DZIAŁ NAUKOWY

MATEMATYKA STOSOWANA 4, 2003

Włodzimierz Bielski (Warszawa)
Eleonora Kruglenko (Warszawa)
Józef Joachim Telega (Warszawa)

Miary Younga i ich zastosowania w mikromechanice i optymalizacji. Część I. Podstawy matematyczne

1. Wstęp. Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie współczesnych, matematycznych zagadnień mikromechaniki ośrodków ciągłych, w których wykorzystuje się tzw. miary parametryzowane. Pokażemy, jak współczesna matematyka daje się z powodzeniem wykorzystać w procesach modelowania i w badaniu własności mikrostruktury ośrodka. Ten współczesny język matematyki będzie dotyczyć pojęć takich jak miary parametryzowane, których przypadkiem szczególnym są miary Younga i H-miary.

Omówione również zostaną te zagadnienia optymalizacji i sterowania, w których wykorzystuje się takie miary, a także przejścia fazowe, zagadnienia mikromagnetyzmu, ograniczeń na stałe efektywne itd.

Praca składa się z dwu części. Same zastosowania i metody numeryczne zostaną przedstawione w części drugiej pracy. Część pierwsza natomiast stanowi syntezę prezentacji narzędzi takich jak miary Younga, H-miary oraz miary ogólniejsze od miar Younga.

W rachunku wariacyjnym i w mechanice ośrodka ciągłego fundamentalną rolę odgrywają funkcjonały całkowe typu

$$J(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x))\, dx, \tag{1.1}$$

określone na pewnej przestrzeni funkcyjnej. W zastosowaniach do rachunku wariacyjnego lub mechaniki ośrodków ciągłych (zagadnienia statyczne) ważny jest problem minimalizacji funkcjonału. W zagadnieniach mechaniki ciała stałego zwykle będzie to funkcjonał energii i mówimy wtedy o problemie minimum energetycznego.

Jedną z podstawowych metod badania zagadnień istnienia oraz znajdowania minimizerów jest metoda bezpośrednia rachunku wariacyjnego. Metoda ta, pochodząca od Leonida Tonelli (por. [49]), polega na badaniu minimum funkcjonału bez potrzeby analizowania równań Eulera–Lagrange'a i wywodzi się z przypadku skończenie wymiarowego. Stosowanie tej metody wymaga, aby funkcjonał $J(u)$ dany całką i określony na odpowiedniej przestrzeni funkcyjnej, np.

$$J(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u)\, dx, \qquad u \in W^{1,p}(\Omega),\ p \geq 1, \tag{1.2}$$

był dolnie półciągły względem zmiennej u w odpowiedniej topologii, w której zbiory $\{u : J(u) \leq \text{const}\}$ są relatywnie zwarte. Tak określony funkcjonał przy dodatkowych założeniach koercywności funkcji podcałkowej f posiada minimum.

Okazuje się, że wypukłość funkcji podcałkowej (a nawet pewne jej uogólnienia, takie jak poliwypukłość, kwaziwypukłość, wypukłość rzędu 1) gra tutaj kluczową rolę. Jeśli funkcja podcałkowa nie spełnia odpowiedniego warunku wypukłości, mogą nie istnieć minimizery w sensie klasycznym, tj. należące do odpowiednich przestrzeni Sobolewa.

Problem braku minimum dla pewnych zagadnień teorii optymalnego sterowania był zauważony już przez Younga w pracach [172, 173] (por. także pracę Wargi [171]). Metoda pochodząca od Younga polegała na rozszerzeniu klasy rozwiązań. Young wprowadził pojęcie krzywej uogólnionej, tj. takiej, która jest uogólnionym rozwiązaniem przy braku rozwiązania klasycznego. Jest to para (u, ν), gdzie $u = u(x)$ jest trajektorią, a $\nu = (\nu_x)$, $x \in \Omega$, jest miarą probabilistyczną (rodziną miar parametryzowaną zmienną $x \in \Omega$).

Warto podkreślić, że zagadnienie poszukiwania rozwiązań uogólnionych i problemów rachunku wariacyjnego ogłosił Hilbert w problemach 19, 21 i 23 podczas słynnego Kongresu Matematyków w 1900 roku w Paryżu (por. [74]).

Inne alternatywne podejście do zagadnień minimalizacji funkcjonałów, które nie posiadają minimum, polega na zastosowaniu tzw. relaksacji funkcjonału. Taką metodą jest np. tzw. relaksacja kwaziwypukła, polegająca na tym, że problem znalezienia $\inf I(u)$ nie mający rozwiązania zastępuje się problemem wyznaczania $\inf QI(u)$, czyli „zadaniem kwaziwypukłym", a następnie udowadnia się, że $\inf I = \inf QI = \min QI$. QI oznacza tutaj kwaziwypukłą relaksację funkcjonału I. Okazuje się, że dwa ostatnie zagadnienia są równoważne zagadnieniu wyznaczania minimum odpowiedniego funkcjonału zrelaksowanego przez miary Younga (por. Pedregal [123]). Metody relaksacyjne były szeroko stosowane do badania istnienia minimizerów w rachunku wariacyjnym, jednakże tym problemem nie będziemy się zajmować ponad to, co jest potrzebne w związku z zastosowaniem miar probabilistycznych. Natomiast przyjęcie i rozwój idei rozwiązań uogólnionych w sensie Younga doprowadziły do rozwoju miar probabilistycznych zwanych też miarami Younga.

Pierwotnie miary Younga, znane wcześniej jako miary probabilistyczne, służyły jako aparat do znajdowania uogólnionych rozwiazań w przypadku, gdy problem minimizacyjny nie spełniał odpowiedniego warunku zwartości, tzw. *inf-compactness*. Rozwiązania klasyczne nie istniały, natomiast graniczne zachowanie minimizerów stawało się coraz bardziej oscylujące. Rozwój miar Younga w latach siedemdziesiątych związany jest nie tyle z optymalizacją, co z równaniami różniczkowymi cząstkowymi [52–55, 139, 153–157]. Późniejszy rozwój miar Younga związany jest z pracami [10, 11, 17–20, 61, 64, 66, 79, 82, 83, 87, 89, 90, 114, 142, 143, 151, 152, 168, 169]. Zastosowania miar Younga do zagadnień ewolucyjnych można znaleźć w pracach [52–55, 67, 68, 107, 111, 139, 141, 153, 154, 165]. Zagadnienia aproksymacyjne i obliczenia numeryczne można znaleźć m.in. w [94, 96, 98, 103, 104, 111]. Obszerną literaturę dotyczącą zastosowań podamy w II części pracy, tu ograniczymy się do kilku pozycji, np. [24, 26, 29, 35, 42–44, 48, 56, 60, 61, 79, 88, 96, 99 100, 101, 103–105, 118, 140, 148]. W zastosowaniach, w szczególności do mechaniki nieliniowej, w bardzo szerokiej klasie tzw. materiałów inteligentnych (ang. *smart materials*), jak np. stopów metali z pamięcią kształtu, gęstość energii wewnętrznej $W(x, \cdot)$ jest funkcją niewypukłą; mówiąc precyzyjniej, nie jest nawet funkcją kwaziwypukłą. Taka jest matematyczna przyczyna nieistnienia klasycznych minimizerów. W zamian za to mamy zjawisko, które objawia się w postaci szybkich przestrzennych oscylacji gradientów ∇u; to zjawisko zwane jest „mikrostrukturą". Z matematycznego punktu widzenia te szybkie oscylacje gradientów mogą być opisane przez miary probabilistyczne.

Nieciągłości gradientów rozwiązań (minimizerów) na powierzchniach materialnych występują w zjawiskach bliźniakowania w kryształach (ang. *crystal twinning*), związanych z przejściami fazowymi. Matematyczny model tego zjawiska jest dość skomplikowany przez fakt, że funkcja energii wewnętrznej W w kryształach jest potencjałem wielostudniowym, a więc niewypukłym.

Nieciągłości gradientów rozwiązań występują również w pewnych przejściach fazowych typu faza stała–faza stała, znanych jako *transformacje martenzytyczne*, w których występują płaszczyzny rozdzielające fazę jednorodną, zwaną *austenitem* od fazy zwanej *martenzytem*. Tymi zagadnieniami zajmiemy się w drugiej części pracy.

Miary Younga stanowią dobre narzędzie do badania zjawisk oscylacji, jednakże nie wystarczają do badania zjawiska koncentracji. Pierwsze próby uogólnienia miar Younga w postaci pary miar Radona zostały przeprowadzone w pracy DiPerny i Majdy [55], której celem było zastosowanie tych miar do badania koncentracji.

Inne podejście do badania koncentracji i oscylacji jednocześnie zaproponowano w pracy Fonseca i in. [66]; jest ono też oparte na dwóch miarach, mierze Younga i mierze warifoldowej.

Inny rodzaj miar, które chcemy tu zasygnalizować, tzw. H-miary zostały wprowadzone w związku z badaniami dotyczącymi pewnych zagadnień homogenizacji (Tartar [155, 156]) oraz niezależnie w pracach Gerarda [69] jako wynik badań dotyczących badania defektu zwartości ciągów słabo zbieżnych. Wprowadzenie oraz zastosowania H-miar znajdziemy w pracach [5–8, 68, 72, 87, 95, 133, 148, 157, 159, 160, 161–163].

Plan pierwszej części pracy jest następujący: rozdział 2 zawiera podstawowe definicje poliwypukłości, kwaziwypukłości oraz wypukłości rzędu 1 oraz klasyczne rezultaty związane z odpowiednim rodzajem wypukłości a dolną półciągłością funkcjonałów. W rozdziale 3 podajemy proste przykłady zagadnień minimalizacyjnych, które nie mają klasycznych minimizerów. W rozdziale 4 wprowadzamy ogólne pojęcie miar probabilistycznych w ujęciu Balla [15], Tartara [153], Kinderlehrera i Pedregala [82]. W rozdziale 5 omawiamy miary Younga generowane przez ciągi gradientów; takie miary mają zastosowanie w szczególności w mechanice ośrodków ciągłych. W rozdziale 6 omawiamy miary Younga generowane wyższe gradienty. W rozdziale 7 podajemy lemat Chacona [20] i związki z miarami Younga. Ósmy rozdział pracy dotyczy uogólnień miar Younga przydatnych do badania zjawiska koncentracji. Wreszcie w rozdziale 9 przedstawiamy pojęcie H-miar wprowadzonych przez Tartara (por. [155]). Połączenie miar Younga z H-miarami ma taki sens, że w pewnych zagadnieniach, np. mikromagnetyzmu, jedna i druga miara wzajemnie się uzupełniają i dają pełniejszy obraz badanego problemu minimizacji (por. Tartar [159]).

