot{z} \underline{\mathbf{k}} + z \underline{\mathbf{k}}^{(Je)}. \quad (7.69)$$

Pochodną sprężystą Zaremby-Jaumanna tensora $\underline{\mathbf{k}}$ można wyrazić za pomocą pochodnej sprężystej tensora naprężenia Kirchoffa następująco – jak wynika z (7.66)

$$\underline{\mathbf{k}}^{(Je)} = \underline{\rho} \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{(Je)}. \quad (7.70)$$

Podstawiając w (7.68)₁ zależności (7.69) i (7.70) jest

$$\overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{(Je)} = \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\mathcal{L}}^{(Je)} [\underline{\mathbf{d}} - \dot{z} \underline{\mathbf{k}} - \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 \dot{T}] - z \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\mathcal{L}}^{(Je)} \underline{\rho} \overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{(Je)}. \quad (7.71)$$

Grupując człony z pochodną korotacyjną naprężenia otrzymuje się

$$\overset{\circ}{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{(Je)} = \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\mathcal{L}}^{S(Je)} [\underline{\mathbf{d}} - \dot{z} \underline{\mathbf{k}} - \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 \dot{T}]. \quad (7.72)$$

Przydatnym okaże, się wprowadzenie następujących definicji

$$\frac{\rho^0}{\rho} \underline{\mathcal{L}}^{S(Je)} \equiv [\underline{\mathbf{I}}^{(4)} + z \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\mathcal{L}}^{(Je)} \underline{\rho}]^{-1} \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\mathcal{L}}^{(Je)}, \quad \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\mathcal{L}}^S \equiv [\underline{\mathbf{I}}^{(4)} + z \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\mathcal{L}} \underline{\rho}]^{-1} \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\mathcal{L}}. \quad (7.73)$$

Wykorzystując wzór matematyczny $[\underline{\mathbf{A}}^{-1} \underline{\mathbf{B}}]^{-1} = \underline{\mathbf{B}}^{-1} \underline{\mathbf{A}}$ można pokazać, że

$$\underline{\mathcal{L}}^{S(Je)} = [\underline{\mathcal{M}}^{(Je)} + z \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\rho}]^{-1}, \quad \underline{\mathcal{L}}^S = [\underline{\mathcal{M}} + z \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\rho}]^{-1}, \quad (7.74)$$

$$\underline{\mathcal{M}}^{(Je)} = [\underline{\mathcal{L}}^{(Je)}]^{-1}, \quad \underline{\mathcal{M}} = \underline{\mathcal{L}}^{-1}.$$

Korzystając ponownie z własności (A7.39) – $\underline{\mathcal{L}}^{S(Je)} \underline{\alpha}_0 = \underline{\mathcal{L}}^S \underline{\alpha}_0 = \underline{\mathcal{L}} \underline{\alpha}_0$, oraz wykorzystując zależności (7.54), otrzymuje się pożądaną prędkościową postać mechanicznych równań stanu

$$\underline{\sigma}^{\circ(0)} = \frac{\rho}{\rho^0} \underline{\tau}^{\circ(J)} = \frac{\rho}{\rho^0} \underline{\tau}^{\circ(Je)} = \underline{\mathcal{L}}^{S(Je)} [\underline{\mathbf{d}} - \dot{z} \underline{\mathbf{k}}] - \underline{\mathcal{L}} \underline{\alpha}_0 \dot{T}. \quad (7.75)$$

Prędkościowe równanie stanu zmiany entropii przyjmuje w przypadku proponowanego modelu postać

$$\dot{s} = (c_p / T) \dot{T} + [-\Delta s^* + \bar{s}_0(1 - 2z)] \dot{z} + \underline{\alpha}_0 \cdot \dot{\underline{\tau}} / \rho_0, \quad (7.76)$$

patrz także (7.33)₂.

7.9.4 Efekty cieplne i dyssypacja pracy mechanicznej

Zweźając (7.69) przez $\underline{\tau}$ i korzystając z własności (7.65) otrzymuje się

$$\underline{\tau} \cdot \underline{\mathbf{d}}^{in} = \dot{z} \underline{\tau} \cdot \underline{\mathbf{k}} + z \underline{\tau} \cdot \underline{\mathbf{k}}^{\circ(Je)} = \dot{z} \underline{\tau} \cdot \underline{\mathbf{k}} + \underbrace{\underline{\tau} \cdot \underline{\rho} \underline{\tau}^{\circ(Je)}}_{=0} = \dot{z} \underline{\tau} \cdot \underline{\mathbf{k}}. \quad (7.77)$$

Wyrażenie na wielkość dyssypacji pracy, w trakcie dowolnego procesu deformacji makroelementu stopu z pamięcią kształtu, można otrzymać podstawiając we wzorze (7.51) wyrażenie (7.77) oraz korzystając z (7.53)₃

$$\dot{w}_{Disp} = \dot{w} - \dot{w}_0 = \pi^f \dot{z} \geq 0, \quad (7.78)$$

$$\pi^f = \pi_1 + \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\tau} / \rho_0 = \pi_0^f(T) - (1 - 2z) \phi_{it}(T) + \underbrace{\underline{\tau} \cdot \underline{\mathbf{k}} / \rho_0}_{=g^{Ra}(\underline{\tau})}.$$

Eliminując \dot{u} z równania wynikającego z definicji energii swobodnej $\dot{\phi} = \dot{u} - s \dot{T} - \dot{s} T$ oraz z równania wyrażającego pierwszą zasadę termodynamiki $\dot{u} = \dot{w} - \dot{q}$. A następnie podstawiając tak otrzymaną zależność na $\dot{\phi}$ do fundamentalnego równania stanu Gibbsa $\dot{\phi} = -s \dot{T} + \dot{w}_0$ – por. (7.23), oraz wykorzystując wyrażenie na dyssypację pracy (7.78)₁ otrzymuje się następującą zależność

$$\dot{q} = \pi^f \dot{z} - \dot{s} T. \quad (7.79)$$

Po podstawieniu wyrażen (7.78)₂ i (7.76) otrzymuje się

$$\dot{q} = -c_p \dot{T} + [\Delta u^* - (1 - 2z) \bar{u}_0 + g^{Ra}(\underline{\tau})] \dot{z} - T \underline{\alpha}_0 \cdot \dot{\underline{\tau}} / \rho_0. \quad (7.80)$$

Oznaczając moc strumienia ciepła związanego z wszystkimi efektami cieplnymi mającymi miejsce w makroelemencie SMA poza pojemnością cieplną przez \dot{q}_{ir} i wykorzystując wzór na potencjał Ranieckiego (7.55)₂ otrzymuje się

$$\dot{q}_{ir} \equiv c_p \dot{T} + \dot{q} = [\Delta u^* - (1 - 2z) \bar{u}_0 + \gamma f(y) \tau_{ef} / \rho_0] \dot{z} - T \underline{\alpha}_0 \cdot \dot{\underline{\tau}} / \rho_0, \quad (7.81)$$

przy czym

$$\eta f(y)\tau' = \gamma f(y)\tau_{ef}, \quad \tau_{ef} = \sqrt{3/2} \tau', \quad \gamma = \sqrt{2/3} \eta, \quad \boldsymbol{\alpha}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\tau}} = 3\alpha_0 \dot{\tau}_m. \quad (7.82)$$

Ostatnia relacja w (7.82) wynika z założonej izotropii rozszerzalności termicznej.

7.9.5 Kinetyka przemiany fazowej \dot{z}

Ogólne formalne równania kinetyki termosprężystej przemiany fazowej, spełniające wymogi drugiej zasady termodynamiki, zostały zaproponowane w bardzo uniwersalnej postaci przez Ranieckiego i Lexcellenta w pracach [62], [63] – patrz także tekst poniżej wzoru (3.20). Równania te pozwalają opisywać kinetykę przemiany fazowej w różnych materiałach SMA poprzez właściwy dobór parametrów w tzw. specyficznych równaniach kinetyki określonych funkcjami stanu $\lambda_{(\alpha)}^\sigma(\boldsymbol{\tau}, T, z)$. Można się tu posłużyć funkcjami (3.25) lub (6.15).

Tutaj równania te zostaną podane w postaci właściwej dla formalizmu skończonych deformacji. Ogólne równania kinetyki przemiany fazowej, będące odpowiednikiem równań (3.22), zapisane na konfiguracji aktualnej w postaci obiektywnej, tj. niezmienniczej względem sztywnych obrotów mają postać

$$\dot{z} = \lambda_1^\sigma(\boldsymbol{\tau}, T, z) \cdot \pi_\tau^f \overset{(Je)}{\overset{0}{\pi_\tau^f}} \quad \text{jeśli } \{\pi^f \geq Y_1 \text{ and } \pi_\tau^f \overset{(Je)}{\overset{0}{\pi_\tau^f}} > 0\} \quad (\text{A} \rightarrow \text{M}), \quad (7.83)$$

$$\dot{z} = \lambda_2^\sigma(\boldsymbol{\tau}, T, z) \cdot \pi_\tau^f \overset{(Je)}{\overset{0}{\pi_\tau^f}} \quad \text{jeśli } \{\pi^f \leq Y_2 \text{ and } \pi_\tau^f \overset{(Je)}{\overset{0}{\pi_\tau^f}} < 0\} \quad (\text{M} \rightarrow \text{A}),$$

$\dot{z} = 0$ w pozostałych przypadkach,

gdzie termodynamiczna siła przemiany fazowej π^f określona jest teraz wzorem (7.78)₂. Funkcje wartości progowych $0 \leq Y_{(\alpha)}(\boldsymbol{\tau}, T, z)$, $\alpha = 1, 2$, ($Y_{(1)}|_{z=0} = Y_{(2)}|_{z=1} = 0$) wskazują po osiągnięciu jakiej progowej wartości termodynamicznej siły przemiany fazowej rozpoczyna się aktywna przemiana fazowa wprost lub odwrotna. Funkcje wartości progowych narzucają dodatkowe ograniczenia, w stosunku do tych wynikających z drugiej zasady termodynamiki. Ich przyczyna fizyczna obecnie nie jest znana, jednak występowanie takich ograniczeń jest obserwowane doświadczalnie, patrz także rozdział 6.

Moc indukująca aktywną przemianę fazową zapisana w postaci obiektywnej przyjmuje postać – por. (3.24)

$$\pi_\tau^f \overset{(Je)}{\overset{0}{\pi_\tau^f}} \equiv \frac{\partial \pi^f}{\partial \boldsymbol{\tau}} \cdot \boldsymbol{\tau} \overset{(Je)}{\overset{0}{\pi_\tau^f}} + \frac{\partial \pi^f}{\partial T} \dot{T} = (\boldsymbol{\kappa} / \rho^0) \cdot \boldsymbol{\tau} \overset{(Je)}{\overset{0}{\pi_\tau^f}} - [\Delta s^* - \bar{s}_0(1-2z)] \dot{T} = \dot{\pi}_\tau^f. \quad (7.84)$$

Ostatnia zależność (7.84) obowiązuje gdyż π_τ^f jest skalarem.

Powyższa postać jest niedogodna w zastosowaniach numerycznych gdyż jest wyrażona poprzez $\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\sigma}$) tj. wielkość, która stanowi jeden z elementów wyjściowych z procedury materiałowej. W ogólnym przypadku taka sytuacja

oznacza konieczność zastosowania jakiejś procedury iteracyjnej, do sprawdzenia czy kryterium aktywnej przemiany jest spełnione czy nie, co podnosi koszt obliczeń. Należy zatem poszukiwać takiej postaci funkcyjnej na kryterium przemiany fazowej, która jest wyrażona poprzez parametry stanowiące wejście do procedury materiałowej czyli $\underline{\mathbf{d}}$ i \dot{T} . Z uwagi na własność (7.58)₁ jest

$$\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\frac{0}{\rho}}(\text{Je}) = \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\frac{0}{\rho}}(\text{e}_{\log}) = \underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}, \quad \pi_{\tau}^f(\text{Je}) = \pi_{\tau}^f(\text{e}_{\log}) = \dot{\pi}_{\tau}^f. \quad (7.85)$$

Obliczając korotacyjną pochodną sprężystą logarymiczną (A 7.34)₃ lewej i prawej strony wzoru (7.53)₁, korzystając z własności (A7.34)₁, podstawiając (7.3)₁ a następnie (7.69) prędkościowe równanie sprężystości można wyrazić w postaci

$$\frac{\rho}{\rho^0} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\frac{0}{\rho}}(\text{e}_{\log}) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}[\underline{\mathbf{d}} - \dot{\underline{\mathbf{k}}} - z \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\frac{0}{\rho}}(\text{Je}) - \underline{\alpha}_0 \dot{T}]. \quad (7.86)$$

Z uwagi na własność (7.66) jest

$$\frac{\rho}{\rho^0} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\frac{0}{\rho}}(\text{e}_{\log}) = \underline{\underline{\mathcal{L}}}[\underline{\mathbf{d}} - \dot{\underline{\mathbf{k}}} - z \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\frac{0}{\rho}}(\text{e}_{\log}) - \underline{\alpha}_0 \dot{T}] - z \underline{\underline{\mathcal{L}}}[\underline{\mathbf{k}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{e-\log}) - (\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{e-\log})\underline{\mathbf{k}}], \quad (7.87)$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\frac{0}{\rho}}(\text{e}_{\log}) = \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S[\underline{\mathbf{d}} - \dot{\underline{\mathbf{k}}} - \underline{\alpha}_0 \dot{T}] - z \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S[\underline{\mathbf{k}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{e-\log}) - (\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{e-\log})\underline{\mathbf{k}}],$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\frac{0}{\rho}}(\text{e}_{\log}) = \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S[\underline{\mathbf{d}} - \dot{\underline{\mathbf{k}}} - \underline{\alpha}_0 \dot{T}] - z [\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\mathbf{k}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{e-\log}) - (\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{e-\log})\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\mathbf{k}}].$$

Powyżej wykorzystano definicję (7.73)₂. Skorzystano także z faktu, że tensor $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^S$ jest tensorem izotropowym – por. (7.74) i (7.64). Zatem tensor $\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\mathbf{k}} \equiv \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S \underline{\mathbf{k}}$ jest kolinearny z $\underline{\mathbf{k}}$ ($\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\mathbf{k}} \underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{k}} \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\mathbf{k}}$) i $\underline{\underline{\mathcal{L}}}^S[\underline{\mathbf{k}} \underline{\boldsymbol{\omega}}^* - \underline{\boldsymbol{\omega}}^* \underline{\mathbf{k}}] = \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\mathbf{k}} \underline{\boldsymbol{\omega}}^* - \underline{\boldsymbol{\omega}}^* \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\mathbf{k}}$ – por. (7.60).