Obszerna część druga dotyczyć będzie metod numerycznych i zastosowania miar parametrycznych w: mikromechanice (przejścia fazowe, mikromagnetyki, cienkie warstwy), geometrycznie nieliniowej dynamicznej hipersprężystości, projektowaniu i sterowaniu optymalnym.

2. Wybrane pojęcia podstawowe. Podstawowymi pojęciami w niniejszej części będą pojęcia takie jak: dolna półciągłość funkcjonału, funkcje kwaziwypukłe, funkcje poliwypukłe.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie otwartym, ograniczonym podzbiorem o mierze skończonej. Załóżmy, że

$$f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{mn} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

i niech $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\xi} : \Omega \to \mathbb{M}^{mn}$ będą funkcjami mierzalnymi; symbolem $\mathbb{M}^{mn}$ oznaczamy tu zbiór macierzy o wymiarach $n \times m$.

Definicja 2.1. Funkcja $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{mn} \to \mathbb{R}$ jest *funkcją Carathéodory'ego*, jeśli:

(a) $f(\cdot, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{\xi})$ jest mierzalna dla każdego $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ i $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{M}^{mn}$,

(b) $f(x, \cdot, \cdot)$ jest ciągła dla prawie każdego $x \in \Omega$.

DEFINICJA 2.2. Niech (X, τ) będzie dowolną przestrzenią topologiczną. Mówimy, że funkcja $f : X \to [-\infty, +\infty]$ jest *τ-dolnie półciągła*, jeżeli dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zbiór $\{x \in X : f(x) \leq t\}$ jest domknięty w X. Powiemy, że f jest *ciągowo τ-dolnie półciągła* w punkcie $u \in X$, jeśli dla dowolnego ciągu (u_k) zbieżnego do u mamy

$$f(u) \leq \liminf_{k\to\infty} f(u_k)$$

lub

$$f(u) = \min\{\liminf_{k} f(u_k) : u_k \to u\}.$$

Będziemy mówić, że f jest dolnie półciągła w X, jeśli jest ona dolnie półciągła dla wszystkich $u \in X$.

Symbol τ będzie oznaczać tutaj silną, słabą lub słabą* topologię.

W dowodzie twierdzenia o istnieniu miar probabilistycznych wykorzystuje się twierdzenie Banacha–Alaoglu (por. [146]).

TWIERDZENIE 2.1. *Niech V będzie otoczeniem zera w przestrzeni liniowo topologicznej X i niech*

$$V^\circ = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle \leq 1 \text{ dla każdego } x \in V\}.$$

Wówczas V° jest słabo zwarty.*

Ponieważ miary Younga są podzbiorami przestrzeni miar, przypomnijmy pojęcie słabej zbieżności miar.

Niech X będzie przestrzenią metryczną, lokalnie zwartą i ośrodkową. Niech $C_0(X) = \{u : X \to \mathbb{R} \mid \forall\varepsilon > 0\ \exists K \subseteq X; |u(x)| < \varepsilon \text{ dla } x \in X\backslash K\}$, gdzie odwzorowania u są ciągłe, a zbiór K jest zwarty. Wówczas przestrzeń miar ograniczonych jest przestrzenią sprzężoną do przestrzeni funkcji ciągłych o zwartym nośniku, tj. $(C_0(X))^* \simeq \mathcal{M}_b(X)$ w sensie takim, że dla wszystkich $L \in (C_0(X))^*$ istnieje $\mu \in \mathcal{M}_b(X)$ taka, że

$$L(u) = \int_X u\, d\mu$$

dla wszystkich $u \in C_0(X)$.

Rozważamy przestrzeń miar $\mathcal{M}_b(X)$ wyposażoną w słabą* topologię $\sigma(\mathcal{M}_b(X), C_0(X))$; wprowadźmy pojęcie słabej* zbieżności w zbiorze miar.

DEFINICJA 2.3. Niech $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ będzie ciągiem miar Borela. Mówimy, że ciąg jest *słabo* zbieżny* do ν ($\nu_j \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$), jeżeli

$$\lim_{j\to\infty} \int_X f\, d\nu_j = \int_X f\, d\nu$$

dla wszystkich $f \in C_0(X)$.

Z twierdzenia Banacha–Steinhausa i twierdzenia Banacha–Alaoglu wynika następujący rezultat.

TWIERDZENIE 2.2. *Ciąg* $\{\nu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *jest słabo* zbieżny do miary* ν *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sup_j \nu_j(X) < \infty$ *oraz istnieje gęsty podzbiór* $D \subset C_0(X)$ *taki, że*

$$\lim_{j\to\infty} \int_X u\,d\nu_j = \int_X u\,d\nu \quad \forall u \in D.$$

Ponadto, każdy ciąg $\{\nu_j\}$ *taki, że* $(\nu_j(X))$ *jest ograniczony, zawiera podciąg słabo* zbieżny, a odwzorowanie* $\nu \mapsto \nu(X)$ *jest dolnie półciągłe względem słabej* zbieżności.*

Ostatnie stwierdzenie wynika z równości

$$\nu(X) = \sup\Big\{ \int_X u\,d\nu \;\Big|\; u \in C_0(X), |u| \le 1\Big\}$$

oraz z faktu, że supremum rodziny funkcji półciągłych jest funkcją półciągłą.

2.1. *Kwaziwypukłość, poliwypukłość i wypukłość pierwszego rzędu.* Założenie wypukłości funkcji podcałkowej $f(x, \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u})$ względem trzeciej zmiennej jest warunkiem zbyt silnym dla zagadnień istnienia minimizerów w nieliniowej mechanice ośrodków ciągłych i ogólnie w rachunku wariacyjnym. Okazuje się w szczególności, że warunek wypukłości jest sprzeczny z jedną z podstawowych zasad mechaniki — zasadą obiektywności materiałowej (por. [47]). Założenie o wypukłości gęstości energii wewnętrznej jest wystarczające dla problemów liniowych mechaniki oraz dla niektórych zagadnień jednowymiarowych. W związku z tym pojawiły się w literaturze pojęcia znacznie rozszerzające klasę funkcji i funkcjonałów wypukłych. Wprowadzimy teraz odpowiednie uogólnienia pojęcia wypukłości funkcji. Pojęcia te są rozważane w pracach Balla, Dacorogni i innych [14, 17, 21, 47, 50, 113].

DEFINICJA 2.4. Funkcja $f : \mathbb{M}^{mn} \to \mathbb{R}$ jest *kwaziwypukła*, jeżeli

$$\int_D (f(\boldsymbol{A} + \nabla\phi(y)) - f(\boldsymbol{A}))\,dy \ge 0 \tag{2.1}$$

dla dowolnego ograniczonego zbioru $D \subset \mathbb{R}^m$, dla dowolnej macierzy $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^{mn}$ i dla każdej funkcji $\phi \in W_0^{1,\infty}(D; \mathbb{R}^m)$, tj. dla $\phi = 0$ na ∂D (brzegu obszaru D).

Jeżeli funkcja podcałkowa f będzie dodatkowo zależeć od x oraz $\boldsymbol{u}(x)$, tj. jeśli $f = f(x, \boldsymbol{u}(x), \nabla\boldsymbol{u}(x))$, wówczas mówimy, że $f(x, s, \boldsymbol{A})$ jest kwaziwypukła względem $\boldsymbol{A}$, jeżeli zamiast (2.1) spełniona jest nierówność

$$\int_D (f(x_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{A} + \nabla\phi(y)) - f(x_0, \boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{A}))\,dy \ge 0$$

dodatkowo dla prawie każdego $x_0 \in \Omega$ oraz dla każdego $\boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{R}^m$. W podobny sposób należy rozumieć obie poniższe definicje.

DEFINICJA 2.5. Funkcja $f : \mathbb{M}^{mn} \to \mathbb{R}$ jest *funkcją wypukłą rzędu* 1 (ang. *rank-one convex*), jeżeli

$$f(\lambda \boldsymbol{A} + (1-\lambda)\boldsymbol{B}) \leq \lambda f(\boldsymbol{A}) + (1-\lambda) f(\boldsymbol{B}) \tag{2.2}$$

$\forall \lambda \in [0,1]$, dla wszystkich macierzy $m \times n$ takich, że $\operatorname{rz}\{\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\} \leq 1$.

DEFINICJA 2.6. Funkcja $f : \mathbb{M}^{mn} \to \mathbb{R}$ jest funkcją *poliwypukłą*, jeżeli istnieje funkcja wypukła g taka, że

$$f(\boldsymbol{A}) = g(T(\boldsymbol{A})), \tag{2.3}$$

gdzie $T(A)$ jest wektorem złożonym ze wszystkich $s \times s$, $1 \leq s \leq \inf\{n, m\}$, minorów macierzy $A \in \mathbb{M}^{mn}$.

PRZYKŁAD 2.1. Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $n = m = 2$, $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^2$. Funkcja

$$f(\nabla \boldsymbol{u}) = |\nabla \boldsymbol{u}|^2 - (\operatorname{tr} \nabla \boldsymbol{u})^2$$

jest kwaziwypukła (a nawet poliwypukła) i nieograniczona z dołu. Symbol tr oznacza operator śladu macierzy.

PRZYKŁAD 2.2. Niech $m = n = 2$; wówczas ostatnią definicję można rozumieć jako $T(\boldsymbol{A}) = (\boldsymbol{A}, \det \boldsymbol{A})$ oraz

$$f(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A}, \det \boldsymbol{A}),$$

tak więc funkcja

$$f(\boldsymbol{A}) = g(\boldsymbol{A}, \det \boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}|^2 + (\det \boldsymbol{A})^2$$

jest poliwypukła (ale nie wypukła).

PRZYKŁAD 2.3. Niech $m = n$ i niech

$$f(x, \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{u}) = g(\det \nabla \boldsymbol{u}),$$

gdzie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą; wówczas f jest poliwypukła. W szczególności funkcja $f(\nabla \boldsymbol{u}) = \det \nabla \boldsymbol{u}$ jest funkcją poliwypukłą.

PRZYKŁAD 2.4. Niech $m = n = 2$, $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$ oraz

$$f_\gamma(\boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|^{2\alpha}(|\boldsymbol{\xi}|^2 - \gamma \det \boldsymbol{\xi}).$$

Wówczas mamy następującą sytuację (por. [51]):

$$\begin{cases} f_\gamma \text{ jest wypukła} \Leftrightarrow |\gamma| \leq \frac{4}{3}\sqrt{2}, \\ f_\gamma \text{ jest poliwypukła} \Leftrightarrow |\gamma| \leq 2, \\ f_\gamma \text{ jest kwaziwypukła} \Leftrightarrow |\gamma| \leq 2 + \epsilon, \\ \qquad\qquad \text{gdzie } \epsilon > 0, \text{ lecz nie jest dane explicite}, \\ f_\gamma \text{ jest wypukła rzędu } 1 \Leftrightarrow |\gamma| \leq 4/\sqrt{3}. \end{cases}$$

PRZYKŁAD 2.5. W zagadnieniach geometrycznie nieliniowej sprężystości mamy do czynienia z gęstością energii wewnętrznej daną wzorem (por. [47])

$$W(\boldsymbol{F}) = C_1((\boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T)^2 - 3) + C_2(\operatorname{adj}\boldsymbol{F}\operatorname{adj}\boldsymbol{F}^T - 3) + C_3((\det\boldsymbol{F})^2 - 1),$$

gdzie $C_i > 0$ są pewnymi stałymi materiałowymi (materiał jednorodny), zaś $\boldsymbol{F} = \nabla u$ jest gradientem deformacji. Jeżeli dodatkowo przyjąć w powyższym wzorze, że $\det\boldsymbol{F} = 1$, wówczas mamy gęstość energii wewnętrznej materiału nieściśliwego. Można pokazać, że $W(\boldsymbol{F})$ jest funkcją poliwypukłą (por. [14]). Precyzyjniej, funkcja $W(\boldsymbol{F}) = g(\boldsymbol{F}, \operatorname{adj}\boldsymbol{F}, \det\boldsymbol{F})$ jest funkcją wypukłą względem wszystkich trzech argumentów. Podkreślmy, że rozkład taki na ogół nie jest jednoznaczny.

UWAGA 2.1. Niech $f = f(\boldsymbol{F})$, gdzie $\boldsymbol{F} = \nabla\boldsymbol{u}$. Wówczas zachodzą implikacje:

$$f \text{ wypukła} \Rightarrow f \text{ poliwypukła} \Rightarrow f \text{ kwaziwypukła} \Rightarrow f \text{ wypukła rzędu } 1.$$

Gdy $m = 1$ lub $n = 1$, wszystkie te pojęcia sa równoważne. W ogólnym przypadku implikacje odwrotne nie są prawdziwe, np. funkcja $f(\boldsymbol{A}) = \det\boldsymbol{A}$ jest funkcją poliwypukłą (i oczywiście kwaziwypukłą), ale nie jest funkcją wypukłą. Ponadto, jeżeli $f \in C^2$ (względem gradientu), to

$$f(\nabla\boldsymbol{u}) \text{ jest wypukła rz. } 1 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial u^i_{,\alpha}\partial u^j_{,\beta}}\lambda_\alpha\lambda_\beta\xi^i\xi^j \geq 0,$$

dla $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m$ oraz $u^i_{,\alpha} = \frac{\partial u^i}{\partial x_\alpha}$. Ostatnią nierówność nazywamy warunkiem Legendre'a–Hadamarda, oznacza ona eliptyczność równań E–L, lub silną eliptyczność, gdy nierówność jest ostra.

UWAGA 2.2. Kwaziwypukłość gęstości energii wewnętrznej ma następującą interpretację w dziedzinie mechaniki: deformacje jednorodne minimalizują energię wewnętrzną ciała przy braku sił powierzchniowych i przy założeniu, że materiał jest jednorodny. Z drugiej strony nie znaleziono jak do tej pory interpretacji fizycznej funkcji poliwypukłej (Ball [14] wprowadził to pojęcie do nieliniowej teorii sprężystości w roku 1977), chociaż wiele gęstości funkcji energii ma tę własność.

Niech teraz symbole Cf, Pf, Qf oraz Rf oznaczają kolejno następujące regularyzacje funkcji f: wypukłą, poliwypukłą, kwaziwypukłą oraz wypukłą rzędu 1, zdefiniowane następująco:

$$\begin{aligned} Cf &= \sup\{g : g \leq f,\ g \text{ jest funkcją wypukłą}\}, \\ Pf &= \sup\{g : g \leq f,\ g \text{ jest funkcją poliwypukłą}\}, \\ Qf &= \sup\{g : g \leq f,\ g \text{ jest funkcją kwaziwypukłą}\}, \\ Rf &= \sup\{g : g \leq f,\ g \text{ jest funkcją wypukłą rzędu } 1\}. \end{aligned}$$

Wówczas mamy następujący ciąg nierówności charakteryzujący relacje pomiędzy odpowiednimi relaksacjami [50]:

$$Cf \le Pf \le Qf \le Rf \le f. \tag{2.4}$$

Jeśli f jest wypukła, to w (2.4) mamy równość, ponieważ $f = Cf = f^{**}$, gdzie podwójna gwiazdka oznacza drugie sprzężenie funkcji f (tzw. bipolara funkcji f), $f^{**} = (f^*)^*$, $f^*(u) = \sup\{\langle u, u^*\rangle - f(u) : u \in X\}$, $u^* \in X^*$. Ponadto, jeśli $n = 1$ lub $m = 1$, to pojęcia te pokrywają się. Wówczas mamy

$$Cf = Pf = Qf = Rf \ (= f, \text{ jeżeli } f \text{ jest wypukła}).$$

Następująca nierówność, zwaną nierównością Jensena, odgrywa dużą rolę w teorii miar Younga. Nierówność ta jest równoważna wypukłości w sensie, który wynika z poniższego twierdzenia.

TWIERDZENIE 2.3. *Niech f będzie funkcją wypukłą. Wówczas prawdziwa jest następująca nierówność dla wszystkich przestrzeni probabilistycznych (Ω, μ) i wszystkich funkcji mierzalnych $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$:*

$$\int_\Omega f(g(x))\, d\mu \ge f\Big(\int_\Omega g(x)\, d\mu\Big). \tag{2.5}$$

Dowód tego twierdzenia można znaleźć w książce Braidesa [33], str. 197. Klasyczna wersja tej nierówności jest następująca: jeżeli f jest wypukła, to spełniona jest nierówność Younga:

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q f(u(x))\, dx \ge f\Big(\frac{1}{|Q|}\int_Q u(x)\, dx\Big).$$

Zwróćmy uwagę, że powyższa nierówność jest wykorzystana do określenia funkcji kwaziwypukłej (por. (2.1)).

2.2. *Dolna półciągłość funkcjonałów a wypukłość.* Następujące klasyczne już rezultaty charakteryzują związki pomiędzy dolną półciągłością i odpowiednią wypukłością funkcji podcałkowych dla funkcjonałów całkowych.

I. *Przypadek przestrzeni L^∞.* Niech Ω będzie otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$ i niech $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^m$.

TWIERDZENIE 2.4 (Ball [16]). *Niech $\phi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ będzie funkcją taką, że $\phi(\boldsymbol{u}(\cdot)) \in L^1(\Omega)$ dla $\boldsymbol{u} \in L^\infty(\Omega)^m$. Wówczas*

$$J(u) = \int_\Omega \phi(\boldsymbol{u}(x))\, dx$$

jest funkcjonałem ciągowo słabo dolnie półciągłym na przestrzeni $L^\infty(\Omega)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ jest funkcją wypukłą.*

Dowód. Załóżmy, że J jest słabo* dolnie półciągły. Niech $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ oraz $\lambda \in [0,1]$. Niech $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \le |x_i| < 1/2\}$ będzie kostką jednostkową i określmy $v \in L^\infty(\Omega)^m$ w sposób następujący:

$$v(x) = \begin{cases} a, & \text{jeżeli } x \in A_1, \\ b, & \text{jeżeli } x \in A_2, \end{cases}$$

gdzie $Q = A_1 \cup A_2$ oraz $\mu(A_1) = \lambda$, $\mu(A_2) = 1 - \lambda$ i gdzie μ oznacza n-wymiarową miarę Lebesgue'a. Dzielimy $\mathbb{R}^n$ na rozłączne, przystające, otwarte kostki Q_j o środku w x_j i krawędziach $1/k$. Dla $i = 1, 2$ definiujemy zbiory $E_{k,i} = \bigcup_j (x_j + \frac{1}{k} A_i)$. Określamy ciąg $u_k \in L^\infty(\Omega)^m$ $(k = 1, 2, \ldots)$ następująco: $u_k(x) = v(k(x - x_j))$ dla $x \in Q_j \cap \Omega$. Jeżeli $E \subseteq \Omega$ jest zbiorem mierzalnym oraz $c \in \mathbb{R}^m$, wówczas

$$\int_\Omega u_k \cdot c\chi_E(x)\, dx = \int_E u_k \cdot c\, dx = \mu(E \cap E_{k,1}) a \cdot c + \mu(E \cap E_{k,2}) b \cdot c.$$

Granica tego wyrażenia, gdy $k \to \infty$, jest równa

$$\mu(E)[\lambda a + (1 - \lambda) b] \cdot c = \int_\Omega [\lambda a + (1 - \lambda) b] \cdot c\chi_E(x)\, dx.$$

Ponieważ skończone kombinacje liniowe funkcji postaci $c\chi_E$ są gęste w przestrzeni $L^1(\Omega)^m$ i ponieważ ciąg u_k jest ograniczony, wynika stąd, że

$$u_k \xrightharpoonup{*} \lambda a + (1 - \lambda) b \quad \text{w } L^\infty(\Omega)^m.$$

Stąd dostajemy

$$\begin{aligned} \phi(\lambda a + (1 - \lambda) b) &\le \liminf_{k \to \infty} \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega \phi(u_k(x))\, dx \\ &= \lim_{k \to \infty} \left\{ \frac{\mu(\Omega \cap E_{k,1})}{\mu(\Omega)} \phi(a) + \frac{\mu(\Omega \cap E_{k,2})}{\mu(\Omega)} \phi(b) \right\} \\ &= \lambda \phi(a) + (1 - \lambda) \phi(b), \end{aligned}$$

czyli funkcja ϕ jest wypukła.

Odwrotnie, niech ϕ będzie wypukła. Dla dowolnych $c, d \in \mathbb{R}$ rozważmy zbiór

$$K(c, d) = \{ u \in L^1(\Omega)^m \ : \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)^m} \le c, \ J(u) \le d \}.$$

Zbiór K jest domknięty w $L^1(\Omega)^m$ oraz wypukły, stąd jest słabo domknięty. Zatem J jest funkcjonałem ciągowo słabo* dolnie półciągłym. ∎

Następująca uwaga charakteryzuje wszystkie funkcje ciągłe.