Zwężając obustronnie (7.83)₃ przez $(\underline{\mathbf{k}}/\rho^0)$ jest

$$(\underline{\mathbf{k}}/\rho^0) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\frac{0}{\rho}}(\text{e}_{\log}) = (\underline{\mathbf{k}}/\rho) \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S \underline{\mathbf{d}} - \dot{z}(\underline{\mathbf{k}}/\rho) \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S \underline{\mathbf{k}}. \quad (7.88)$$

gdyż $\underline{\mathbf{k}} \cdot [\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\mathbf{k}}(\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{e-\log}) - (\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{e-\log})\underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\mathbf{k}}] = 0$ i $\underline{\mathbf{k}} \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S \underline{\alpha}_0 \dot{T} = 0$.

Korzystając z (7.85)₁ i dodając do obu stron $\pi_{\tau}^f \dot{T}$ otrzymuje się

$$[(\underline{\mathbf{k}}/\rho^0) \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}^{\frac{0}{\rho}}(\text{e}_{\log}) + \pi_{\tau}^f \dot{T}] + \dot{z}(\underline{\mathbf{k}}/\rho) \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S \underline{\mathbf{k}} = (\underline{\mathbf{k}}/\rho) \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S \underline{\mathbf{d}} + \pi_{\tau}^f \dot{T}. \quad (7.89)$$

Gdy spełnione są kryteria aktywnej przemiany fazowej to $\dot{z} = \lambda_{(\alpha)}^{\sigma} \cdot \pi_{\tau}^f(\text{Je})$ – por. (7.83). Korzystając z zależności (7.89) otrzymuje się

$$\frac{\rho}{\rho^0} \pi_{\tau}^f(\text{Je}) + \lambda_{(\alpha)}^{\sigma} \pi_{\tau}^f(\text{e}_{\log}) (\underline{\mathbf{k}}/\rho) \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S \underline{\mathbf{k}} = (\underline{\mathbf{k}}/\rho) \cdot \underline{\underline{\mathcal{L}}}^S \underline{\mathbf{d}} + \pi_{\tau}^f \dot{T}, \quad (7.90)$$

$$[1 + \lambda_{(\alpha)}^{\sigma}(\underline{\mathbf{k}}/\rho) \cdot \underline{\mathcal{L}}^S \underline{\mathbf{k}}] \pi_{\tau}^f \stackrel{\circ}{\pi}_{\tau}^{(Je)} = (\underline{\mathbf{k}}/\rho) \cdot \underline{\mathcal{L}}^S \underline{\mathbf{d}} + \pi_{\tau}^f \dot{T}$$

i ostatecznie

$$\frac{\stackrel{\circ}{\pi}_{\tau}^{(Je)}}{\pi_{\tau}^f} = \frac{(\underline{\mathbf{k}}/\rho) \cdot \underline{\mathcal{L}}^S \underline{\mathbf{d}} + \pi_{\tau}^f \dot{T}}{[1 + \lambda_{(\alpha)}^{\sigma}(\underline{\mathbf{k}}/\rho) \cdot \underline{\mathcal{L}}^S \underline{\mathbf{k}}]} = f(\underline{\mathbf{d}}, \dot{T}). \quad (7.91)$$

W przypadku przemiany wprost należy podstawić w powyższym wzorze funkcje stanu $\lambda_{(1)}^{\sigma}$, zaś w przypadku przemiany odwrotnej $\lambda_{(2)}^{\sigma}$.

7.9.6 Kompletny zestaw równań konstytutywnych makroskopowego, liniowego sprężycie, modelu pseudosprężystego zachowania stopów z pamięcią kształtu

Prędkościowe równania modelu pseudosprężystości stopów SMA, poddawanych dużym deformacjom, przyjmują postać podaną poniżej. Parametrami wejściowymi do modelu są gradient prędkości deformacji $\underline{\mathbf{L}}$ i pochodna materialna temperatury \dot{T} . Model przewiduje ilościowo wielkość efektów mechanicznych, termicznych i postępu termosprężystej przemiany fazowej wprost lub odwrotnej, tj. $\underline{\sigma}$, $\underline{\mathbf{d}}^{in}$, \dot{q}_{ir} , \dot{z} . Stanowią one wielkości wyjściowe z modelu. Równania mechaniczne zachowania materiałowego przyjmują postać – por. (7.47) i (7.75)

$$\underline{\Pi}^{(*)}(\underline{\mathbf{L}}, \dot{T}) = \underline{\sigma} \stackrel{\circ}{\sigma} - \underline{\mathbf{d}} \underline{\sigma} - \underline{\sigma} \underline{\omega}, \quad (7.92)$$

$$\underline{\sigma} \stackrel{\circ}{\sigma}(\underline{\mathbf{d}}, \dot{T}) = \underline{\mathcal{L}}^{S(Je)}[\underline{\mathbf{d}} - \dot{z} \underline{\mathbf{k}}] - \underline{\mathcal{L}} \underline{\alpha}_0 \dot{T}.$$

Pierwsze z równań, zawierające elementy opisu ruchu makrocząstki i własności materiału, z którego jest ona zbudowana, podane jest w postaci nieobiektywnej, odpowiedniej dla sformułowania słabego metody elementów skończonych, przy zastosowaniu techniki uaktualnianego opisu Lagrange'a. Drugie równanie podano w standardowej dla budowy modeli konstytutywnych obiektywnej postaci. W przypadku stopów z pamięcią kształtu, w większości praktycznych przypadków, z doskonałym przybliżeniem można przyjąć – por. (7.34), (7.35), że

$$\underline{\mathcal{L}}^{S(Je)} \cong \underline{\mathcal{L}}^S = [\underline{\mathcal{M}} + z \frac{\rho^0}{\rho} \underline{\mathcal{P}}]^{-1}, \quad \underline{\mathcal{M}} = \underline{\mathcal{L}}^{-1}. \quad (7.93)$$

Formalne równane kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej zapisane w zwartej postaci przyjmuje postać – por. (7.83) i (7.91), (3.25) lub (6.15)

$$\dot{z} = \lambda_1^{\sigma} \cdot H(\pi^f - Y_1) \cdot \langle \pi_{\tau}^f \stackrel{\circ}{\pi}_{\tau}^{(Je)} \rangle - \lambda_2^{\sigma} \cdot H(-\pi^f - Y_2) \cdot \langle -\pi_{\tau}^f \stackrel{\circ}{\pi}_{\tau}^{(Je)} \rangle, \quad (7.94)$$

$$\frac{\overset{\circ}{\pi}_\tau^f \text{ (Je)}}{\pi_\tau^f} = \frac{\overset{\circ}{\pi}_\tau^f \text{ (J)}}{\pi_\tau^f} = \dot{\pi}_\tau^f = \frac{(\mathbf{k}/\rho) \cdot \underline{\mathcal{L}}^S \mathbf{d} + \pi_\tau^f \dot{T}}{(1 + \lambda_{(\alpha)}^\sigma(\mathbf{k}/\rho)) \cdot \underline{\mathcal{L}}^S \mathbf{k}} = f(\mathbf{d}, \dot{T}).$$

Niezwykle korzystnym, z numerycznego punktu widzenia, jest podanie kryterium przemiany fazowej w postaci zależnej od parametrów wejściowych procedury materiałowej, tj. \mathbf{d} , \dot{T} . Ta korzystna własność modelu pozwala od razu na stwierdzenie czy w danym kroku czasowym będzie, czy nie będzie zachodziła aktywna przemiana fazowa.

Wielkość efektów cieplnych określona jest poprzez wydajność specyficznego, na jednostkę masy, źródła ciepła – por. (7.81)

$$\dot{q}_{tr} \equiv [\gamma f(y)\tau_{ef}/\rho_0 + \Delta u^* - (1 - 2z)\bar{u}_0] \dot{z} - 3(T\alpha_0/\rho_0) \dot{\tau}_m, \quad (7.95)$$

$$c_p \partial T(\mathbf{x}, t) / \partial t + (1/\rho) \operatorname{div}(-\lambda \nabla T(\mathbf{x}, t)) - \dot{q}_{tr}(\mathbf{x}, t) = 0,$$

$$T \underline{\alpha}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\tau}} / \rho_0 = T \underline{\alpha}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}} / \rho_0 = (3T\alpha_0/\rho_0) \dot{\tau}_m = (3T\alpha_0/\rho) \dot{\sigma}_m = (3KT\alpha_0/\rho) \dot{\varepsilon}_v,$$

przy czym pierwszy człon opisuje zbiorczo efekty związane z ciepłem ukrytym przemiany fazowej i dyssypacją pracy mechanicznej, zaś drugi opisuje efekt piezokaloryczny. W większości przypadków, obecnych zastosowań stopów z pamięcią kształtu, moc ciepła \dot{q}_{tr} (dodatnia, gdy oddawana do otoczenia) jest wymieniana z otoczeniem poprzez mechanizm przewodzenia ciepła. W przypadku izotropowych materiałów SMA prowadzi to do równania transportu ciepła takiego jak (7.95)₂, gdzie λ oznacza izotropowy współczynnik przewodzenia ciepła. Wielkość efektów cieplnych związanych wyłącznie z dyssypacją pracy mechanicznej określona jest wzorem (7.78)₁.

7.10 Podsumowanie

W niniejszym rozdziale przedstawiono bardzo pojemną, ogólną strukturę makroskopowej termodynamicznej teorii pseudosprężystego zachowania stopów z pamięcią kształtu z uwzględnieniem efektów geometrycznych, dużych obrotów i dużych odkształceń. Następnie wyspecyfikowano kompletny, trójwymiarowy, fenomenologiczny model konstytutywny zachowania stopów z pamięcią kształtu, w zakresie ich pseudosprężystego zachowania, w formalizmie skończonych deformacji. Model jest liniowo sprężysty w logarytmicznej mierze odkształceń sprężystych. W chwili obecnej hipotezy, na których model się opiera zostały częściowo zweryfikowane dla izotermicznych obciążeń proporcjonalnych. Konieczne są dalsze systematyczne prace doświadczalne w zakresie obciążeń nie izotermicznych, w szczególności izostatycznych, izotermicznych wieloosiowych obciążeń nieproporcjonalnych i złożonych obciążeń termomechanicznych. Potrzebne są również dalsze prace badawcze doświadczalne i teoretyczne nad równaniami kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej. Opracowany tutaj model konstytutywny, dzięki zastosowaniu logarytmicznej miary odkształcenia,

może być łatwo rozszerzony na zakres obciążeń udarowych (wysokich ciśnień), gdy będzie znana z doświadczenia charakterystyka ciśnienie \leftrightarrow odkształcenie objętościowe. Z uwagi na to, że model rozwijano w formalizmie termodynamiki nierównowagowej jego uogólnienie na przypadek gdy moduły sprężystości zależą od stanu materiału, np. uwzględnienie przypadku gdy moduły sprężystości fazy austenitycznej i martenzytycznej są różne również nie nastęrcza poważniejszych trudności pod warunkiem, że są dostępne odpowiednie dane doświadczalne. Na koniec należy zwrócić uwagę, iż model był opracowywany specjalnie z myślą o jego implementacji w kodzie metody elementów skończonych, wykorzystującej technikę uaktualnianego opisu Lagrange'a.

Aneks 7.1 Wyprowadzenie zależności pomiędzy spinami sprężystymi Lagrangeowskim $\underline{\omega}^{eL}$, Eulerowskim $\underline{\omega}^{eE}$ i względnym $\underline{\omega}^{eR}$

W celu wyprowadzenia zależności pomiędzy spinami sprężystymi Lagrangeowskim, Eulerowskim i względnym wykorzystano metodę osi głównych Hilla [28], patrz także Ogden [47]. Stosując rozkład polarny i spektralny tensora gradientu deformacji sprężystych jest

$$\underline{\mathbf{F}}^e = \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\mathbf{U}}^e = \underline{\mathbf{V}}^e \underline{\mathbf{R}}^e, \quad \underline{\mathbf{U}}^e = \sum \lambda_i^e \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_i^e, \quad \underline{\mathbf{V}}^e = \sum \lambda_i^e \underline{\mathbf{n}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{n}}_i^e, \quad (\text{A } 7.1)$$

gdzie tensor $\underline{\mathbf{R}}^e$ jest właściwym tensorem ortogonalnym, tensory $\underline{\mathbf{U}}^e$ i $\underline{\mathbf{V}}^e$ oznaczają prawy i lewy tensor rozciągnięcia sprężystego. Skalary λ_i^e oznaczają wartości główne rozciągnięcia sprężystego. Wektory $\underline{\mathbf{N}}_i^e$ i $\underline{\mathbf{n}}_i^e$; $i=1,2,3$ oznaczają Lagrangeowskie i Eulerowskie kierunki główne tensorów $\underline{\mathbf{U}}^e$ i $\underline{\mathbf{V}}^e$ – nazywane Lagrangeowskimi i Eulerowskimi sprężystymi osiami głównymi.