Uwaga 2.3. Niech ϕ będzie funkcją taką jak w powyższym twierdzeniu. Niech L^∞ będzie wyposażona w topologię słabą*, zaś L^1 w topologię słabą. Wówczas odwzorowanie $\phi : L^\infty(\Omega)^m \to L^1(\Omega)$ jest ciągowo ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy ϕ jest funkcją afiniczną, tzn. $\phi(u) = a + b \cdot u$, gdzie a i wektor b są stałe. Zauważmy, że w powyższym twierdzeniu nie było konieczne wymaganie ciągłości funkcji ϕ.

II. *Przypadek przestrzeni* $W^{1,\infty}$. Rozważmy teraz funkcję $\psi : \mathbb{M}^{mn} \to \mathbb{R}$ taką, że $\psi(\boldsymbol{F}(\cdot)) \in L^1(\Omega)$ dla $\boldsymbol{F} \in L^\infty(\Omega)^{mn}$.

TWIERDZENIE 2.5 (Morrey [112]; Ball [16]). *Niech* $\psi : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{M}^{nm} \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją ciągłą. Rozpatrzmy fumkcjonał*

$$J(\boldsymbol{u}) = \int_\Omega \psi(x, \boldsymbol{u}(x), \nabla \boldsymbol{u}(x))\, dx.$$

Wówczas funkcjonał J *jest ciągowo słabo* dolnie półciągły w* $W^{1,\infty}(\Omega)$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* ψ *jest kwaziwypukła.*

Twierdzenia te ukazują rolę wypukłości lub kwaziwypukłości w zależności od tego, czy funkcja podcałkowa zależy od gradientu, czy też nie.

W zagadnieniach mechaniki i w rachunku wariacyjnym ważne jest formułowanie problemów minimalizacyjnych raczej w przestrzeniach $W^{1,p}$ $(1 \leq p < \infty)$ niż $W^{1,\infty}$, ponieważ gęstości energii wewnętrznych (funkcje podcałkowe) wielu materiałów hipersprężystych zachowują się jak wielomiany o ustalonej potędze względem gradientów deformacji lub kombinacji odpowiednich minorów gradientu deformacji.

Badanie minimizerów funkcjonałów niewypukłych w zastosowaniu do nieliniowej teorii sprężystości zostało rozpoczęte w pracy Balla [14]. Ball zauważył, że rezultaty Morreya [113] nie mogą być stosowane do nieliniowej sprężystości, gdyż nie uwzględniają warunku niepenetracji materiału ($\det \boldsymbol{F} > 0$); również brak w nich warunków typu: energia rośnie, gdy wyznacznik gradientu deformacji maleje do zera. Ball uzupełnił te braki, wprowadzając m.in. pojęcie funkcji poliwypukłej, uogólniając w ten sposób pojęcie wypukłości. Twierdzenia Balla o istnieniu minimizerów funkcjonałów całkowych dotyczą funkcji poliwypukłych spełniających odpowiedni warunek koercywności. Ten rodzaj wypukłości nie ma interpretacji fizycznej, choć można pokazać, że funkcje gęstości energii wewnętrznej dla ciał hipersprężystych są często poliwypukłe. W samym rachunku wariacyjnym więcej miejsca poświęca się zagadnieniom istnienia mimimizerów dla funkcji kwaziwypukłych, też mających duże znaczenie w mechanice nieliniowej. Ważnym rezultatem dotyczącym funkcji kwaziwypukłych jest następujące twierdzenie.

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym zbiorem mierzalnym i niech

$$F(\boldsymbol{u}, \Omega) = \int_\Omega f(x, \boldsymbol{u}(x), \nabla \boldsymbol{u}(x))\, dx.$$

TWIERDZENIE 2.6 (Acerbi–Fusco [1]). *Niech* $1 \leq p < +\infty$*; ponadto załóżmy, że funkcja* $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{nm}$ *spełnia następujące założenia:*

(a) f *jest funkcją Carathéodory'ego;*

(b) f *jest funkcją kwaziwypukłą;*

(c) $0 \le f(x, s, \xi) \le a(x) + C(|s|^p + |\xi|^p)$ *dla każdego* $x \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}^m$, $\xi \in \mathbb{M}^{mn}$, *gdzie* $C > 0$ *jest stałą oraz* $a = a(x)$ *jest nieujemną, lokalnie całkowalną funkcją na* $\mathbb{R}^n$.

Wówczas dla każdego zbioru otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *funkcjonał* $u \mapsto F(u, \Omega)$ *jest (ciągowo) słabo dolnie półciągły w przestrzeni* $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$.

Dowód tego twierdzenia przy użyciu aparatu miar Younga podany został w pracy [80]. Twierdzenie to doczekało się także uogólnień; por. rozdział dotyczący lematu Chacona.

3. Metoda bezpośrednia rachunku wariacyjnego. Stosując metodę bezpośrednią rachunku wariacyjnego, można udowodnić istnienie minimizerów, jeśli funkcja podcałkowa spełnia odpowiednie założenia. W pierwszym przykładzie tego punktu pokażemy, stosując metodę bezpośrednią, że klasyczne minimizery mogą nie istnieć. Warunek koercywności jest tu spełniony, ale brak wypukłości odpowiada za brak dolnej półciągłości badanego funkcjonału. Tego typu problemy prowadzą do miar Younga. Znanym przykładem jest tzw. zagadnienie nawigacyjne Zermelo.

PRZYKŁAD 3.1. Rozpatrzmy funkcjonał

$$I(u) = \int_0^1 [u^2 + (\dot{u}^2 - 1)^2]\, dx \tag{3.1}$$

oraz następujące zagadnienie minimalizacji:

ZADANIE (P). Znaleźć minimum funkcjonału

$$\inf\{I(u) : u \in \mathcal{A}\},$$

gdzie

$$\mathcal{A} = \{u \in W^{1,4}(0,1) : u(0) = u(1) = 0\}.$$

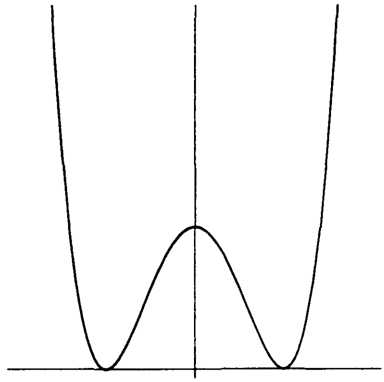
Podobnych funkcjonałów, nie posiadających minimizerów, istnieje wiele, np.

$$I_1(u) = \int_0^1 [1 + u^2][1 + (\dot{u}^2 - 1)^2]\, dx, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

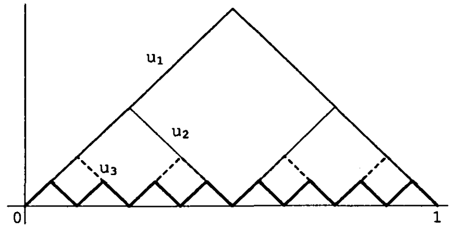
$$I_2(u) = \int_0^1\!\!\int_0^1 (u_x^2 + (u_y^2 - 1)^2)\, dx, \qquad u = 0 \text{ na } \partial\Omega, \quad u \in W^{1,4}(\Omega),\ \Omega = [0,1]^2.$$

Takie potencjały nazywa się dwu- lub wielostudniowymi; przykład potencjału dwustudniowego pokazano na rys. 1.

Zauważmy, że $I(u) \ge 0$ dla dowolnej funkcji $u \in W^{1,4}(0,1)$, wobec czego istnieje infimum funkcjonału $I(u)$ określonego na przestrzeni Sobolewa $W^{1,4}(0,1) \cap W^{1,2}(0,1)$. Zauważmy, że ciąg oscylujący postaci (por. rys. 2)



Rys. 1. Potencjał dwustudniowy niewypukły typu $f(u) = (u^2 - 1)^2$



Rys. 2. Ciąg minimizerów dla zadania (P)

$$
u_n(x) = \begin{cases} x - \dfrac{k}{n}, & \text{jeśli } x \in \left[\dfrac{k}{n}, \dfrac{2k+1}{2n}\right], \\ -x + \dfrac{k+1}{n}, & \text{jeśli } x \in \left[\dfrac{2k+1}{2n}, \dfrac{k+1}{n}\right], \end{cases} \tag{3.2}
$$

dla $k = 0, 1, \ldots, n-1$ oraz $n = 1, 2, \ldots$ jest ciągiem zbieżnym jednostajnie (a więc także i punktowo) do funkcji $u_\infty(x) = 0$.

Z kolei

$$
\left|\frac{du_n(x)}{dx}\right| \equiv |\dot{u}_n(x)| = 1 \quad \text{p.w. na odcinku } (0,1). \tag{3.3}
$$

Mamy więc

$$
0 \leq \inf P \leq \frac{1}{4n^2}.
$$

Stąd $\lim_{n\to 0} I(u_n) = 0$, czyli $\inf P = 0$, natomiast

$$
u_\infty(x) = 0 = \lim_{n\to\infty} u_n(x)
$$

nie jest rozwiązaniem zadania (P), gdyż $I(u_\infty) = 1 \geq 0 = \inf(P)$. Oznacza to, że ciąg minimalizujący nie jest zbieżny do minimizera funkcjonału $I(u)$:

$$
I(u_n) \to 0, \quad \text{ale} \quad I(u_\infty) = 1.
$$

Nie mamy zatem spełnionego warunku dolnej półciągłości funkcjonału I:

$$0 = \liminf_{n \to 0} I(u_n) \not\geq I(u_\infty) = 1.$$

Wobec tego zadanie (P) nie posiada klasycznego minimizera. Zobaczymy później, jak zrelaksować ten problem, używając miar probabilistycznych (miar Younga).

Zobaczymy teraz, na czym polega metoda relaksacji kwaziwypukłej. Zadanie zrelaksowane (QP) dla zadania (P) ma następującą postać.

ZADANIE (QP). Znaleźć

$$\inf\Big\{\int_0^1 Qf(u(x),\dot{u}(x))\,dx : u \in W^{1,4}(\Omega),\ u(0) = u(1) = 0\Big\}, \tag{3.4}$$

gdzie

$$Qf(u,\xi) = \begin{cases} f(u,\xi), & \text{jeśli } |\xi| > 1, \\ u^2, & \text{jeśli } |\xi| \leq 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Zadanie (QP) ma conajmniej jeden minimizer $u \equiv 0$. Zauważmy tutaj, że zadanie (QP) jest wypukłe (zagadnienie jednowymiarowe).

Zauważmy, że:

(a) $f(u,\dot{u}) = u^2 + (\dot{u}^2 - 1)^2$ jest funkcją niewypukłą względem $\dot{u}$ (f jest wypukła względem u, ale ten fakt jest bez znaczenia).

(b) Brak wypukłości względem $\dot{u}$ jest odpowiedzialny za brak dolnej półciągłości funkcjonału I (por. Ball [16]). Z kolei problem (QP) spełnia warunki: $Qf(u,\xi)$ jest wypukła względem ξ oraz Qf jest dolnie półciągła.

Stąd problem (QP) posiada minimum, jednakże ta metoda gubi istotne informacje o np. oscylującym zachowaniu się minimizerów.

Przejdźmy teraz do problemu sterowania optymalnego, który nie posiada klasycznego rozwiązania.

PRZYKŁAD 3.2. Zminimalizować funkcjonał kosztów (por. [153])

$$J(u) = \int_0^T (|y|^2 - |u|^2)\,dt \tag{3.6}$$

przy następujących założeniach: u jest takie, że $|u(t)| \leq 1$ dla prawie każdego $t \in (0,T)$, oraz spełnione jest równanie:

$$y'(t) = u(t), \qquad y(0) = 0.$$

Zauważmy, że funkcjonał J jest niewypukły, a więc nie wiadomo, czy minimizer istnieje. Widać, że $J(u) \geq -T$ dla każdego u, tzn. J jest ograniczony z dołu. Jeśli $J(u) = \int_0^T (|y|^2 - |u|^2)\,dt = -T$, to $y = 0$ oraz $|u|^2 = 1$ p.w. na odcinku $(0,1)$. Ponadto, $y = 0$ implikuje $u = 0$ p.w. w zbiorze $(0,1)$. Zatem mamy sprzeczność. Pomimo to twierdzimy, że $\inf J(v) = -T$. W tym celu konstruujemy następujący ciąg:

$$u_n(t) = \begin{cases} +1 & \text{dla } 0 \le t \le T/(2n),\ n = 1, 2, \ldots, \\ -1 & \text{dla } \le t \le T/n, \end{cases}$$

a następnie przedłużamy ten ciąg w sposób okresowy na cały odcinek $[0, T]$. Jak widać, wtedy

$$y_n \to 0 \quad \text{silnie} \quad \text{oraz} \quad u_n^2 = 1.$$

Stąd $\inf J(v) = -T$. Ale para (u, y) taka, że $y = 0$ i $u^2 = 0$, nie może być rozwiązaniem rozpatrywanego zadania, tak więc minimum jest nieosiągalne.

Rozważmy zadanie uogólnione, tzw. zagadnienie zrelaksowane. Weźmy dwie funkcje u i v takie, że

$$(u(t))^2 \le v(t) \le 1 \quad \text{p.w. w } (0, T).$$

Określamy zbiór $\mathcal{K}$ następująco:

$$\mathcal{K} = \{(u, v) : v = u^2 \text{ i } v \le 1\}.$$

Widzimy, że

$$(u, v) \in \overline{\mathrm{co}}(\mathcal{K}) \quad \text{p.w.}$$

Określmy uogólniony funkcjonał kosztu następująco:

$$\tilde{J}(u, v) = \int_0^T (|u|^2 - v)\, dt.$$

Zrelaksowany funkcjonał $\tilde{J}(u, v)$ jest funkcjonałem wypukłym względem obu argumentów i jest określony na zbiorze wypukłym i domkniętym. Stąd wniosek, że $\tilde{J}$ osiąga swoje minimum, które jest realizowane w punkcie $(u, v) = (0, 1)$. Ponadto istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy J i $\tilde{J}$ określona przez $u \mapsto (u, u^2)$ oraz $J(u) = \tilde{J}(u, u^2)$. Jeśli mamy ciąg minimalizujący $\{u_n\}$ taki, że

$$J(u_n) \to J(u),$$

oznacza to, że (u_n, u_n^2) jest ciągiem minimizerów dla $\tilde{J}$. Ciąg ten jest zbieżny do rozwiązania $(0, 1)$ będącego minimizerem funkcji $\tilde{J}$. Te spostrzeżenia umożliwiają nam wprowadzenie miar Younga.

4. Miary Younga. Niech będzie dany ciąg $\{u_j\}$ taki, że $u_j : \Omega \to \mathbb{R}^m$ oraz $u_j(x) \in K$ dla p.k. $x \in \Omega$. Wiemy, że jeżeli $u_j \rightharpoonup u_\infty$, wówczas $u_\infty(x) \in \overline{\mathrm{co}}(K)$ p.w. w Ω, i wynik ten jest optymalny. Przypuśćmy, że chcemy znać relacje pomiędzy $\lim_{j\to\infty} u_j$ oraz $\lim_{j\to\infty} F(u_j)$, gdzie $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ są funkcjami ciągłymi, niekoniecznie afinicznymi.

Konstruujemy nową funkcję (por. [153])

$$U_j : x \mapsto U_j(x) = (u_j(x), F(u_j(x))).$$

Wówczas

$$U_j(x) \in K' := \{(z, F(z)) : z \in K\} \quad \text{p.w. w } \Omega.$$

Załóżmy, że

$$U_j \rightharpoonup U = (u, \ell), \quad \text{tzn.} \quad \begin{cases} u_j \rightharpoonup u, \\ F(u_j) \rightharpoonup \ell. \end{cases}$$

Wówczas na mocy poprzednich rozważań mamy $U(x) \in \overline{\mathrm{co}}(K')$ dla prawie każdego $x \in \Omega$.

Dochodzimy do następującego zagadnienia: co można powiedzieć o granicach wszystkich ciągów $F(u_j)$ dla wszystkich funkcji ciągłych F, niekoniecznie wypukłych? Najpierw odpowiemy na pytanie, jak zachowuje się powyższy ciąg dla funkcji wypukłych. Otóż jeżeli F jest funkcją wypukłą, wówczas

$$F(u_j(x)) \rightharpoonup \ell(x) \geq F(u(x)) \quad \text{dla p.k. } x \in \Omega.$$

W ogólnym przypadku odpowiedź na powyższe pytanie daje następujące twierdzenie, które jest fundamentalnym twierdzeniem o istnieniu miar Younga, stowarzyszonych z ciągiem funkcji zbieżnych w sensie miary. Poniżej prezentujemy wersję tego twierdzenia z pracy [76, 78]; por. również Ball [15], Tartar [153], Dacorogna [49].

TWIERDZENIE 4.1. *Niech Ω będzie zbiorem otwartym w $\mathbb{R}^n$, mierzalnym w sensie Lebesgue'a. Niech $K \subset \mathbb{R}^m$ będzie zbiorem domkniętym i niech $u_j : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $j = 1, 2, \ldots$, będzie ciągiem funkcji mierzalnych w sensie Lebesgue'a i takich, że $u_j(\cdot)$ jest zbieżny w zbiorze K według miary, gdy $j \to \infty$, tzn. dla dowolnego otwartego otoczenia U zbioru K w $\mathbb{R}^m$ istnieje*

$$\lim_{j\to\infty} \mathrm{meas}\{x \in \Omega : u_j(x) \notin U\} = 0.$$

Wówczas istnieje podciąg $\{u_{j_k}\}$ ciągu $\{u_j\}$ oraz rodzina probabilistycznych miar Radona ν_x, $x \in \Omega$, o mierze dodatniej na $\mathbb{R}^m$ zależąca w sposób słabo mierzalny od x taka, że*

(a) $\|\nu_x\| := \int_{\mathbb{R}^m} d\nu_x \leq 1$ *dla p.k.* $x \in \Omega$,

(b) $\mathrm{supp}\, \nu_x \subset K$ *dla p.k.* $x \in \Omega$,

(c) $f(u_j) \overset{*}{\rightharpoonup} \langle \nu_x, f\rangle = \int_{\mathbb{R}^m} f(\lambda)\, d\nu_x(\lambda)$ *w przestrzeni* $L^\infty(\Omega)$ *dla każdej funkcji ciągłej* $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *spełniającej warunek* $\lim_{|\lambda|\to\infty} f(\lambda) = 0$.

Załóżmy ponadto, że ciąg $\{u_j\}$ spełnia następujący warunek ciasności:

$$\forall r > 0 \quad \lim_{L\to\infty} \sup_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{meas}\{x \in \Omega \cap B_r : |u_j(x)| \geq L\} = 0, \tag{4.1}$$

gdzie $B_r = B_r(0)$ jest kulą o promieniu r i środku w zerze. Wówczas

$$\|\nu_x\| = 1 \quad \textit{dla p.k. } x \in \Omega, \tag{4.2}$$

tzn. ν_x *jest miarą probabilistyczną i zachodzi następujący warunek:*

$$(4.3)\quad \begin{cases} \text{dla dowolnego zbioru } A \subset \Omega \text{ i dowolnej funkcji } f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \\ \text{takiej, że ciąg } \{f(u_j)\} \text{ jest ciągowo słabo relatywnie} \\ \text{zwarty w przestrzeni } L^1(A), \text{ mamy następującą zbieżność:} \\ f(u_j) \rightharpoonup \langle \nu_x, f\rangle \text{ w } L^1(A). \end{cases}$$

UWAGA 4.1. Ball [15] udowodnił, że warunek ciasności (4.1) jest równoważny warunkowi: dla danego $r > 0$ istnieje ciągła niemalejąca funkcja $g_r : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ taka, że $\lim_{t\to\infty} g_r(t) = \infty$ oraz

$$(4.4)\qquad \sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\Omega\cap B_r} g_r(|u_k(x)|)\, dx < \infty.$$

Ponadto okazuje się, że przy założeniu (4.1) dla dowolnego zbioru mierzalnego $A \subset \Omega$ mamy zbieżność

$$f(\cdot, \boldsymbol{u}_j) \rightharpoonup \langle \nu_x, f(x,\cdot)\rangle \qquad \text{w przestrzeni } L^1(A),$$

dla każdej funkcji Carathéodory'ego $f : A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ takiej, że ciąg $\{f(\cdot, u_j)\}$ jest ciągowo słabo relatywnie zwarty w $L^1(A)$. Stąd fakt ten jest równoważny warunkom (4.1), (4.2) i (4.3).