Podczas deformacji sprężystej ciała względem pewnej ustalonej konfiguracji odniesienia triady Lagrangeowska $\underline{\mathbf{N}}_i^e$ i Eulerowska $\underline{\mathbf{n}}_i^e$ obracają się w ustalonym globalnym układzie współrzędnych. Obrót ten określony jest poprzez spiny sprężyste Lagrangeowski $\underline{\omega}^{eL}$ i Eulerowski $\underline{\omega}^{eE}$, które z kolei generowane są tensorami obrotu $\underline{\mathbf{R}}^{eL}$ i $\underline{\mathbf{R}}^{eE}$ odpowiednio

$$\underline{\omega}^{eL} \equiv \underline{\dot{\mathbf{R}}}^{eL} \underline{\mathbf{R}}^{eL T}, \quad \underline{\dot{\mathbf{N}}}_i^e = \underline{\omega}^{eL} \underline{\mathbf{N}}_i^e, \quad \underline{\omega}^{eE} \equiv \underline{\dot{\mathbf{R}}}^{eE} \underline{\mathbf{R}}^{eE T}, \quad \underline{\dot{\mathbf{n}}}_i^e = \underline{\omega}^{eE} \underline{\mathbf{n}}_i^e. \quad (\text{A } 7.2)$$

Spin sprężysty względny $\underline{\omega}^{eR} \equiv \underline{\dot{\mathbf{R}}}^e \underline{\mathbf{R}}^e$ określający obrót sprężystych osi Eulerowskich względem sprężystych osi Lagrangeowskich generowany jest przez tensor obrotu $\underline{\mathbf{R}}^e$

$$\underline{\mathbf{R}}^{eE} = \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\mathbf{R}}^{eL}, \quad \underline{\omega}^{eR} \equiv \underline{\dot{\mathbf{R}}}^e \underline{\mathbf{R}}^e; \quad \underline{\mathbf{n}}_i^e = \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\mathbf{N}}_i^e, \quad \underline{\mathbf{R}}^e = \sum R_{ij}^e \underline{\mathbf{n}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e. \quad (\text{A } 7.3)$$

Różniczkując (A7.3)₁ względem czasu – $\underline{\dot{\mathbf{R}}}^{eE} \equiv \underline{\omega}^{eE} \underline{\mathbf{R}}^{eE}$,

$$\underline{\dot{\mathbf{R}}}^{eE} = \underline{\dot{\mathbf{R}}}^e \underline{\mathbf{R}}^{eL} + \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\dot{\mathbf{R}}}^{eL} = \underline{\omega}^{eR} \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\mathbf{R}}^{eL} + \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\omega}^{eL} \underline{\mathbf{R}}^{eL}$$

i korzystając z (A7.2), (A7.3) otrzymuje się

$$\underline{\omega}^{eL} = (\underline{\mathbf{R}}^e)^T [\underline{\omega}^{eE} - \underline{\omega}^{eR}] \underline{\mathbf{R}}^e. \quad (\text{A } 7.4)$$

Obliczając pochodną materialną (A7.1)₁ i wykorzystując definicje prędkości deformacji sprężystej $\underline{\mathbf{d}}^e$ i spinu sprężystego $\underline{\omega}^e$

$$\underline{\mathbf{d}}^e = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{L}}^e + (\underline{\mathbf{L}}^e)^T], \quad \underline{\boldsymbol{\omega}}^e = \frac{1}{2}[\underline{\mathbf{L}}^e - (\underline{\mathbf{L}}^e)^T], \quad \dot{\underline{\mathbf{F}}}^e = \underline{\mathbf{L}}^e \underline{\mathbf{F}}^e, \quad (\text{A 7.5})$$

uzyskuje się

$$(\underline{\mathbf{R}}^e)^T \underline{\mathbf{d}}^e \underline{\mathbf{R}}^e = \frac{1}{2}[\dot{\underline{\mathbf{U}}}^e (\underline{\mathbf{U}}^e)^{-1} + (\underline{\mathbf{U}}^e)^{-1} \dot{\underline{\mathbf{U}}}^e], \quad (\text{A 7.6})$$

$$(\underline{\mathbf{R}}^e)^T (\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{eR}) \underline{\mathbf{R}}^e = \frac{1}{2}[\dot{\underline{\mathbf{U}}}^e (\underline{\mathbf{U}}^e)^{-1} - (\underline{\mathbf{U}}^e)^{-1} \dot{\underline{\mathbf{U}}}^e].$$

Składowe $(\underline{\mathbf{U}}^e)^{-1}$, $\dot{\underline{\mathbf{U}}}^e$ i $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{eL}$ – por. (A7.1), (A7.2)₁, na Lagrangeowskich sprzężystych osiach głównych oznaczono przez $1/\lambda_i^e$, \bar{U}_{ij}^e , ω_{ij}^{eL}

$$\dot{\underline{\mathbf{U}}}^e = \sum \bar{U}_{ij}^e \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e, \quad (\underline{\mathbf{U}}^e)^{-1} = \sum (1/\lambda_i^e) \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_i^e, \quad (\text{A 7.7})$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^{eL} = \sum \omega_{ij}^{eL} \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e.$$

Zaś składowe $\underline{\mathbf{d}}^e$, $\underline{\boldsymbol{\omega}}^e$, $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{eE}$, $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{eR}$ na Eulerowskich sprzężystych osiach głównych przez d_{ij}^e , ω_{ij}^e – por. (A7.5)_{1,2}, ω_{ij}^{eE} – por. (A7.2)₃, ω_{ij}^{eR} – por. (A7.3)₂

$$\underline{\mathbf{d}}^e = \sum d_{ij}^e \underline{\mathbf{n}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{n}}_j^e, \quad \underline{\boldsymbol{\omega}}^e = \sum \omega_{ij}^e \underline{\mathbf{n}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{n}}_j^e, \quad (\text{A 7.8})$$

$$\underline{\boldsymbol{\omega}}^{eE} = \sum \omega_{ij}^{eE} \underline{\mathbf{n}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{n}}_j^e, \quad \underline{\boldsymbol{\omega}}^{eR} = \sum \omega_{ij}^{eR} \underline{\mathbf{n}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{n}}_j^e.$$

Wtedy wyrażenia występujące po prawej stronie (A7.6) można zapisać na Lagrangeowskich sprzężystych osiach głównych następująco

$$\frac{1}{2}[\dot{\underline{\mathbf{U}}}^e (\underline{\mathbf{U}}^e)^{-1} + (\underline{\mathbf{U}}^e)^{-1} \dot{\underline{\mathbf{U}}}^e] = \sum \frac{1}{2}(\bar{U}_{ij}^e / \lambda_j^e + \bar{U}_{ij}^e / \lambda_i^e) \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e, \quad (\text{A 7.9})$$

$$\frac{1}{2}[\dot{\underline{\mathbf{U}}}^e (\underline{\mathbf{U}}^e)^{-1} - (\underline{\mathbf{U}}^e)^{-1} \dot{\underline{\mathbf{U}}}^e] = \sum \frac{1}{2}(\bar{U}_{ij}^e / \lambda_j^e - \bar{U}_{ij}^e / \lambda_i^e) \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e.$$

Wykorzystując zależności (A7.7), (A7.8) i wzory (A7.9), równania (A7.4), (A7.6) redukują się do następujących zależności

$$\omega_{ij}^{eL} = \omega_{ij}^{eE} - \omega_{ij}^{eR}, \quad d_{ij}^e = \frac{\lambda_i^e + \lambda_j^e}{2\lambda_i^e \lambda_j^e} \bar{U}_{ij}^e, \quad \omega_{ij}^e - \omega_{ij}^{eR} = \frac{\lambda_i^e - \lambda_j^e}{2\lambda_i^e \lambda_j^e} \bar{U}_{ij}^e. \quad (\text{A 7.10})$$

Eliminując z powyższych równań \bar{U}_{ij}^e otrzymuje się

$$\omega_{ij}^e - \omega_{ij}^{eR} = \frac{\lambda_i^e - \lambda_j^e}{\lambda_i^e + \lambda_j^e} d_{ij}^e. \quad (\text{A 7.11})$$

Obecnie zostaną wyliczone składowe \bar{U}_{ij}^e tensora

$$\dot{\underline{\mathbf{U}}}^e = \sum \bar{U}_{ij}^e \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e = \sum \dot{\lambda}_i^e \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_i^e + \sum \lambda_i^e \dot{\underline{\mathbf{N}}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_i^e + \sum \lambda_i^e \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \dot{\underline{\mathbf{N}}}_i^e. \quad (\text{A 7.12})$$

W tym celu zostanie obliczona pochodna korotacyjna tensora $\underline{\mathbf{U}}^e$ ze spinem określającym chwilowy obrót osi Lagrangeowskich $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{eL}$ – por. (A7.2)

$$\frac{\circ}{\underline{\mathbf{U}}}^e \equiv \underline{\mathbf{R}}^{eL} \frac{D}{Dt} (\underline{\mathbf{R}}^{eL} \underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{R}}^{eL}) \underline{\mathbf{R}}^{eL} = \dot{\underline{\mathbf{U}}}^e + \underline{\mathbf{U}}^e \underline{\boldsymbol{\omega}}^{eL} - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{eL} \underline{\mathbf{U}}^e = \sum \dot{\lambda}_i^e \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_i^e. \quad (\text{A 7.13})$$

Wykorzystując (A7.7) i dokonując prostego przekształcenia jest

$$\underline{\dot{\mathbf{U}}}^e = \sum \bar{U}_{ij}^e \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e = \sum [\dot{\lambda}_i^e + (\lambda_j^e - \lambda_i^e) \omega_{ij}^{eL}] \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e \quad (\text{A 7.14})$$

lub w postaci skalarnej

$$\bar{U}_{ij}^e = \dot{\lambda}_i^e, i = j, \quad \bar{U}_{ij}^e = (\lambda_j^e - \lambda_i^e) \omega_{ij}^{eL}, i \neq j. \quad (\text{A 7.15})$$

Podstawiając (A7.15)₁ do (A7.10)₂ dla $i = j$ jest

$$d_{ii}^e = \dot{\lambda}_i^e / \lambda_i^e. \quad (\text{A 7.16})$$

Zależność ta obowiązuje bez względu na historię obrotów Lagrangeowskich sprężystych osi głównych. Podstawiając (A7.15)₂ do (A7.10)₃ $i \neq j$ otrzymuje się

$$\omega_{ij}^{eR} - \omega_{ij}^e = \frac{(\lambda_i^e - \lambda_j^e)^2}{2\lambda_i^e \lambda_j^e} \omega_{ij}^{eL}. \quad (\text{A 7.17})$$

Eliminując z (A7.17) i (A7.10)₁ ω_{ij}^{eR} jest

$$\omega_{ij}^{eE} - \omega_{ij}^e = \frac{(\lambda_i^e)^2 + (\lambda_j^e)^2}{2\lambda_i^e \lambda_j^e} \omega_{ij}^{eL}. \quad (\text{A 7.18})$$

Na koniec eliminując z (A7.15)₂ i (A7.10)₂ \bar{U}_{ij}^e

$$\omega_{ij}^{eL} = \frac{2\lambda_i^e \lambda_j^e}{(\lambda_j^e)^2 - (\lambda_i^e)^2} d_{ij}^e \quad \lambda_i^e \neq \lambda_j^e, \quad (\text{A 7.19})$$

i podstawiając powyższe do (A7.18) jest

$$\omega_{ij}^{eE} - \omega_{ij}^e = \frac{(\lambda_i^e)^2 + (\lambda_j^e)^2}{(\lambda_j^e)^2 - (\lambda_i^e)^2} d_{ij}^e \quad \lambda_i^e \neq \lambda_j^e. \quad (\text{A 7.20})$$

Z powyższego wynika, że obrót Lagrangeowskich sprężystych osi głównych zależy tylko od stanu deformacji $\underline{\mathbf{U}}^e = \underline{\mathbf{U}}^e(\lambda_i^e)$ i chwilowej prędkości deformacji $\underline{\mathbf{d}}^e$.

Aneks 7.2 Wyprowadzenie związków kinematycznych pomiędzy $\underline{\dot{\mathbf{E}}}^e(0) \leftrightarrow \underline{\mathbf{D}}^e$,

$$(\underline{\dot{\mathbf{e}}}^e(0) \leftrightarrow \underline{\mathbf{d}}^e)$$

Tensor logarymicznego odkształcenia sprężystego i jego pochodna materialna zapisane w układzie współrzędnych Lagrangeowskich sprężystych osi głównych w opisie ruchomych konfiguracji odniesienia przyjmują postać

$$\underline{\mathbf{E}}^e(0) = \sum \ln(\lambda_i^e) \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_i^e, \quad (\text{A 7.21})$$

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(0) &= \overline{\dot{\underline{\mathbf{E}}}}^e = \sum \bar{E}_{ij}^e \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e = \\ &= \sum (\dot{\lambda}_i^e / \lambda_i^e) \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_i^e + \sum \ln(\lambda_j^e / \lambda_i^e) \dot{\underline{\mathbf{N}}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_i^e + \sum \ln(\lambda_i^e) \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \dot{\underline{\mathbf{N}}}_i^e.\end{aligned}$$

Wykorzystując wzory na chwilowy obrót Lagrangeowskich sprzężystych osi $\underline{\mathbf{N}}_i^e$ – por. (A7.2)₂, (A7.7)₃ jest

$$\dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(0) = \sum \bar{E}_{ij}^e \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e = \sum [\dot{\lambda}_i^e / \lambda_i^e + \ln(\lambda_j^e / \lambda_i^e) \omega_{ij}^{eL}] \underline{\mathbf{N}}_i^e \otimes \underline{\mathbf{N}}_j^e, \quad (\text{A } 7.22)$$

lub w zapisie dla składowych

$$\bar{E}_{ij}^e = \dot{\lambda}_i^e / \lambda_i^e; \quad i = j, \quad \bar{E}_{ij}^e = \ln(\lambda_j^e / \lambda_i^e) \omega_{ij}^{eL} \quad i \neq j. \quad (\text{A } 7.23)$$

Korzystając ze wzoru (A7.16) dla $i = j$ i ze wzoru (A7.19) dla $i \neq j$ jest

$$\bar{E}_{ij}^e = D_{ii}^e \quad i = j, \quad \bar{E}_{ij}^e = \frac{2\lambda_i^e \lambda_j^e \ln(\lambda_j^e / \lambda_i^e)}{(\lambda_j^e)^2 - (\lambda_i^e)^2} D_{ij}^e \quad i \neq j \text{ oraz } \lambda_i^e \neq \lambda_j^e. \quad (\text{A } 7.24)$$

We wzorze (A7.24) skorzystano z tego, że składowe obróconego tensora gradientu prędkości deformacji $\underline{\mathbf{D}}^e = {}^T \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\mathbf{d}}^e \underline{\mathbf{R}}^e$ zapisane na Lagrangeowskich sprzężystych osiach głównych są takie same jak składowe tensora gradientu prędkości deformacji $\underline{\mathbf{d}}^e$, zapisane na Eulerowskich sprzężystych osiach głównych $D_{ij}^e = d_{ij}^e$ – por. (7.17)₂.

Zatem związki pomiędzy $\dot{\underline{\mathbf{E}}}^e(0) \leftrightarrow \underline{\mathbf{D}}^e$ zapisane na Lagrangeowskich sprzężystych osiach głównych mają postać (A7.24). Tę samą postać (A7.24) mają związki pomiędzy $\dot{\underline{\mathbf{e}}}^e(0) \leftrightarrow \underline{\mathbf{d}}^e$ zapisane na Eulerowskich sprzężystych osiach głównych, przy czym w miejsce \bar{E}_{ij}^e, D_{ij}^e należy podstawić \bar{e}_{ij}^e, d_{ij}^e .

Skalary λ_j^e oznaczają wszystkie różne wartości własne tensora $\underline{\mathbf{U}}^e$. Gdy dwie wartości własne są równe $\lambda_i^e = \lambda_j^e$ to odpowiednie składowe $\bar{E}_{ij}^e \quad i \neq j$ są otrzymywane z (A7.24)₂ poprzez przejście graniczne $\lambda_i^e \rightarrow \lambda_j^e$.

Aneks 7.3 Wyprowadzenie związków kinematycznych pomiędzy $\overset{\circ}{\underline{\mathbf{e}}}^e(0) \overset{(Je)}{\leftrightarrow} \underline{\mathbf{d}}^e$,

tensor $\underline{\mathcal{E}}^{de}(\underline{\mathbf{U}}^e)$ i jego własności w przypadku izotropii sprzężystej,

korotacyjna sprzężysta pochodna logarytmiczna $\overset{\circ}{\underline{\mathbf{e}}}^e(0) \overset{(e_log)}{\leftrightarrow}$

Pochodna sprzężysta Zaremby-Jaumanna generowana spinem $\underline{\boldsymbol{\omega}}^e$ – por. (A7.5)₂, obliczona dla tensora $\underline{\mathbf{e}}^e(0)$ ma postać

$$\frac{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)}{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)} = \dot{\mathbf{e}}^e(0) + \mathbf{e}^e(0)\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^e \mathbf{e}^e(0), \quad \frac{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)}{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)} = \sum e_{ij}^{\text{Je}} \mathbf{n}_i^e \otimes \mathbf{n}_j^e. \quad (\text{A } 7.25)$$

Analogicznie, pochodna generowana sprężystym spinem względnym $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{eR}$ – por. (A7.3)₂, obliczona dla tensora $\mathbf{e}^e(0)$ ma postać

$$\frac{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)}{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)} \equiv \mathbf{R}^e \frac{D}{Dt} (\mathbf{R}^e \mathbf{e}^e(0) \mathbf{R}^e)^T \mathbf{R}^e = \dot{\mathbf{e}}^e(0) + \mathbf{e}^e(0) \underline{\boldsymbol{\omega}}^{\text{Re}} - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{\text{Re}} \mathbf{e}^e(0). \quad (\text{A } 7.26)$$

Korzystając z zależności $\mathbf{E}^e(0) = {}^T \mathbf{R}^e \mathbf{e}^e(0) \mathbf{R}^e$ pomiędzy Lagrangeowskim i Eulerowskim logarytmicznym odkształceniem sprężystym, – por. (A7.22)₁, (A7.3)₃ otrzymuje się

$$\frac{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)}{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)} \equiv \sum e_{ij}^{\text{Re}} \mathbf{n}_i^e \otimes \mathbf{n}_j^e = \mathbf{R}^e \dot{\mathbf{E}}^e(0) \mathbf{R}^e = \sum \bar{E}_{ij}^e \mathbf{n}_i^e \otimes \mathbf{n}_j^e. \quad (\text{A } 7.27)$$

Zatem składowe e_{ij}^{Re} tensora $\mathbf{e}^e(0)$ na Eulerowskich sprężystych osiach głównych są równe składowym \bar{E}_{ij}^e tensora $\mathbf{E}^e(0)$ na Lagrangeowskich osiach sprężystych

$$e_{ij}^{\text{Re}} = \bar{E}_{ij}^e. \quad (\text{A } 7.28)$$

Eliminując $\dot{\mathbf{e}}^e(0)$ z (A7.25) i (A7.26) otrzymuje się zależność

$$\frac{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)}{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)} = \mathbf{e}^e(0) \underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{\text{Re}} \mathbf{e}^e(0) + \mathbf{e}^e(0) (\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{\text{Re}}) - (\underline{\boldsymbol{\omega}}^e - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{\text{Re}}) \mathbf{e}^e(0). \quad (\text{A } 7.29)$$

Rozpisując powyższy wzór na Eulerowskich sprężystych osiach głównych i korzystając z (A7.27), (A7.24) i (A7.11) otrzymuje się wzory na składowe

korotacyjnej pochodnej sprężystej Zaremby-Jaumanna $\frac{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)}{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)}$ tensora

logarytmicznych odkształceń sprężystych zapisane na Eulerowskich sprężystych osiach głównych, wyrażone poprzez składowe tensora prędkości deformacji sprężystej \mathbf{d}^e wyrażone na tych samych osiach

$$e_{ij}^{\text{Je}} = d_{ij}^e = \dot{\lambda}_i^e / \lambda_i^e \quad i = j, \quad (\text{A } 7.30)$$

$$e_{ij}^{\text{Je}} = \frac{(\lambda_i^e / \lambda_j^e)^2 + 1}{(\lambda_i^e / \lambda_j^e)^2 - 1} \ln(\lambda_i^e / \lambda_j^e) d_{ij}^e \quad \lambda_i^e \neq \lambda_j^e \text{ oraz } i \neq j.$$

Składowe diagonalne tensora $\frac{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)}{\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0)}$ na Eulerowskich sprężystych osiach głównych są równe odpowiednim pochodnym materialnym składowych głównych

logarytmicznego odkształcenia sprężystego $\overline{\ln(\lambda_i^e)}$, bez względu na historię gradientu deformacji sprężystych.

Zależność (A7.30) została podana w pracy Ranieckiego i Nguyena [60]. Związek ten może być przedstawiony w postaci tensorowej następująco

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}^e(0) = \mathbf{d}^e - \mathbf{e}^e(0)\mathbf{x}^e + \mathbf{x}^e \mathbf{e}^e(0), \quad \mathbf{x}^e = -\overset{T}{\mathbf{x}}^e, \quad \mathbf{x}^e = \sum x_{ij}^e \mathbf{n}_i^e \otimes \mathbf{n}_j^e, \quad (\text{A } 7.31)$$

gdzie \mathbf{x}^e jest tensorem spinu. Jego składowe można łatwo wyznaczyć rozpisując (A7.31) na Eulerowskich sprężystych osiach głównych. Po skorzystaniu z (A7.30) i prostych przekształceniach otrzymuje się

$$x_{ij}^e = 0 \quad i = j, \quad (\text{A } 7.32)$$

$$x_{ij}^e = \left(\frac{1}{\ln(\lambda_i^e / \lambda_j^e)} + \frac{1 + (\lambda_i^e / \lambda_j^e)^2}{1 - (\lambda_i^e / \lambda_j^e)^2} \right) d_{ij}^e \quad \lambda_i^e \neq \lambda_j^e \text{ oraz } i \neq j.$$

Jakakolwiek deformacja w postaci dylatacji nie zmienia wartości tensora \mathbf{x}^e , zaś dla czysto dylatacyjnej deformacji $\lambda_1^e = \lambda_2^e = \lambda_3^e$ jest on tożsamościowo równy zeru $\mathbf{x}^e \equiv 0$.

Poszukując pochodnej korotacyjnej tensora logarytmicznych odkształceń całkowitych, która byłaby równa tensorowi prędkości deformacji \mathbf{d} , Xiao i inni w swojej pracy [88] wprowadzili pojęcie spinu logarytmicznego $\mathbf{\omega}^{\log}$. A następnie pojęcie korotacyjnej pochodnej logarytmicznej dowolnego tensora drugiego rzędu \mathbf{T}

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}}(0)^{(\log)} \equiv \dot{\mathbf{e}}(0) + \mathbf{e}(0)\mathbf{\omega}^{\log} - \mathbf{\omega}^{\log} \mathbf{e}(0) = \mathbf{d}, \quad (\text{A } 7.33)$$

$$\overset{\circ}{\mathbf{T}}^{(\log)} \equiv \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\mathbf{\omega}^{\log} - \mathbf{\omega}^{\log} \mathbf{T}, \quad \mathbf{\omega}^{\log} = \mathbf{\omega} + \mathbf{x}.$$

Wyprowadzili oni również wzory na składowe $\mathbf{\omega}^{\log}$ w funkcji składowych \mathbf{d} w układzie współrzędnych Eulerowskich osi głównych. Zależności te można otrzymać wykorzystując wzór (A7.33)₃. Przy czym składowe występującego w tym wzorze tensora spinu \mathbf{x} , zapisane na Eulerowskich osiach głównych, można otrzymać podstawiając we wzorze (A7.32) w miejsce składowych d_{ij}^e i λ_i^e składowe d_{ij} i λ_i prędkości odkształcenia całkowitego \mathbf{d} i wartości głównych rozciągnięcia całkowitego rozpisane na Eulerowskich osiach głównych.

Przez analogię można wprowadzić pojęcie sprężystej pochodnej logarytmicznej i sprężystego spinu logarytmicznego – por. (A7.31), (7.4)₂

$$\frac{\circ}{\mathbf{e}}(0)^{(e, \log)} \equiv \dot{\mathbf{e}}(0) + \mathbf{e}(0)\underline{\boldsymbol{\omega}}^{e, \log} - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{e, \log}\mathbf{e}(0) = \mathbf{d}^e \Leftrightarrow (\underline{\boldsymbol{\omega}}^{e, \log} = \underline{\boldsymbol{\omega}}^e + \underline{\mathbf{x}}^e), \quad (\text{A 7.34})$$

$$\frac{\circ}{\mathbf{T}}(e, \log) \equiv \dot{\mathbf{T}} + \mathbf{T}\underline{\boldsymbol{\omega}}^{e, \log} - \underline{\boldsymbol{\omega}}^{e, \log}\mathbf{T}.$$

Przydatnym jest wprowadzenie następującej definicji tensora 4 rzędu $\underline{\mathcal{E}}^{de}(\mathbf{U}^e)$, będącego funkcją wyłącznie stanu odkształcenia sprężystego, określającego różnicę pomiędzy pochodną sprężystą Zaremby-Jaumanna logarytmicznego odkształcenia sprężystego i tensorem sprężystej prędkości deformacji

$$\underline{\mathcal{E}}^{de}(\mathbf{U}^e)\mathbf{d}^e \equiv \frac{\circ}{\mathbf{e}}(0)^{(Je)} - \mathbf{d}^e, \quad e_{ij}^{Je} - d_{ij}^e = \mathcal{E}_{ijkl}^{de}d_{kl}^e. \quad (\text{A 7.35})$$

Zapisując powyższą relację na Eulerowskich sprężystych osiach głównych – por. (A7.30) jest

$$\begin{bmatrix} e_{11}^{e(Je)} - d_{11} \\ e_{22}^{e(Je)} - d_{22} \\ e_{33}^{e(Je)} - d_{33} \\ e_{23}^{e(Je)} - d_{23} \\ e_{13}^{e(Je)} - d_{13} \\ e_{12}^{e(Je)} - d_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{23}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{13}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \\ d_{23} \\ d_{13} \\ d_{12} \end{bmatrix}, \quad (\text{A 7.36})$$

$$A_{ij}^e = \left[\frac{(\lambda_i^e / \lambda_j^e)^2 + 1}{(\lambda_i^e / \lambda_j^e)^2 - 1} \ln(\lambda_i^e / \lambda_j^e) - 1 \right] d_{ij}^e; \quad ij=23,32, ij=13,31, ij=12,21,$$

$$\mathcal{E}_{ijkl}^{de}d_{kl}^e = e_{ij}^{Je} - d_{ij}^e = \begin{cases} 0, & i = j \\ \left[\frac{(\lambda_i^e / \lambda_j^e)^2 + 1}{(\lambda_i^e / \lambda_j^e)^2 - 1} \ln(\lambda_i^e / \lambda_j^e) - 1 \right] d_{ij}^e; & i \neq j. \end{cases}$$

Z powyższego wynika, że $\mathcal{E}_{ijkl}^{de}d_{kl}^e = 0$ gdy $\lambda_i^e \rightarrow \lambda_j^e$.