W tej samej pracy Ball pokazał, że jeśli ciąg $\boldsymbol{u}_k$ generuje miarę Younga ν_x, wówczas dla $\psi \in L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^m))$ zachodzi równość

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \psi(x, \boldsymbol{u}_k(x))\, dx = \int_\Omega \langle \nu_x, \psi(x,\cdot)\rangle\, dx.$$

Szkic dowodu twierdzenia 4.1. Oznaczmy przez $C_0(\mathbb{R}^m)$ przestrzeń Banacha funkcji ciągłych $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ spełniających warunek $\lim_{|\lambda|\to\infty} f(\lambda) = 0$, wyposażoną w normę $\|f\|_{C_0} = \sup_{\lambda\in\mathbb{R}^m} |f(\lambda)|$. Na mocy twierdzenia Riesza o reprezentacji przestrzeń dualna $(C_0(\mathbb{R}^m))^*$ jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią Banacha $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^m)$ ograniczonych miar Radona na $\mathbb{R}^m$. Z ciągiem u_j stowarzyszamy odwzorowanie $\nu_j : \Omega \to \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^m)$ określone następująco:

$$\nu_j(x) = \delta_{u_j(x)}.$$

Tak więc ciąg ν_j jest ograniczony w przestrzeni Banacha $L^\infty_w(\Omega; \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^m))$ istotnie ograniczonych, słabo* mierzalnych odwzorowań $\mu : \Omega \to \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^m)$. Ponieważ $C_0(\mathbb{R}^m)$ jest przestrzenią ośrodkową, więc $L^\infty_w(\Omega; \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^m))$ jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią dualną do $L^1(\Omega; C_0(\mathbb{R}^m))$ i wobec tego istnieje, na mocy twierdzenia Banacha–Alaoglu, podciąg ν_{j_k} ciągu ν_j oraz element $\nu = (\nu_x)$ taki, że $\nu \in L^\infty_w(\Omega; \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^m))$ oraz $\nu_{j_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \nu$ w przestrzeni $L^\infty_w(\Omega; \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^m))$. Półciągłość normy daje nam warunek (a), wykorzystanie warunku ciasności powoduje, że zamiast nierówności (a) mamy równość (4.2), czyli rodzina $\nu = (\nu_x)$ jest miarą probabilistyczną. Pełny dowód oparty na dualności znajdzie czytelnik w pracy Balla [11]. ■

Intuicyjnie możemy myśleć o mierze Younga jako o granicznym rozkładzie prawdopodobieństwa, gdy $k \to 0$, wartości ciągu $u^{(k)}$ blisko punktu x. Precyzyjniej można powiedzieć tak: niech $B(x,\delta)$ będzie kulą otwartą o środku w punkcie x i promieniu $\delta > 0$. Niech x, k będą ustalone, podczas gdy $\nu_{x,\delta}^{(k)}$ jest rozkładem prawdopodobieństwa wartości funkcji $u^{(k)}(y)$, gdy y jest wybrane losowo z kuli $B(x,\delta)$. Oznacza to, że

$$\nu_x = \lim_{\delta\to 0}\lim_{k\to\infty} \nu_{x,\delta}^{(k)} \tag{4.5}$$

prawie wszędzie.

W zastosowaniach znaczną rolę odgrywają następujące fakty dotyczące silnej zbieżności ciągów lub zbieżności według miary oraz miar produktowych.

LEMAT 4.1. *Niech Ω ma miarę skończoną i niech ν_x będzie miarą Younga generowaną przez ciąg $\{u_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Wówczas zachodzi równoważność:*

$$u_j \to u \text{ wg miary } \Leftrightarrow \ \nu_x = \delta_{u(x)} \text{ dla p.k. } x \in \Omega. \tag{4.6}$$

Dowód. Załóżmy, że $u_j \to u$ wg miary; wówczas dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ mamy

$$\lim_{j\to\infty} |\{|u_j - u| > \varepsilon\}| = 0. \tag{4.7}$$

Dla dowolnej funkcji $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ oraz dowolnej funkcji $g \in L^1(\Omega)$ zachodzi nierówność

$$\Big|\int_\Omega g(x)(f(u_j) - f(u))\,dx\Big|$$
$$\le \Big|\int_{|u_j-u|>\varepsilon} g(x)(f(u_j) - f(u))\,dx\Big| + \Big|\int_{|u_j-u|\le\varepsilon} g(x)(f(u_j) - f(u))\,dx\Big|.$$

Jeśli wybierzemy odpowiednio ε, druga całka może być dowolnie mała, ponieważ

$$\Big|\int_{|u_j-u|\le\varepsilon} g(x)(f(u_j) - f(u))\,dx\Big| \le \varepsilon\|\nabla f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}.$$

Dla pierwszej z całek po prawej stronie nierówności mamy oszacowanie

$$\Big|\int_{|u_j-u|>\varepsilon} g(x)(f(u_j) - f(u))\,dx\Big| \le 2\|f\|_{L^\infty}\int_{|u_j-u|>\varepsilon} |g|\,dx.$$

Wobec tego również pierwsza całka dąży do zera, gdy j dąży do ∞, na mocy absolutnej ciągłości całki i założenia (4.7). Ponieważ C_0^∞ jest gęste w C_0, wnioskujemy, że dla dowolnej funkcji $f \in C_0$ mamy

$$f(u_j) \overset{*}{\rightharpoonup} \langle\delta_{u(x)}, f\rangle \quad \text{w } L^\infty(\Omega)$$

i stąd $\nu_x = \delta_{u(x)}$.

Niech teraz $\nu_x = \delta_{u(x)}$. Wobec tego warunek (4.2) jest spełniony. Rozważmy najpierw przypadek, gdy ciąg u_j jest ograniczony w $L^\infty(\Omega)$. Z warunku (4.3) wnioskujemy, że dla funkcji $f(x) = |x|^2$ mamy

$$\|u_j\|_{L^2}^2 = \int_\Omega f(u_j)\, dx \to \int_\Omega f(u)\, dx = \|u\|_{L^2}^2, \tag{4.8}$$

gdy $j \to \infty$. Jeżeli przyjmiemy $f = \mathrm{id}$, to dostaniemy, że $u_j \rightharpoonup u$ słabo w przestrzeni $L^2(\Omega)$, co w połączeniu z (4.8) daje $u_j \to u$ w $L^1(\Omega)$. Zatem dla dowolnej liczby $\alpha > 0$ dostajemy oszacowanie

$$\alpha |\{|u_j - u| \geq \alpha\}| \leq \int_\Omega |u_j - u|\, dx \to 0,$$

gdy $j \to \infty$, i stąd mamy zbieżność $u_j \to u$ w sensie miary.

Niech teraz T_R oznacza funkcję obcięcia taką, że $T_R(x) = x \min\{1, R/|x|\}$, $R > 0$, gdzie R jest ustalone. Pokażemy, że jeżeli ciąg u_j generuje miarę Younga $\delta_{u(x)}$, wówczas $T_R(u_j) \to T_R(u)$ w sensie miary. Niech $f \in C_0(\mathbb{R}^m)$; wówczas $f \circ T_R$ jest odwzorowaniem ciągłym oraz $f(T_R(u_j))$ jest ciągiem funkcji jednakowo całkowalnych i stąd na mocy twierdzenia Dunforda–Pettisa ciągowo słabo prezwartym w $L^1(\Omega)$. Warunek (4.2) jest spełniony, zaś z (4.3) wnioskujemy, że dla dowolnej funkcji $\phi \in L^\infty(\Omega)$ mamy

$$\int_\Omega \phi(x) f(T_R(u_j))\, dx \to \int_\Omega \phi(x) f(T_R(u))\, dx.$$

Oznacza to, że ciąg $T_R(u_j)$ generuje miarę Younga $\delta_{T_R(u(x))}$, i na mocy poprzednich rozważań (dla ciągów ograniczonych) mamy tezę. Na koniec pokażemy, że $u_j \to u$ w sensie miary. Niech będzie dana liczba $\varepsilon > 0$. Zachodzi następująca nierówność:

$$\begin{aligned} |\{|u_j - u| > \varepsilon\}| \leq{}& |\{|u_j - u| > \varepsilon, |u| \leq R, |u_j| \leq R\}| \\ &+ |\{|u| > R\}| + |\{|u_j| > R\}|. \end{aligned}$$

Miara zbioru $|\{x \in \Omega : |u| > R\}|$ może być dowolnie mała, jeśli przyjmiemy R dostatecznie duże. Podobnie miara zbioru $|\{x \in \Omega : |u_j| > R\}|$ dla dużych R jest dowolnie mała na mocy warunków (4.1) i (4.2). Wreszcie miara zbioru $|\{x \in \Omega : |u_j - u| > \varepsilon,\ |u| \leq R,\ |u_j| \leq R\}|$ dąży do zera, gdy $j \to \infty$. ∎

LEMAT 4.2. *Niech $|\Omega| < \infty$. Jeśli ciągi $u_j : \Omega \to \mathbb{R}^m$ oraz $v_j : \Omega \to \mathbb{R}^k$ generują odpowiednio miary Younga $\delta_{u(x)}$ oraz ν_x, wówczas ciąg (u_j, v_j) generuje miarę Younga $\delta_{u(x)} \otimes \nu_x$.*

Dowód. Wystarczy pokazać, że dla wszystkich funkcji gładkich φ o nośnikach zwartych zawartych w $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ zachodzi zbieżność

$$\varphi(u_j, v_j) \overset{*}{\rightharpoonup} \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(u, \lambda)\, d\nu_x(\lambda),$$

gdy $j \to \infty$. Niech $g \in L^1(\Omega)$ i rozważmy nierówność

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_\Omega g(x)\Big(\varphi(u_j, v_j) - \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(u,\lambda)\, d\nu_x(\lambda)\Big)\, dx\Big| \\
\le \Big|\int_{|u_j-u|<\varepsilon} g(x)(\varphi(u_j,v_j) - \varphi(u,v_j))\, dx\Big| \\
+ \Big|\int_{|u_j-u|\ge\varepsilon} g(x)(\varphi(u_j,v_j) - \varphi(u,v_j))\, dx\Big| \\
+ \Big|\int_\Omega g(x)\Big(\varphi(u,v_j) - \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(u,\lambda)\, d\nu_x(\lambda)\Big)\, dx\Big|.
\end{aligned}
$$

Pierwszy człon po prawej stronie nierówności szacujemy w sposób następujący:

$$
\Big|\int_{|u_j-u|<\varepsilon} g(x)(\varphi(u_j,v_j) - \varphi(u,v_j))\, dx\Big| \le \varepsilon \|g\|_{L^1(\Omega)} \|\nabla\varphi\|_{L^\infty}.
$$

Drugi człon dla ustalonego $\varepsilon > 0$ spełnia nierówność

$$
\Big|\int_{|u_j-u|\ge\varepsilon} g(x)(\varphi(u_j,v_j) - \varphi(u,v_j))\, dx\Big| \le 2\|\varphi\|_{L^\infty} \int_{|u_j-u|\ge\varepsilon} |g(x)|\, dx.
$$

Prawa strona nierówności ma granicę równą zeru, gdy $j \to \infty$, ponieważ ciąg u_j jest zbieżny w sensie miary na mocy lematu 4.1. Ponieważ $L^\infty(\Omega)$ jest gęste w $L^1(\Omega)$, możemy przyjąć, że $g \in L^\infty(\Omega)$. Wobec tego funkcja $g(x)\varphi(u(x),\cdot)$ należy do przestrzeni $L^1(\Omega, C_0(\mathbb{R}^k))$. Stąd wynika, że trzeci człon dąży do zera, gdy $j \to \infty$. ∎

Prezentujemy jeszcze, bez dowodu, wersję Tartara [153] lematu 4.1. Tartar pokazał, że miara Younga redukuje się do rodziny miar Diraca wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg jest silnie zbieżny w przestrzeni $L^p(\Omega)$ dla pewnego $p > 1$.