Tensor $\underline{\mathcal{E}}^{de}(\mathbf{U}^e)$ ma interesujące własności w przypadku materiałów wykazujących izotropię sprężystą. Dokonując wyliczenia wprost jest

$$\underline{\mathcal{L}}\underline{\mathcal{E}}^{de} = \underline{\mathcal{E}}^{de}\underline{\mathcal{L}}, \quad (\text{A 7.37})$$

$$\underline{\mathcal{L}}\underline{\mathcal{E}}^{de} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu A_{23}^e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu A_{13}^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu A_{12}^e \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix},$$

gdzie $\underline{\mathcal{L}}$ jest klasycznym izotropowym tensorem czwartego rzędu własności sprężystych.

Dla dowolnego symetrycznego tensora drugiego rzędu $\underline{\mathbf{s}}$, którego osie główne pokrywają się z Eulerowskimi osiami głównymi $\underline{\mathbf{n}}_i^e$ jest

$$\underline{\mathcal{L}}^{de} \underline{\mathbf{s}} = \underline{\mathbf{0}}. \quad (\text{A 7.38})$$

Zatem w przypadku izotropii sprężystej jest np. $\underline{\mathcal{L}}^{de} \underline{\boldsymbol{\tau}} = \underline{\mathcal{L}}^{de} \underline{\boldsymbol{\sigma}} = \underline{\mathcal{L}}^{de} \underline{\mathbf{e}}^e(0) = \underline{\mathbf{0}}$, gdyż wtedy wszystkie Eulerowskie miary odkształcenia sprężystego, a także tensory naprężenia Kirchoffa i Cauchego mają osie główne $\underline{\mathbf{n}}_i^e$.

Dla izotropowego tensora rozszerzalności termicznych $\underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \alpha_0 \underline{\mathbf{I}}$ jest

$$\underline{\mathcal{L}}^{S(\text{Je})} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \underline{\mathcal{L}}^S \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \underline{\mathcal{L}}^{(\text{Je})} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \underline{\mathcal{L}} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0, \quad (\text{A 7.39})$$

$$\underline{\mathcal{L}}^{(\text{Je})} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \underline{\mathcal{L}} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_0(3\lambda + 2\mu) \\ \alpha_0(3\lambda + 2\mu) \\ \alpha_0(3\lambda + 2\mu) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_0 \\ \alpha_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aneks 7.4 Rodzina izoklinicznych konfiguracji naturalnych – warunek $\underline{\boldsymbol{\omega}}^{in} = \underline{\mathbf{0}}$

Dokonując multiplikatywnego rozkładu tensora gradientu deformacji na część sprężystą i niesprężystą wykorzystuje się koncepcję odciażonych sprężycie konfiguracji odniesienia, chwilowych konfiguracji „naturalnych” ${}^tB^*$ – por. sekcja 7.2. Żądanie zerowej wartości tensora naprężenia w tych konfiguracjach nie stanowi warunku wystarczającego do ich jednoznacznego określenia. Konieczna jest dodatkowa informacja umożliwiająca określenie ich orientacji względem ustalonego laboratoryjnego układu współrzędnych. Z matematycznego punktu widzenia oznacza to konieczność wyspecyfikowania trzech równań więzów geometrycznych. W tym celu Mandel [40] wprowadził koncepcję „reperu orientującego”⁵ oraz rodzin „izoklinicznych konfiguracji naturalnych”. Reper orientujący to zbiór trzech ortogonalnych wersorów $\{\underline{\mathbf{m}}_i\}$, $i = 1, 2, 3$. Może on być stowarzyszony z elementami mikrostruktury makroelementu (RVE) jeśli istnieją po temu przesłanki natury fizycznej. Wtedy reper orientujący pozwala, w ramach makroskopowego modelu

⁵ Mandel używa angielskojęzycznej nazwy director triad.

konstytutywnego materiału, opisywać w pewien uśredniony (makroskopowy) sposób ewolucję wyróżnionej reperem mikrostruktury materiału, np. tekstury, względem włókien materialnych. Reper orientujący może też być tak wybrany, aby pokrywał się chwilowo z pewnymi włóknami materialnymi na konfiguracjach odciążonych sprężystości. Wtedy pozwala on opisywać chwilowy wzajemny obrót pewnych włókien materialnych na skutek deformacji niesprężystych, ale nie ich obrotu sztywnego w konfiguracji odciążonej.

Reper orientujący nie jest obiektem materialnym, zaś ewolucja jego orientacji, tj. obrót względem ustalonego laboratoryjnego układu współrzędnych, może następować wyłącznie na skutek niezerowej w danej chwili zmiany odkształceń niesprężystych – $\underline{\mathbf{F}}^{in}(t) \neq \underline{\mathbf{0}}$.

Rodzina *izoklinicznych* konfiguracji naturalnych \mathcal{R}_{iso} to taki zbiór konfiguracji naturalnych $'B^*$ – odciążonych sprężystości, dla których pewien reper orientujący $\{\underline{\mathbf{m}}_i\}$ nie zmienia swojej orientacji – nie obraca się, w żadnym momencie zaawansowania deformacji niesprężystej określonej tensorem $\underline{\mathbf{F}}^{in}$, tj. $\dot{\underline{\mathbf{m}}}_i(t) \equiv \underline{\mathbf{0}}$.

Z matematycznego punktu widzenia wybór reperu orientującego $\{\underline{\mathbf{m}}_i\}$ i żądanie jego izokliniczności $\{\dot{\underline{\mathbf{m}}}_i = \underline{\mathbf{0}}\}$ jest równoznaczne z zadaniem w każdej chwili czasu trzech warunków kinematycznych prowadzących do jednoznacznego zorientowania rodziny konfiguracji $'B^*$, a zatem jednoznacznego określenia gradientu $\underline{\mathbf{F}}^{in}(t)$.

Zgodnie z koncepcją Mandela reper orientujący można wyznaczać operacyjnie – w sposób fizycznie uzasadniony, za pomocą następującej procedury. Załóżmy, że w kolejnych chwilowych konfiguracjach odciążonych można wyróżnić w każdym punkcie materialnym pewną płaszczyznę materialną o normalnej $\underline{\mathbf{m}}_2(t)$ oraz leżący w tej płaszczyźnie kierunek materialny o wersorze $\underline{\mathbf{m}}_1(t)$. Zbiór złożony z wersorów $\underline{\mathbf{m}}_1$, $\underline{\mathbf{m}}_2$, $\underline{\mathbf{m}}_3 = \underline{\mathbf{m}}_1 \times \underline{\mathbf{m}}_2$, gdzie symbol „ \times ” oznacza iloczyn wektorowy, stanowi reper orientujący. Spektakularnym przykładem wyznaczanego zgodnie z powyższą procedurą reperu orientującego jest reper stowarzyszony z siatką krystalograficzną, w określonym punkcie materialnym materiału polikrystalicznego, opisywanego z wykorzystaniem krystalograficznej teorii plastyczności. Wtedy płaszczyzną o wersorze $\underline{\mathbf{m}}_2$ jest płaszczyzna poślizgu, zaś kierunkiem materialnym o wersorze $\underline{\mathbf{m}}_1$ jest kierunek poślizgu plastycznego. Wykorzystanie do opisu procesu deformacji niesprężystej izoklinicznych rodziny konfiguracji naturalnych powoduje, że wersory określające w nich systemy i kierunki poślizgu plastycznego nie zależą od czasu.

W ogólnym przypadku dowolnej rodziny konfiguracji naturalnych – nieizoklinicznej, orientacja reperu orientującego $\{\underline{\mathbf{m}}_i\}$ będzie ewoluować na skutek procesu deformacji niesprężystej prowadzącego do kolejnych konfiguracji odciążonych sprężystości $'B^*$. Ewolucję tę można scharakteryzować za pomocą spinu $\underline{\mathbf{\Omega}}^m(t)$ zdefiniowanego wzorem, patrz także [61]

$$\underline{\Omega}^m(t) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1,3} [\dot{\underline{\mathbf{m}}}_i \otimes \underline{\mathbf{m}}_i - \underline{\mathbf{m}}_i \otimes \dot{\underline{\mathbf{m}}}_i], \quad \underline{\Omega}^m = \sum \omega_{ij}^m \underline{\mathbf{m}}_i \otimes \underline{\mathbf{m}}_j, \quad -\underline{\Omega}^m = \underline{\Omega}^m, \quad (\text{A 7.40})$$

$$\underline{\Omega}^m(t) = \dot{\underline{\mathbf{m}}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1 + \dot{\underline{\mathbf{m}}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2 + \dot{\underline{\mathbf{m}}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 = -[\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \dot{\underline{\mathbf{m}}}_1 + \underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \dot{\underline{\mathbf{m}}}_2 + \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \dot{\underline{\mathbf{m}}}_3].$$

Indeks górny „ m ” wskazuje, iż spin ten charakteryzuje ewolucję dowolnego, ale ustalonego reperu orientującego $\{\underline{\mathbf{m}}_i\}$. Należy zwrócić uwagę, że dla tego samego procesu deformacji niesprężystej określonego tensorem $\mathbf{F}^m(t)$ przyjmuje on inne wartości dla różnych ustalonych reperów orientujących. Można pokazać poprzez obliczenie wprost korzystając z powyższej definicji (A7.40), że

$$\dot{\underline{\mathbf{m}}}_1 = \underline{\Omega}^m \underline{\mathbf{m}}_1 = -\omega_{12}^m \underline{\mathbf{m}}_2 - \omega_{13}^m \underline{\mathbf{m}}_3, \quad \dot{\underline{\mathbf{m}}}_2 = \underline{\Omega}^m \underline{\mathbf{m}}_2 = \omega_{12}^m \underline{\mathbf{m}}_1 - \omega_{23}^m \underline{\mathbf{m}}_3, \quad (\text{A 7.41})$$

$$\dot{\underline{\mathbf{m}}}_3 = \underline{\Omega}^m \underline{\mathbf{m}}_3 = \omega_{13}^m \underline{\mathbf{m}}_1 + \omega_{23}^m \underline{\mathbf{m}}_2, \quad \dot{\underline{\mathbf{m}}}_i \equiv \underline{\omega}^m \underline{\mathbf{m}}_i,$$

oraz, że

$$(\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_1) = -\omega_{12}^m = -(\underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_2), \quad (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_1) = -\omega_{13}^m = -(\underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_3), \quad (\text{A 7.42})$$

$$(\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_2) = -\omega_{23}^m = -(\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_3).$$

Wygodnie jest wprowadzić następujące oznaczenia,

$$A_i = \dot{\underline{\mathbf{m}}}_i \otimes \underline{\mathbf{m}}_i - \underline{\mathbf{m}}_i \otimes \dot{\underline{\mathbf{m}}}_i. \quad (\text{A 7.43})$$

Korzystając z (A7.41)₃, a następnie eliminując wyrażenia zawierające człony $\omega_{13}^m \underline{\mathbf{m}}_3$ i $\omega_{23}^m \underline{\mathbf{m}}_3$ przy użyciu (A7.41)_{1,2}, można wyrazić $A_3 = \dot{\underline{\mathbf{m}}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \dot{\underline{\mathbf{m}}}_3$ następująco

$$A_3 = \omega_{13}^m \underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \omega_{13}^m \underline{\mathbf{m}}_1 + \omega_{23}^m \underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \omega_{23}^m \underline{\mathbf{m}}_2, \quad (\text{A 7.44})$$

a następnie z użyciem (A7.42)₁

$$A_3 = A_1 + A_2 - 2\omega_{12}^m [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2 - \underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1], \quad (\text{A 7.45})$$

$$A_3 = A_1 + A_2 + [(\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_1) - (\underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_2)] [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2 - \underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1].$$

W analogiczny sposób można otrzymać

$$A_1 = A_2 + A_3 - 2\omega_{23}^m [\underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2], \quad (\text{A 7.46})$$

$$A_1 = A_2 + A_3 + [(\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_2) - (\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_3)] [\underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2],$$

i w końcu

$$A_2 = A_1 + A_3 - 2\omega_{13}^m [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1], \quad (\text{A 7.47})$$

$$A_2 = A_1 + A_3 + [(\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_1) - (\underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_3)] [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1].$$

Zgodnie ze wzorem (A7.40)₁ $\underline{\Omega}^m = (A_1 + A_2 + A_3)/2$. Sumując prawe i lewe strony wzorów (A7.45)₁, (A7.46)₁, (A7.47)₁ otrzymuje się

$$\underline{\Omega}^m = \omega_{12}^m [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2 - \underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1] + \omega_{13}^m [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1] + \omega_{23}^m [\underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2], \quad (\text{A 7.48})$$

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}^m = & -(\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_1) [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2 - \underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1] - (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_1) [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1] + \\ & - (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_2) [\underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2]. \end{aligned}$$

Przy czym, do uzyskania ostatniego wzoru powyżej użyto zależności (A7.42).

Znalezienie jawnej postaci zależności spinu $\underline{\Omega}^m$ od $\underline{\mathbf{L}}^*$ ($\underline{\mathbf{L}}^* = \dot{\underline{\mathbf{F}}}^{in} \underline{\mathbf{F}}^{-in}$) – por. (7.2)₄ i $\{\underline{\mathbf{m}}_i\}$ wymaga obliczenia pochodnych materialnych wektorów reperu orientującego.

Weźmy przyrostowy wektor $d\underline{\mathbf{x}}$ o kierunku wektora $\underline{\mathbf{m}}_1$ leżący w płaszczyźnie $f(\underline{\mathbf{x}}, t) = 0$ o normalnej $\underline{\mathbf{m}}_2$. Wektor ten deformuje się zgodnie ze wzorami

$$d\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{F}}^{in} d\underline{\mathbf{X}}, \text{ skąd w klasyczny sposób } d\dot{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\mathbf{L}}^* d\underline{\mathbf{x}}. \text{ Pochodną materialną wektora } \underline{\mathbf{m}}_1 \text{ można wyznaczyć obliczając pochodną wyrażenia } \underline{\mathbf{m}}_1 = d\underline{\mathbf{x}} / |d\underline{\mathbf{x}}| \text{ by otrzymać}$$

$$\dot{\underline{\mathbf{m}}}_1 = \underline{\mathbf{L}}^* \underline{\mathbf{m}}_1 - (\underline{\mathbf{m}}_1 \cdot \underline{\mathbf{L}}^* \underline{\mathbf{m}}_1) \underline{\mathbf{m}}_1. \quad (\text{A 7.49})$$

Ponieważ wektor $d\underline{\mathbf{x}}$ leży w płaszczyźnie $f(\underline{\mathbf{x}}, t) = 0$, więc w każdej ustalonej chwili czasu spełniona jest relacja $(\nabla f)^T \cdot d\underline{\mathbf{x}} = 0$ skąd

$$((\dot{\nabla} f)^T \cdot d\underline{\mathbf{x}} + (\nabla f)^T \cdot (\underline{\mathbf{L}}^* d\underline{\mathbf{x}}) = 0) \Leftrightarrow (\dot{\nabla} f = -(\underline{\mathbf{L}}^*)^T \nabla f). \quad (\text{A 7.50})$$

Pochodną materialną wektora $\underline{\mathbf{m}}_2$ można wyznaczyć obliczając pochodną wyrażenia $\underline{\mathbf{m}}_2 = \nabla f / |\nabla f|$ by otrzymać

$$\dot{\underline{\mathbf{m}}}_2 = -(\underline{\mathbf{L}}^*)^T \underline{\mathbf{m}}_2 + (\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{L}}^* \underline{\mathbf{m}}_2) \underline{\mathbf{m}}_2. \quad (\text{A 7.51})$$

Wykorzystując wzory (A7.49) i (A7.51) można obliczyć wartości iloczynów skalarnych

$$\begin{aligned} (\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_1) &= (\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{L}}^* \underline{\mathbf{m}}_1) = (\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\Omega}^* \underline{\mathbf{m}}_1) + (\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1) = -\omega_{12}^* + (\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1), \\ (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_1) &= (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\mathbf{L}}^* \underline{\mathbf{m}}_1) = (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\Omega}^* \underline{\mathbf{m}}_1) + (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1) = -\omega_{13}^* + (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1), \\ (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \dot{\underline{\mathbf{m}}}_2) &= -(\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\mathbf{L}}^{*T} \underline{\mathbf{m}}_2) = (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\Omega}^* \underline{\mathbf{m}}_2) - (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_2) = -\omega_{23}^* - (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_2). \end{aligned}$$

Podstawiając powyższe do (A7.48)₂ otrzymuje się

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}^m = & (\omega_{12}^* - (\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1)) [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2 - \underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1] + \\ & + (\omega_{23}^* + (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_2)) [\underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2] + \\ & + (\omega_{13}^* - (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1)) [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1], \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}^m(\underline{\mathbf{L}}^*, \underline{\mathbf{m}}_i) = & \underline{\Omega}^* - (\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1) [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2 - \underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1] + \\ & - (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1) [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3 - \underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1] + \\ & - (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_2) [\underline{\mathbf{m}}_3 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2 - \underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_3]. \end{aligned} \quad (\text{A 7.53})$$

Alternatywnie, spin $\underline{\Omega}^m$ można wyrazić w postaci zależnej tylko od dwóch wersorów reperu orientującego $\underline{\mathbf{m}}_1$ i $\underline{\mathbf{m}}_2$ następująco

$$\underline{\Omega}^m = \underline{\Omega}^* + (\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1) [\underline{\mathbf{m}}_1 \otimes \underline{\mathbf{m}}_2 - \underline{\mathbf{m}}_2 \otimes \underline{\mathbf{m}}_1] + (\underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1) \otimes \underline{\mathbf{m}}_1 - \underline{\mathbf{m}}_1 \otimes (\underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1) + \underline{\mathbf{m}}_2 \otimes (\underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_2) - (\underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_2) \otimes \underline{\mathbf{m}}_2. \quad (\text{A } 7.54)$$

W celu otrzymania ostatniego wzoru należy podstawić (A7.44) do (A7.40) oraz skorzystać z (A7.49) i (A7.51).

Jak już stwierdzono, jeżeli orientacja konfiguracji odciążonych \mathcal{B}^* zostanie tak dobrana, że pewien reper orientujący $\{\underline{\mathbf{m}}_i\}$ nie zmienia w czasie swojej orientacji ($\dot{\underline{\mathbf{m}}}_i = \underline{\mathbf{0}}$) to jest to rodzina konfiguracji izoklinicznych \mathcal{K}_{iso} , ściślej $\underline{\mathbf{m}}_i$ – izoklinicznych. Zgodnie ze wzorem (A7.40) oznacza to, że wtedy spin $\underline{\Omega}^m(t) \equiv \underline{\mathbf{0}}$. Podstawienie $\underline{\Omega}^m = \underline{\mathbf{0}}$ w relacji (A7.53) prowadzi do uzyskania trzech równań więzów

$$\underline{\Omega}^* = \underline{\Omega}^*(\underline{\mathbf{D}}^*) = \hat{\underline{\Omega}}(\underline{\mathbf{D}}^*; \underline{\mathbf{m}}_i), \quad \hat{\underline{\Omega}} \equiv \hat{\omega}_{ij} [\underline{\mathbf{m}}_i \otimes \underline{\mathbf{m}}_j - \underline{\mathbf{m}}_j \otimes \underline{\mathbf{m}}_i] / 2, \quad (\text{A } 7.55)$$

$$\hat{\omega}_{12} = (\underline{\mathbf{m}}_2 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1) = -\hat{\omega}_{21}, \quad \hat{\omega}_{13} = (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_1) = -\hat{\omega}_{31}, \quad \hat{\omega}_{32} = (\underline{\mathbf{m}}_3 \cdot \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{m}}_2) = -\hat{\omega}_{23}.$$

Wersory $\{\underline{\mathbf{m}}_i\}$ pełnią tutaj rolę ustalonego parametru. Zatem własność izokliniczności rodziny konfiguracji odciążonych oznacza wymóg istnienia relacji pomiędzy tensorem spinu $\underline{\Omega}^*$ i tensorem gradientu prędkości deformacji $\underline{\mathbf{D}}^*$. Przy czym relacja ta jak wynika z (A7.55) musi być taka, że

$$\underline{\Omega}^*(\underline{\mathbf{D}}^* = \underline{\mathbf{0}}) = \underline{\mathbf{0}}, \quad (\underline{\mathbf{D}}^* = \underline{\mathbf{0}}) \Rightarrow (\underline{\Omega}^* = \underline{\mathbf{0}}). \quad (\text{A } 7.56)$$

Istnienie takiej relacji o własności (A7.56) jest warunkiem koniecznym i wystarczającym by rodzina konfiguracji naturalnych określona tensorem $\underline{\mathbf{F}}^{in}$ była izokliniczna.

Jak łatwo zauważyć ze wzoru (A7.55) ta sama deformacja niesprężysta ($\underline{\mathbf{F}}^{in}(t)$) prowadzi do różnych rodzin izoklinicznych konfiguracji naturalnych przy różnych wyborach reperu orientującego $\{\underline{\mathbf{m}}_i\}$. Rodzin takich jak stąd wynika jest nieskończenie wiele.

W przypadku budowy makroskopowego izotropowego modelu zachowania stopów z pamięcią kształtu nie występują przesłanki natury fizycznej dla wyboru orientacji rodziny konfiguracji odciążonych. Dlatego orientacja ta została określona warunkiem, aby w dowolnej chwili procesu deformacji Eulerowski tensor spinu niesprężystego był tożsamościowo równy zeru $\underline{\omega}^{in}(t) \equiv \underline{\mathbf{0}}$ – por. (7.54), prowadzącym do uproszczenia wzorów matematycznych modelu konstytutywnego. Obecnie zostanie wykazane, że rodzina konfiguracji naturalnych \mathcal{K}_{ω_0} , określona tym

warunkiem kinematycznym, jest rodziną izokliniczną. W takim wypadku jest – por. (7.2)₄, (7.3)₄, (7.4)₄

$$\underline{\mathbf{d}}^{in} = \underline{\mathbf{L}}^{in} = \underline{\mathbf{L}}^{inT}, \quad \underline{\mathbf{L}}^* = \underline{\mathbf{F}}^e \underline{\mathbf{d}}^{in} \underline{\mathbf{F}}^e, \quad (\text{A } 7.57)$$

$$\underline{\mathbf{D}}^* = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{F}}^e \underline{\mathbf{d}}^{in} \underline{\mathbf{F}}^e + \underline{\mathbf{F}}^e \underline{\mathbf{d}}^{inT} \underline{\mathbf{F}}^e], \quad \underline{\mathbf{\Omega}}^* = \frac{1}{2} [\underline{\mathbf{F}}^e \underline{\mathbf{d}}^{in} \underline{\mathbf{F}}^e - \underline{\mathbf{F}}^e \underline{\mathbf{d}}^{inT} \underline{\mathbf{F}}^e].$$

Powyższe związki w uwikłany sposób określają relację $\underline{\mathbf{\Omega}}^* = \underline{\mathbf{\Omega}}^*(\underline{\mathbf{D}}^*)$ – por. (A7.55). Związek ten ma własność (A7.56), jak łatwo wykazać. Gdyż jeśli $(\underline{\mathbf{d}}^{in} \rightarrow \underline{\mathbf{0}})$ to $(\underline{\mathbf{D}}^* \rightarrow \underline{\mathbf{0}})$ i $(\underline{\mathbf{\Omega}}^* \rightarrow \underline{\mathbf{0}})$. Zatem rodzina konfiguracji naturalnych \mathcal{K}_{ω^0} określona warunkiem $\underline{\omega}^{in} = \underline{\mathbf{0}}$ jest izokliniczna.

Warto w tym miejscu przedyskutować jak rodzina konfiguracji izoklinicznych \mathcal{K}_{ω^0} ma się do rodziny konfiguracji izoklinicznych \mathcal{K}_{Ω^*0} , zdefiniowanej warunkiem kinematycznym $\underline{\mathbf{\Omega}}^*(t) \equiv \underline{\mathbf{0}}$, często stosowanym w klasycznej izotropowej teorii plastyczności. W klasycznej izotropowej teorii plastyczności zakłada się własność izotropii w stosunku do dwóch elementów tej teorii:

– po pierwsze zakłada się izotropowość własności sprężystych materiału co powoduje, że tensor naprężenia Kirchoffa, Cauchego oraz przestrzenne tensory odkształcenia z rodziny Hilla wszystkie są kolinearne z tensorem $\underline{\mathbf{V}}^e$, a zatem wszystkie te tensory komutują wzajemnie ze sobą i z tensorem $\underline{\mathbf{V}}^e$, np. $\underline{\sigma} \underline{\mathbf{V}}^e = \underline{\mathbf{V}}^e \underline{\sigma}$. Na konfiguracjach naturalnych oznacza to kolinearność sprzężonych poprzez pracę sprężystą odpowiedników Lagrangeowskich z tensorem $\underline{\mathbf{U}}^e$, w szczególności $\underline{\mathbf{T}}^{Re} \underline{\mathbf{U}}^e = \underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{T}}^{Re} = \underline{\mathbf{T}}^e(0) \underline{\mathbf{U}}^e = \underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{T}}^e(0)$,

– po drugie zakłada się izotropowość prawa płynięcia plastycznego w tym sensie, że wyrażone jest ono na konfiguracji aktualnej za pomocą izotropowej względem $\underline{\mathbf{V}}^e$ funkcji tensorowej co powoduje że tensory $\underline{\mathbf{d}}^{in}$ i $\underline{\mathbf{V}}^e$ komutują $\underline{\mathbf{d}}^{in} \underline{\mathbf{V}}^e = \underline{\mathbf{V}}^e \underline{\mathbf{d}}^{in}$, np. często prawo płynięcia plastycznego przyjmowane jest w postaci $\underline{\mathbf{d}}^{in}(\underline{\mathbf{V}}^e) = \lambda \frac{\underline{\sigma}}{\underline{\sigma}}$. Na konfiguracjach naturalnych pociąga to za sobą kolinearność $\underline{\mathbf{D}}^*$ i $\underline{\mathbf{U}}^e$, czyli własność $\underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{U}}^e = \underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{D}}^*$.