LEMAT 4.3. *Niech $u_j \overset{*}{\rightharpoonup} u$ w $L^\infty(\Omega)$. Wówczas $u_j \to u$ silnie w $L^p(\Omega)$ $(p < \infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\nu_x = \delta_{u(x)}$ (miara Diraca w $u(x)$).*

PRZYKŁAD 4.1. Niech $u_j \rightharpoonup u$ w $L^\infty(\Omega)$ i niech f będzie identycznością, tj. $f(x) = x$. Wówczas na mocy twierdzenia 4.1 mamy następującą *fundamentalną własność miar Younga* stowarzyszonych z ciągiem $\{u_j\}$:

$$
u(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda\, d\nu_x(\lambda).
$$

PRZYKŁAD 4.2. Niech $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i periodyczną o okresie 1. Wówczas dla $u_j(x) = u(jx)$ mamy

$$f(u_j(x)) \xrightarrow{*} \langle \nu, f(\lambda) \rangle = \int_0^1 f(u(x))\, dx \quad \text{słabo}^*, \text{ gdy } j \to \infty.$$

W tym przypadku mamy $\nu_x = \nu$ (miara jednorodna).

PRZYKŁAD 4.3. Rozważmy ciąg $\{\sin(jx)\}$, $j = 1, 2, \ldots$ Można pokazać, że odpowiadająca temu ciągowi miara Younga wyraża się następująco (por. [168]):

$$d\nu_x(\lambda) = \frac{1}{\pi} \frac{d\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \chi_{(-1,1)}(\lambda),$$

gdzie $\chi_{(-1,1)}$ jest funkcją charakterystyczną odcinka $(-1, 1)$. Wobec tego dla wszystkich funkcji $f \in C(\mathbb{R})$ mamy

$$f(\sin jx) \xrightarrow{*} \overline{f} \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(\lambda)}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda \qquad \text{słabo}^*,$$

gdy $j \to \infty$. Całka po prawej stronie jest równa

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sin y)\, dy.$$

Przyjmijmy, że $f = \mathrm{id}$. Wówczas otrzymujemy

$$\sin jx \xrightarrow{*} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda = 0 \quad \text{słabo}^*, \text{ gdy } j \to \infty.$$

Niech teraz $f(z) = z^2$. Wówczas

$$(\sin(jx))^2 \xrightarrow{*} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}\, d\lambda = \frac{1}{2} \quad \text{słabo}^*.$$

Zauważmy, że dwie ostatnie granice pokrywają się z wyrażeniem

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sin y)\, dy.$$

odpowiednio dla $f = \mathrm{id}$ oraz $f(y) = y^2$.

PRZYKŁAD 4.4. Niech $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie okresowym rozszerzeniem następującej funkcji:

$$h(x) = \begin{cases} a, & \text{jeśli } 0 \le x < \lambda, \\ b, & \text{jeśli } \lambda \le x < 1. \end{cases}$$

Określamy ciąg funkcji $z_j : [0, 1] \to \mathbb{R}$ następująco:

$$z_j(x) = h(jx).$$

Ponieważ funkcja h jest okresowa (por. przykład 4.2), mamy następujący rezultat:

$$z_j \xrightarrow{*} \int_0^1 h(y)\,dy = \lambda a + (1-\lambda)b.$$

Złożenie $f \circ h$ jest funkcją okresową, wobec tego zachodzi zbieżność

$$f(z_j) \xrightarrow{*} \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b) \quad \text{słabo}^*,\ \text{gdy } j \to \infty.$$

Stąd wniosek, że ciąg $\{z_j\}$ generuje miarę Younga $\nu = \{\nu_x\}$ taką, że

$$\nu_x = \lambda\delta_a + (1-\lambda)\delta_b.$$

W tym przypadku rodzina miar $\{\nu_x\}$ jest niezależna od parametru x, zatem indeks x możemy opuścić. Taką miarę ν nazywamy *jednorodną miarą Younga* (por. przykład 4.2).

5. Miary Younga generowane przez gradient. W zagadnieniach wariacyjnych mechaniki ośrodków ciągłych, wszędzie tam, gdzie poszukujemy rozwiązań ścisłych bądź przybliżonych, mamy na ogół do czynienia z funkcjonałami zależnymi od gradientu deformacji (może też wystąpić gradient wyższego rzędu). Będziemy wtedy mówić, że miara Younga jest generowana nie przez ciąg funkcji, lecz przez ciąg gradientów (krótko: przez gradient).

DEFINICJA 5.1 (Sychev [151]). Miara Younga $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ jest *gradientową p-miarą Younga*, gdzie $p \in [1,\infty)$, jeśli jest ona generowana przez gradienty $\{\nabla \boldsymbol{u}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ciągu $\{\boldsymbol{u}_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ takiego, że ciąg $\{\boldsymbol{u}_j\}$ jest słabo zbieżny w przestrzeni $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, a funkcje $|\nabla \boldsymbol{u}_j|^p$ są jednakowo całkowalne.

Niech będzie dany funkcjonał

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{u},\Omega) = \int_\Omega W(x,\boldsymbol{u}(x),\nabla\boldsymbol{u}(x))\,dx$$

określony na przestrzeni Sobolewa $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ i niech ciąg $\{u_j\}$ będzie ograniczony w tej przestrzeni. Ponieważ interesuje nas przestrzeń Sobolewa $W^{1,p}$, a nie tylko $W^{1,\infty}$, konieczny jest odpowiedni wzrost funkcji podcałkowej $W(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{p})$. Mianowicie będziemy żądać, ażeby wzrost funkcji W był typu:

$$C_1 \le W(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{A}) \le C(1+|\boldsymbol{A}|^p), \qquad \boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^{mn}.$$

W przestrzeniach funkcji całkowalnych wraz z p-tą potęgą, jeśli ciąg $\{|\nabla u_k|^p\}$ jest ograniczony w $L^1(\Omega)$, to generalnie nie możemy zagwarantować jego ograniczoności w $L^\infty(\Omega)$. Wiemy natomiast, że ciąg ten jest ograniczony w $L^p(\Omega)$ (dla pewnego $p \in [1,\infty)$). Jeśli $\nabla\boldsymbol{u}^j \in L^p(\Omega;\mathbb{M}^{mn})$ oraz

$$\int_\Omega |\nabla\boldsymbol{u}^j(x)|^p\,dx \le M$$

dla pewnego $M \in \mathbb{R}$, wówczas istnieje rodzina $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ oraz podciąg danego ciągu (oznaczany tak samo) o tej własności, że jeśli

$$\varphi(\nabla u_j) \rightharpoonup \bar{\varphi} \quad \text{w } L^1(\Omega) \text{ dla } \varphi \in C(\mathbb{R}^m),$$

wówczas

$$\bar{\varphi}(x) = \int_{\mathbb{M}^{mn}} \varphi(\boldsymbol{A})\, d\nu_x(\boldsymbol{A}) \quad \text{p.w. w } \Omega.$$

Funkcja φ musi spełniać zależność

$$\lim_{|\boldsymbol{A}|\to\infty} \frac{|\varphi(\boldsymbol{A})|}{1+|\boldsymbol{A}|^p} = 0.$$

W celu precyzyjnego opisania miar Younga generowanych przez gradienty funkcji całkowalnych z p-tą potęgą wprowadza się następującą przestrzeń Banacha (dla ustalonego $p > 1$):

$$E^p = \left\{\psi \in C(\mathbb{M}^{mn}) : \sup_{\mathbb{M}^{mn}} \frac{|\psi(\boldsymbol{A})|}{1+|\boldsymbol{A}|^p} < \infty\right\}.$$

Wówczas p-miarami Younga będą elementy przestrzeni sprzężonej $(E^p)^*$.

Mamy następującą charakteryzację gradientowych p-miar Younga.

TWIERDZENIE 5.1 (Kinderlehrer–Pedregal [85]; Sychev [151]). *Rodzina miar probabilistycznych* $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ *jest gradientową p-miarą Younga, gdzie* $p \in [1,\infty)$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

(a) *istnieje* $u_0 \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ *takie, że*

$$\int_{\mathbb{M}^{mn}} \Lambda\, d\nu_x(\Lambda) = \nabla \boldsymbol{u}_0(x) \quad \textit{dla p.k. } x \in \Omega, \tag{5.1}$$

(b) *nierówność*

$$f(\nabla \boldsymbol{u}_0(x)) \le \int_{\mathbb{M}^{mn}} f(\Lambda)\, d\nu_x(\Lambda) \tag{5.2}$$

zachodzi dla dowolnej kwaziwypukłej funkcji f takiej, że

$$C_1 \le f(\Lambda) \le C_2(1+|\Lambda|^p)$$

dla prawie każdego $x \in \Omega$,

(c)

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{M}^{mn}} (1+|\Lambda|^p)\, d\nu_x(\Lambda)\, dx < \infty. \tag{5.3}$$

UWAGA 5.1. W przypadku skalarnym, tj. gdy $\min\{n,m\} = 1$, kwaziwypukłość redukuje się do wypukłości. Stąd każda rodzina miar probabilistycznych spełniająca własności (a) oraz (c) jest gradientową p-miarą Younga. Warunek (c) twierdzenia gwarantuje, że tzw. moment rzędu p jest skończony. Jest to konsekwencja faktu przyjętego założenia o wzroście funkcji podcałkowej.

W zagadnieniach geometrycznie nieliniowej teorii sprężystości rozważa się ciągi ograniczone w $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Wówczas z dokładnością do podciągu mamy

$$\boldsymbol{u}_j \to \boldsymbol{u}_\infty \text{ silnie w } L^p(\Omega;\mathbb{R}^n) \text{ oraz } \nabla\boldsymbol{u}_j \rightharpoonup \nabla\boldsymbol{u}_\infty \text{ słabo w } L^p(\Omega;\mathbb{M}^{nm}).$$

Jak wiemy (lemat 4.3), zbieżność silna w L^p gwarantuje, że miara Younga generowana przez ten ciąg jest miarą atomową, natomiast słabo zbieżny ciąg gradientów $\nabla\boldsymbol{u}_j$ generuje miarę ν_x taką, że

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega W(x,\boldsymbol{u}_j(x),\nabla\boldsymbol{u}_j(x))\,dx = \int_\Omega\int_{\mathbb{M}^{nm}} W(x,\boldsymbol{u}(x),\boldsymbol{A})\,d\nu_x(\boldsymbol{A})\,dx.$$

Ostatnia równość będzie mieć znaczenie przy formułowaniu problemów wariacyjnych za pomocą miar probabilistycznych.