Korzystając z zależności (7.2), (7.3), (7.4) i $\underline{\mathbf{F}}^e = \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\mathbf{U}}^e$ otrzymuje się następujące ogólne wzory

$$\underline{\mathbf{d}}^{in} = \underline{\mathbf{R}}^e 0.5 [\underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{U}}^e + \underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{U}}^e]^T \underline{\mathbf{R}}^e + \underline{\mathbf{R}}^e 0.5 [\underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{\Omega}}^* \underline{\mathbf{U}}^e + \underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{\Omega}}^* \underline{\mathbf{U}}^e]^T \underline{\mathbf{R}}^e, \quad (\text{A } 7.58)$$

$$\underline{\omega}^{in} = \underline{\mathbf{R}}^e 0.5 [\underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{U}}^e - \underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{U}}^e]^T \underline{\mathbf{R}}^e + \underline{\mathbf{R}}^e 0.5 [\underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{\Omega}}^* \underline{\mathbf{U}}^e - \underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{\Omega}}^* \underline{\mathbf{U}}^e]^T \underline{\mathbf{R}}^e.$$

Korzystając z własności izotropii prawa płynięcia na konfiguracji naturalnej, a zatem kolinearności tensorów $\underline{\mathbf{D}}^*$ i $\underline{\mathbf{U}}^e$, $\underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{U}}^e = \underline{\mathbf{U}}^e \underline{\mathbf{D}}^*$ jest

$$\underline{\mathbf{d}}^{in} = \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{R}}^{eT} + \underline{\mathbf{R}}^e 0.5 [\underline{\mathbf{U}}^e \underline{\underline{\Omega}}^* \underline{\mathbf{U}}^{e-1} + \underline{\mathbf{U}}^{e-1T} \underline{\underline{\Omega}}^* \underline{\mathbf{U}}^e] \underline{\mathbf{R}}^{eT}, \quad (\text{A 7.59})$$

$$\underline{\underline{\omega}}^{in} = \underline{\mathbf{R}}^e 0.5 [\underline{\mathbf{U}}^e \underline{\underline{\Omega}}^* \underline{\mathbf{U}}^{e-1} - \underline{\mathbf{U}}^{e-1T} \underline{\underline{\Omega}}^* \underline{\mathbf{U}}^e] \underline{\mathbf{R}}^{eT}.$$

Korzystając z warunku definiującego rodzinę konfiguracji izoklinicznych $\mathcal{R}_{\underline{\underline{\Omega}}^* = \underline{\mathbf{0}}}$ ($\underline{\underline{\Omega}}^* = \underline{\mathbf{0}}$) otrzymuje się zależności

$$\underline{\mathbf{d}}^{in} = \underline{\mathbf{R}}^e \underline{\mathbf{D}}^* \underline{\mathbf{R}}^{eT}, \quad \underline{\underline{\omega}}^{in} = \underline{\mathbf{0}}. \quad (\text{A 7.60})$$

Powyższe oznacza, że w przypadku klasycznej izotropowej sprężystości i plastycznej teorii plastyczności warunki kinematyczne $\underline{\underline{\Omega}}^* = \underline{\mathbf{0}}$, $\underline{\underline{\omega}}^{in} = \underline{\mathbf{0}}$ odpowiednio oznaczają wybór tej samej rodziny konfiguracji izoklinicznych. Reperem orientującym tej rodziny jest układ trzech różnych kierunków głównych tensora $\underline{\mathbf{D}}^*$.

W wypadku rozwijanego tutaj modelu materiałów z pamięcią kształtu tensor $\underline{\mathbf{d}}^{in}$ nie jest wyrażony poprzez izotropową funkcję tensora $\underline{\underline{\tau}}$ – por. (7.69) w związku z tym w ogólnym przypadku tensory $\underline{\mathbf{d}}^{in}$ i $\underline{\mathbf{V}}^e$ nie komutują, zaś warunki $\underline{\underline{\omega}}^{in} = \underline{\mathbf{0}}$ i $\underline{\underline{\Omega}}^* = \underline{\mathbf{0}}$ wyznaczają różne rodziny izokliniczne.

Rozdział 8. Podsumowanie i wnioski końcowe

W niniejszej rozprawie wszechstronnie omówiono stan wiedzy dotyczący pseudosprężystego zachowania stopów z pamięcią kształtu. Omówiono zarówno wyniki badań doświadczalnych, jak również różne podejścia do modelowania zachowania stopów z pamięcią kształtu i związanych z tym efektów siłowych, odkształceniowych i termicznych. Zaproponowano rozwiązania dla szeregu otwartych problemów naukowych, związanych z zakresem pseudosprężystego zachowania stopów z pamięcią kształtu. W szczególności, opierając się na rozważaniach mikro-mechanicznych, uzasadniono przyjmowaną na poziomie fenomenologicznego opisu makroskopowego postać potencjału termodynamicznego energii swobodnej. Dokonano weryfikacji doświadczalnej założeń makroskopowego modelu zaproponowanego przez Ranieckiego i Lexcellenta, tzw. modelu R_L . W tym celu opracowano przy pomocy zaawansowanego oprogramowania Dadisp, dane doświadczalne uzyskane w programie prób izotermicznych dla próbki rurkowej wykonanej ze stopu NiTi, podawanej proporcjonalnym w przestrzeni naprężeń ścieżkom obciążenia (złożone stany naprężenia). Te same dane wykorzystano, po ich stosownym opracowaniu, do weryfikacji doświadczalnej formalnego modelu kinetyki martenzytycznej przemiany fazowej zaproponowanego w modelu R_L oraz do sformułowania nowego tzw. specyficznego modelu kinetyki termosprężystej przemiany martenzytycznej. Sformułowano również, w formalizmie skończonych deformacji, trójwymiarowy termodynamiczny model pseudosprężystego zachowania izotropowych stopów z pamięcią kształtu, w oparciu o multiplikatywny rozkład tensora gradientu deformacji. Model ten stanowi rozszerzenie modelu R_L . Wykonane prace mają istotne znaczenie praktyczne. Opracowana teoria stanowi podstawę dla rzetelnego charakteryzowania stopów z pamięcią kształtu. Zidentyfikowanie stałych i funkcji materiałowych teorii pseudosprężystości, w sposób jednoznaczny charakteryzuje zachowanie danego stopu SMA, w zakresie jego pseudosprężystego zachowania. Teoria ta może zatem stanowić podstawę teoretyczną dla opracowania norm materiałów z pamięcią kształtu. Inną istotną korzyścią praktyczną, jaka może być osiągnięta, jest możliwość stworzenia silnego narzędzia inżynierskiego, jakim jest kod metody elementów skończonych z zaimplementowanym modelem konstytutywnym wyspecyfikowanym w rozdziale siódmym. Z pomocą takiego narzędzia można symulować zachowanie złożonych konstrukcji inżynierskich wykorzystujących cechy funkcjonalne stopów z pamięcią kształtu, tj. wykonane z takich stopów w całości lub posiadających elementy wykonane z SMA. W rezultacie możliwa jest ocena wielkości efektów siłowych, odkształceniowych, termicznych oraz zaawansowanie martenzytycznej przemiany fazowej.

Dalsze teoretyczne prace badawcze poświęcone stopom z pamięcią kształtu powinny, w przekonaniu autora, być skoncentrowane na budowie jednolitej trójwymiarowej teorii pseudosprężystości i pseudoplastyczności stopów z pamięcią

kształtu, obejmującej opis zarówno zjawiska pseudosprężystości, jak i jednokierunkowego efektu pamięci kształtu. Pożądane są dalsze metodyczne prace doświadczalne nad zachowaniem stopów SMA w złożonych stanach naprężenia. W szczególności program badań izostatycznych, w których czynnikiem wymuszającym są zmiany temperatury przy różnych schematach towarzyszącego przemianie fazowej naprężenia. Należy wykonać próby przy „nieproporcjonalnych” obciążeniach termo-mechanicznych mające na celu wykrycie przebiegu tzw. neutralnych ścieżek obciążenia tj. takich które z jednej strony nie prowadzą do aktywnej przemiany fazowej, a z drugiej nie prowadzą do odciążenia sprężystego. Niezwykle ważnym obszarem badań, który umożliwi bardziej precyzyjny opisu zachowania stopów z pamięcią kształtu, są badania nad kinetyką termosprężystej przemiany fazowej. Niestety wymagane są tutaj stosunkowo skomplikowane prace teoretyczno-doświadczalne, gdyż nie tylko należy wykonać szeroko zakrojony program prób termomechanicznych w złożonych stanach naprężenia, przy czym najbardziej pożądanym byłby bezpośredni pomiar udziału masy fazy martenzytycznej równocześnie z pomiarem efektów odkształceniowych towarzyszących przemianie, ale również należy podjąć próbę powiązania formalnej postaci matematycznej równań kinetyki przemiany z mechanizmami fizycznymi.

Bibliografia

- [1] Auricchio F., Taylor R. (1997) *Shape memory alloys: modeling and numerical simulations of the finite-strain superelastic behavior*, Comput.Methods Appl.Mech.Engng. 143, 175-194.
- [2] Annand L., Gurtin M. (2003) *Thermal effects in the superelasticity of crystalline shape-memory materials*, J.Mech.Phys.Solids. 51, 1015-1058.
- [3] Ball J., James R. (1987) *Fine phase mixtures as minimizers of energy*, Arch. Rat. Mech. Anal., 100, 13-52.
- [4] Basinski Z., Christian J. (1954) *Experiments on the Martensitic Transformation in Single Crystals of Indium-Thallium Alloys*, Acta. Met. 2, 148-166.
- [5] Bathe K. J. (1996) *Finite Element Procedures*, Prentice Hall.
- [6] Bhattacharya K. (2003) *Microstructure of Martensite*, Oxford University Press.
- [7] Bouvet C., Calloch S., Lexcellent C. (2002) *Mechanical Behavior of a Cu-Al-Be Shape Memory Alloy Under Multiaxial Proportional and Non-proportional Loadings*, Transactions of ASME 124, 112-124.
- [8] Bouvet C., Calloch S., Lexcellent C. (2004) *A Phenomenological Model for Pseudoelasticity of Shape Memory Alloys under Multiaxial Proportional and Non-Proportional Loadings*, Eur. J. Mech., A/Solids. 23, 37-61.
- [9] Bowles J., MacKenzie J. (1954) *The crystallography of martensitic transformations i and ii*, Acta. Met. 2, 129-137, 138-147.
- [10] Boyd J., Lagoudas D. (1996) *A Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloy*, Int. J. Plasticity, 12, 6, 805-842.
- [11] Brinson C., Schmidt I., Lammering R. (2004), *Stress-induced transformation behavior of a polycrystalline NiTi shape memory alloy: micro and macromechanical investigations via in situ optical microscopy*, J. Mech. Phys. Solids, 52, 1549-1571.
- [12] Buehler W., Gilfrich J., Weiley R. (1963) *Effect of low-temperature phase changes on mechanical properties of alloys near composition TiNi*, J.Appl.Phys., 34, 1475-1477.
- [13] Burkart M., and Read T. (1953) *Diffusionless Phase Change in the Indium-Thallium System*, Trans. AIME, 197, 1516-1524.
- [14] Chang L., Read T. (1951) *Plastic deformation and diffusionless phase changes in metals: the gold-cadmium beta phase*, Trans.of AIME, 191, 47-52.
- [15] Cherkaoui M.; Berveiller M., Sabar H. (1998) *Micromechanical modeling of martensitic transformation induced plasticity (TRIP) in austenitic single crystals*, Int. J. Plasticity, 14, 7, 597-626.
- [16] Cherkaoui M., Berveiller M., Lemoine X. (2000) *Couplings between plasticity and martensitic phase transformation: overall behavior of polycrystalline TRIP steels*, Int. J. Plasticity, 16, 10-11, 1215-1241.
- [17] Christian J. (1982) *Deformation by moving interfaces*, Metall. Trans. 13A, 509-538.

- [18] Christian J.W. (2002) *The theory of transformations in metals and alloys (Part I, II)*, 3rd Edition, ISBN: 0-08-044019-3, Pergamon Press.
- [19] Delaey L., Krishnan R., Tas H., Warlimont H. (1974) *Thermoelasticity, pseudoelasticity and the memory effects associated with martensitic transformations, Part 1, 2 and 3*, J.Mater.Sci., 9, 1521-1555.
- [20] DesRoches R., and Delemont M. (2003) *Seismic retrofit of simply supported bridges using shape memory alloys*, Engineering Structures, 24, 325-332.
- [21] Duerig T.W. (2002) *The Use of Superelasticity in Modern Medicine*, MRS Bulletin February 2002, www.mrs.org/publications/bulletin.
- [22] Falk F. (1983) *One dimensional model of shape memory alloys*, Arch. Mech., 35, 63-84.
- [23] Funakubo H., Ed. (1987) *Shape Memory Alloys*, Gordon and Breach Science Publishers.
- [24] Greninger A., Mooradian V. (1938) *Strain transformation in metastable beta copper-zinc and beta copper-tin alloy*, Trans. AIME, 128, 337-368.
- [25] Helm D., Haupt P. (2003) *Shape memory behavior: modeling within continuum thermomechanics*, International Journal of Solids and Structures 40, 827-849.
- [26] Hill R. (1963) *Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles*, J.Mech.Phys.Solids. 11, 357-372.
- [27] Hill R., Rice J. (1973) *Elastic Potentials and the Structure of Inelastic Constitutive Laws*, SIAM J. Appl. Math. 25, 448-461.
- [28] Hill R. (1978) *Aspects of invariance in solid mechanics*, Adv.Appl.Mech. 18, 1-75.
- [29] Hornbogen E., Wassermann G. (1956) Zeit. Metall. 47, 427-433.
- [30] Huang W. (2002) *On the selection of shape memory alloys for actuators*, Materials and Design, 23, 11-19.
- [31] Huo Y., Müller I. (1993) *Nonequilibrium Thermodynamics of Pseudoelasticity*, Continuum Mech. Thermodyn. 5, 3, 163-204.
- [32] Jung Y., Papadopoulos P., Ritchie R. (2004) *Constitutive modelling and numerical simulation of multivariant phase transformation in superelastic shape memory alloys*, Int. J. Numer. Meth Engng. 60, 429-460.
- [33] Kohl M., Dittmann D., Quandt E., Winzek B. (2000) *Thin film shape memory microvalves with adjustable operation temperature*, Sensors and Actuators A, 83, 214-219.
- [34] Koistinen D., Marburger R. (1959) *A general equation prescribing the extent of the austenite martensite transformation in pure iron-carbon alloys and plain carbon steels*, Acta Met. 7, 59-69.
- [35] Kurdjumov G., Khandros L. (1949) Dokl. Akad. Nauk SSSR, 66, 211-214.
- [36] Liang, C., Rogers, C. A. (1990) *One-Dimensional Thermomechanical Constitutive Relations for Shape Memory Materials*, J.Int.Mat.Sys.Struct., 1, 207-234.

- [37] Leclercq S., Lexcellent C. (1996) *A general macroscopic description of the thermomechanical behavior of shape memory alloys*, J. Mech. Phys. Solids, 44,6, 953-980.
- [38] Magee C. (1968) *The Nucleation of Martensite*, in: Phase Transformations, Ed. Aaronson H. ASM International, Menlo Park. 115-156.
- [39] Maki T., Kobayashi K., Minato M., Tamura I. (1984) Scr. Metall. 18, 1105-1109
- [40] Mandel J. *Thermodynamics and Plasticity*, in Foundations of Continuum Thermodynamics Delgado J., Nina N. Eds. (1974), pp 283-304.
- [41] Melton K. *General applications of SMA and smart materials*, pp. 220-239, in Otsuka K., Wayman C. Eds. (1999) Shape Memory Materials, Cambridge University Press, ISBN 0-521-663849.
- [42] Miyazaki S. *Medical and dental applications of shape memory alloys*, pp. 267-282, in Otsuka K., Wayman C. Eds. (1999) *Shape Memory Materials*, Cambridge University Press, ISBN 0-521-663849
- [43] Musolf A., Müller I., Santopuoli N., Seccia L. (2004) *Shape memory alloys for the conservation of cultural heritage: New applications also for real reversibility in the restoration operation*, DFG Preprint 104, <http://www.mathematic.uni-stuttgart.de/~mehrskalen/>.
- [44] Müller I., Xu H. (1991) *On the pseudoelastic hysteresis*, Acta Metall. Mater., 39, 263-271.
- [45] Nemat Naser S., Hori M. (1993) *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials*, North Holland.
- [46] Nishida M., Kaneko K., Takashima K., Yamaguchi K., Inaba T., (1989) *Static rock breaker using TiNi alloy reversible shape memory effect*, Proc. of Int. Conf. on Martensitic Transformations: 123-128. Rotterdam: Balkema.
- [47] Ogden R. (1984) *Nonlinear elastic deformations*. Chichester. Ellis Horwood.
- [48] Okhata I., Suzuki Y. *The design of shape memory alloy actuators and their applications*, pp. 240-266, in Otsuka K., Wayman C. Eds. (1999) Shape Memory Materials, Cambridge.
- [49] Olander A. (1932) *An Electrochemical Investigation of Solid Cadmium-Gold Alloys*, J. Am. Chem. Soc., 54, p. 3819.
- [50] Olson G.B., Owen W.S. (Eds.) (1992) *Martensite, A Tribute to Morris Cohen*, ASM International, ISBN 0-87170-434-X.
- [51] Orgeas L., Favier D. (1996) *Non symmetric tension compression behavior of NiTi alloy*, J. de Phys. IV, C8, 605-610.
- [52] Otsuka K., Wayman C. Eds. (1999) *Shape Memory Materials*, Cambridge University Press, ISBN 0-521-663849.
- [53] Otsuka K., Kakeshita T. (2002) *Science and Technology of Shape-Memory Alloys: New developments*, MRS Biulletin February 2002, www.mrs.org/publications/bulletin.
- [54] Otsuka K., Ren X. (2005) *Physical metallurgy of TiNi based shape memory alloys*, Progress in Materials Science, 50, 511-678.

- [55] Patoor E., Eberhardt A., Berveiller M. (1988) *Thermomechanical behaviour of shape memory alloys*, Arch. Mech., 40, 775-794.
- [56] Pascal Yu., Monasevich L. (1981) *Hysteresis features of the martensitic transformation of titanium nickelide*, Phys. Met. Metall., 52, 95-99.
- [57] Porter D., Easterling K. (1992) *Phase transformations in metals and alloys*, Chapman & Hall.
- [58] Rachinger W. (1958) Brit. J. Appl. Phys., 9, 250-252.
- [59] Raghavan (1992) *Kinetics of martensitic transformation*, in Olson G. Owen W. Eds., *Martensite A Tribute to Morris Cohen*, ASM International.
- [60] Raniecki B., Nguyen H. (1984) *Isotropic elastic-plastic solids at finite strain and arbitrary pressure*. Arch. Mech. 36, 5-6, 687-704.
- [61] Raniecki B., Samanta S. (1989) *The thermodynamic model of rigid-plastic solid with kinematic hardening, plastic spin and orientation variables*, Arch. Mech. 41, 5, 747-758.
- [62] Raniecki B., Lexcelent C., Tanaka K. (1992) *Thermodynamic models of pseudoelastic behaviour of shape memory alloys*, Arch.Mech. 44/3, 261-284.
- [63] Raniecki B., Lexcelent C. (1994) *RL – models of pseudoelasticity and their specifications for some shape memory alloys*, Eur. J. Mech., A/Solids. 13/1, 21-50.
- [64] Raniecki B. (1996) *Termomechanika pseudosprężystości materiałów z pamięcią kształtu*, w monografii *Podstawy Termomechaniki Materiałów z Pamięcią Kształtu*, Tom I w serii *Współczesne Trendy w Mechanice Materiałów*, Ed. W.K. Nowacki, 55-140, Warszawa.
- [65] Raniecki B., Lexcelent C. (1998) *Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys*, Eur. J. Mech., A/Solids. 17, 185-205.
- [66] Raniecki B., Dietrich L., Kowalewski Z., Socha G., Miyazaki S., Tanaka K., Ziółkowski A. (1999) *Experimental methodology for NiTi shape memory alloy testing under complex stress state*, Arch. Mech., 51, 726-744.
- [67] Raniecki B., Miyazaki S., Tanaka K., Dietrich L., Lexcelent C., (1999) *Deformation behaviour of NiTi shape memory alloy undergoing R-phase reorientation in torsion – tension (compression) tests*, Arch. Mech., 51, 745-784.
- [68] Raniecki B., Tanaka K., Ziółkowski A. (2001) *Testing and Modeling of NiTi SMA at Complex Stress State – Selected Results of Polish-Japanese Research Cooperation*, Mater. Sci. Res. Int. 2, 327-334.
- [69] Reynolds J., Bever M. (1952) Trans. AIME, 54, 1065-1066.
- [70] Rice J.R. (1971) *Inelastic constitutive relations for solids: an internal variable theory and its application to metal plasticity*, J. Mech. Phys. Solids, 19, 433-455.
- [71] Rogueda C. Lexcelent C., Bocher R (1996) *Experimental study of pseudoelastic behavior of CuZnAl polycrystalline shape memory alloy under tension - torsion proportional and non-proportional loading tests*, Arch. Mech. 48, 6, 1025-1045.

- [72] Sato A., Chischima E., Soma K., Mori T. (1982) *Shape memory effect in γ - ϵ transformation in Fe-30Mn-1Si alloy single crystals*, Acta Met. 30, 1177-1183.
- [73] Scheil E. (1932) Z. Anorg. Allg. Chem. 2007, p. 21.
- [74] Shirmohamadi M. (2002) *Sagging Line Mitigator Final Report for California Energy Commission*, P500-02-074F, December 2002, <http://www.energy.ca.gov/research/index.html>.
- [75] Sittner P., Tokuda M. (1994) *Thermoelastic martensitic transformation under combined stress-simulation and experiments*, Proc. of 15th Riso International Symposium on Material Science: Numerical Predictions of Deformation Processes and the Behavior of Real Materials. Ed. S. I. Andersen et. al. Riso National Laboratory, Roskilde, Denmark, 537-544.
- [76] Sittner P., Hara K., Takakura M., Tokuda M. Mie University Research Reports, 1994.
- [77] Socha G., Raniecki B., Dietrich L., Ziólkowski A., Z. Kowalewski L. (2000) *Deformation behaviour of Ti-51% at Ni undergoing martensitic phase transformation under complex stress state*, Wyd. IPPT, PAN, B-2/2000, Warszawa, 1-151.
- [78] Tanaka K., Kobayashi S., Sato Y. (1986) *Thermomechanics of transformation pseudoelasticity and shape memory effect in alloys*, Int. J. Plasticity, 2, 59-72.
- [79] Tanaka K., Nishimura F., Tobushi H. (1995) *Transformation start lines in TiNi and Fe-based shape memory alloys after incomplete transformations induced by mechanical and/or thermal loads*, Mech. Mater. 19, 271-280.
- [80] Tanaka K., Kitamura K., Miyazaki S. (1999) *Shape memory alloy preparation for multiaxial tests and identification of fundamental alloy performance*, Arch. Mech., 51, 6, 785-803.
- [81] Thamburaja P., Annand L. (2001) *Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture*, J.Mech.Phys.Solids. 49, 709-737.
- [82] Vacher P., Lexcellent C. (1991) *Study of pseudoelastic behavior of polycrystalline shape memory alloys by resistivity measurements and acoustic emission*, Proceedings of ICM VI, Kyoto, 3, 231-236.
- [83] Warlimont H., Delaey L. (1974) *Martensitic transformations in copper-silver- and gold-based alloys*, Pergamon Press, ISBN 0 08 017155 9, 1974.
- [84] Wayman C. (1971) *On memory effects related to martensitic transformations and observations in β -brass and Fe₃Pt*, Scripta Metall., 5, 489-492.
- [85] Wayman C. (1992) *The phenomenological theory of martensite crystallography: Interrelations*, Met. & Mat Trans., 25A, 1787-1795.
- [86] Wechsler M., Lieberman D., Read T. (1953) *On the theory of the formation of martensite*, Trans. AIME, Journ. of Metals, Vol.197, 1503.
- [87] Wu M. (1990) *Cu-based shape memory alloys*, in Engineering Aspects of shape memory alloys Eds Duerig T., Melton K., Stockel D., Wayman C., Butterworth-Heinemann, London, ISBN 0-7506-1009.

- [88] Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A. (1997) *Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate*, Acta Mech., 24, 89-105.
- [89] Yahia L. Ed. (2000) *Shape Memory Implants*, Springer, ISBN 3-540-67229-X.
- [90] Zhang X., Rogers C., Liang C (1992) *Modeling of the two-way shape memory effect*, Philosophical Magazine A, 65, 1199-1215.
- [91] Ziółkowski A. (1997) *Mechanics of Intelligent Materials*, J.Theor.Appl.Mech., 35, 4, 955-981.
- [92] Ziółkowski A., Raniecki B. (1999) *On the free energy function for Shape Memory Alloys treated as a two-phase continuum*, Arch. Mech. 51, 6, 785-911.
- [93] Ziółkowski A., Raniecki B., Miyazaki S. (2004) *Stress induced martensitic transformation kinetics of polycrystalline NiTi shape memory alloy*, Mater. Sci. Engn. A. 378, 86-91.
- [94] SMST publications web page, <http://www.smst.org/smstpublications.html>.
- [95] <http://www.amtbe.com/alloyalloy.html>.
- [96] http://www.memory-metalle.de/html/03_knowhow/PDF/MM_04_properties_e.pdf.
- [97] <http://www.specialchem4coatings.com/news-trends/displaynews.aspx?id=1691>.
- [98] <http://www.aerofit.com/sma/memory.htm>.
- [99] http://www.intrinsicdevices.com/alloy_selection.html.
- [100] <http://www.phys.washington.edu/users/cmsn/links/ssi/VIC.doc>, Computational Materials Science Network.
- [101] Arndt, Griebel <http://wissrech.iam.uni-bonn.de/research/projects/arndt/PhaseTrafoAtom/index.html>.
- [102] <http://www.astm.org>.
- [103] Naval Research Laboratory, Materials Science and Technology <http://mstd.nrl.navy.mil>.