6. Miary Younga generowane przez gradienty wyższego rzędu. Problemy wariacyjne wyższego rzędu pojawiają się często w literaturze matematycznej, inżynierskiej i fizycznej. Są one głównie powiązane z zagadnieniami dotyczącymi tzw. gradientowej teorii przejść fazowych i z nieliniową teorią powłok [96]. Zagadnienia równowagi materiałów mikromagnetycznych wymagają wprowadzenia drugiego gradientu, a także modelu Blake'a–Zissermana dla komputerowej segmentacji obrazów [23].

Naszym zdaniem zagadnienia miar Younga można rozszerzyć na przypadek funkcjonałów całkowych, których funkcja podcałkowa zależy od gradientów dowolnego rzędu. Rozważmy teraz przypadek, gdy $w \in W^{2,p}(\Omega)$. Z takim przypadkiem mamy do czynienia w zagadnieniach nieliniowej teorii płyt, np. płyt von Kármána. Niech funkcja energii wewnętrznej będzie dana w postaci

$$J(w) = \int_\Omega W(x,w(x),\nabla w(x),\nabla^2 w(x))\,dx. \tag{6.1}$$

Warto podkreślić, że zagadnienia tego typu nie były jeszcze rozpatrywane w literaturze.

Dla naszych celów będziemy zakładać, że funkcja podcałkowa jest wypukła względem drugiego gradientu. Jeszcze bardziej interesujący jest przypadek, gdy W jest funkcją kwaziwypukłą względem $\boldsymbol{A}$.

Niech $W(x,\boldsymbol{u}(x),\nabla\boldsymbol{u}(x),\nabla^2\boldsymbol{u}(x))$ będzie funkcją taką, że

$$W(x,p,\boldsymbol{q},\boldsymbol{A}) : \Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m\times\mathbb{M}^{mm}\to\mathbb{R}.$$

DEFINICJA 6.1. Funkcja $W(x,p,\boldsymbol{q},\boldsymbol{A})$ jest *2-kwaziwypukła* (kwaziwypukła względem drugiego gradientu), jeżeli

$$\int_D W(x_0,w_0,\nabla w_0,\boldsymbol{A}+\nabla^2\xi(y))\,dy \ge |D|W(x_0,w_0,\nabla w_0,\boldsymbol{A})$$

dla wszystkich $\xi\in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{R}^m)$ i dowolnego obszaru $D\subset\Omega$.

Niech $\{w_k\} \subset W^{2,p}(\Omega)$, $p \geq 1$. Rozważmy teraz zagadnienie istnienia miar Younga $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ stowarzyszonych z drugim gradientem w tym sensie, że istnieje ciąg $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ w przestrzeni Sobolewa $W^{2,p}(\Omega)$ taki, że

$$\int_\Omega W(x, w_j(x), \nabla w_j(x), \nabla^2 w_j(x))\, dx \\ \to \int_\Omega \int_{\mathbb{M}^{m^2}} W(x, w(x), \nabla w(x), A)\, d\nu_x(A)\, dx.$$

Zauważmy, że $w_j \in W^{2,p}(\Omega)$ oraz $w_j \rightharpoonup w^0$ w $W^{2,p}(\Omega)$ implikują

$$\begin{aligned} w_j &\to w && \text{silnie w } L^p(\Omega), \\ \nabla w_j &\to \nabla w && \text{silnie w } L^p(\Omega; \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Z lematu 4.3 wnioskujemy, że miara Younga związana z drugim i trzecim argumentem funkcji W jest produktem miar

$$\delta_{w(x)} \otimes \delta_{\nabla w(x)}.$$

Wobec tego miara Younga ma przedstawienie

$$\mu_x = \delta_{w(x)} \otimes \delta_{\nabla w(x)} \otimes \nu_x, \quad x \in \Omega.$$

Jest to miara parametryzowana odpowiadająca ciągowi drugich gradientów. Dla prostoty możemy przyjąć, że funkcja podcałkowa W zależy w sposób niejednorodny jedynie od drugiego gradientu, tzn.

$$\tilde{J}(w) = \int_\Omega W(x, \nabla^2 w(x))\, dx.$$

Można udowodnić następujący rezultat.

TWIERDZENIE 6.1. *Niech $\{w_k\} \subset W^{2,p}(\Omega)$ $(p > 1)$ będzie ciągiem ograniczonym. Niech ν_x będzie miarą Younga stowarzyszoną z ciągiem drugich gradientów. Wówczas*

(a) $\nabla^2 w(x) = \int_{\mathbb{M}^{n^2}} A\, d\nu_x(A)$ *dla* $w \in W^{2,p}$,

(b) $\int_{\mathbb{M}^{n^2}} W(x, A)\, d\nu_x(A) \geq W(x, \nabla^2 w(x))$.

Można też udowodnić silniejszą wersję poprzedniego twierdzenia.

TWIERDZENIE 6.2. *Rodzina $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ jest miarą Younga stowarzyszoną z ciągiem drugich gradientów dla $p \in [1, \infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy*

(a) *istnieje $w_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ takie, że*

$$\int_{\mathbb{M}^{n^2}} A\, d\nu_x(A) = \nabla^2 w_0(x)$$

dla p.k. $x \in \Omega$,

(b) *dla p.k.* $x \in \Omega$ *nierówność*

$$\phi(\nabla^2 w_0(x)) \leq \int_{\mathbb{M}^{n^2}} \phi(A)\, d\nu_x(A)$$

zachodzi dla każdej funkcji 2-kwaziwypukłej $c \leq \phi(A) \leq C|A|^p + c_1$, *gdzie* C, c_1 *oznaczają stałe dodatnie,*

(c)

$$\int_\Omega \int_{\mathbb{M}^{n^2}} (1 + |A|^p)\, d\nu_x(A)\, dx < \infty \qquad \forall A \in \mathbb{M}^{n^2}.$$

Zagadnienie badania funkcjonałów całkowych, których funkcje podcałkowe zależą od gradientów dowolnego rzędu, w szczególności badanie minimalizacji takich funkcjonałów nie zajmuje wiele miejsca w literaturze. Pionierską pracą jest tu praca [21] Balla, Currie i Olvera z 1981 r. Zagadnienia dotyczące miar parametryzowanych dla zagadnień wariacyjnych wyższych rzędów będą tematem osobnej pracy.

7. Lemat Chacona. Ważnym faktem mającym szczególne znaczenie w teorii miar Younga i w naszych zastosowaniach jest lemat Chacona o wygryzaniu (ang. *biting lemma*). Chodzi o to, że w przestrzeni $L^1(\Omega)$ ciąg ograniczony jest słabo zbieżny (z dokładnością do podciągu) na ogół do miary, a nie do funkcji. Po usunięciu ze zbioru Ω odpowiedniego zbioru o małej mierze mamy słabą zbieżność naszego podciągu do funkcji z $L^1(\Omega)$.

TWIERDZENIE 7.1. *Niech* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *będzie zbiorem mierzalnym i ograniczonym. Niech* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *będzie ograniczonym ciągiem funkcji w* $L^1(\Omega)$. *Wówczas istnieją: funkcja* $f \in L^1(\Omega)$, *podciąg* f_{j_s} *ciągu* f_j *i nierosnący ciąg mierzalnych podzbiorów* $E_k \subset \Omega$ *o własności* $\lim_{k\to\infty} \operatorname{meas}(E_k) = 0$, *takie, że*

$$f_{j_s} \rightharpoonup f \quad w\ L^1(\Omega \setminus E_k),\ gdy\ s \to \infty, \tag{7.1}$$

dla każdej ustalonej liczby k. ■

DEFINICJA 7.1. Mówimy , że ciąg f_j jest *b-zbieżny* do f ($f_j \xrightarrow{b} f$), jeśli f_j spełnia powyższy warunek 7.1.

Twierdzenie 8.1 oznacza, że po wycięciu z Ω zbioru o dowolnie małej mierze ciąg słabo zbieżny $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dąży do funkcji w przestrzeni L^1, a nie do miar jak w przypadku ogólnym. Fakt ten ma duże znaczenie przy dowodzeniu istnienia minimizerów metodą bezpośrednią. Mamy następujące uogólnienie twierdzenia Acerbi–Fusco [1] o słabej dolnej półciągłości w wielowymiarowym rachunku wariacyjnym przy wykorzystaniu miar Younga.

TWIERDZENIE 7.2 (Ball–Zhang [20]). *Niech* $1 \leq p < \infty$ *i niech* $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{mn} \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją spełniającą następujące warunki:*

(a) f *jest funkcją Carathéodory'ego,*

(b) $|f(x,\boldsymbol{u},\boldsymbol{\xi})| \leq a(x)+C(|\boldsymbol{u}|^p+|\boldsymbol{\xi}|^p)$ *dla p.k.* $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{M}^{mn}$, *gdzie* $c \geq 0$ *jest stałą oraz* $a(\cdot) \in L^1(\Omega)$,

(c) f *jest funkcją kwaziwypukłą.*

Wówczas dla danego ciągu $u_j \rightharpoonup u$ *w* $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ *istnieje podciąg* u_s *i rodzina miar probabilistycznych* $(\nu_x)_{x\in\Omega}$ *określonych na* $\mathbb{M}^{n^2}$ *zależnych w sposób mierzalny od* x, *takie, że*

$$f(x,u_s,Du_s) \overset{b}{\rightharpoonup} l(x) := \langle \nu_x, f(x,\boldsymbol{u}(x),\cdot)\rangle \quad w\ \Omega \tag{7.2}$$

oraz

$$\langle \nu_x, f(x,\boldsymbol{u}(x),\cdot)\rangle \geq f(x,\boldsymbol{u}(x),\nabla \boldsymbol{u}(x)) \quad p.w.\ w\ \Omega. \tag{7.3}$$

Ponadto, jeżeli E_k *oznacza ciąg mierzalnych podzbiorów zbioru* Ω *spełniających warunek* $\lim_{k\to\infty} \mathrm{meas}(E_k) = 0$, *wówczas dla każdej ustalonej liczby* k *mamy*

$$\int_{\Omega\setminus E_k} f(x,\boldsymbol{u}(x),\nabla \boldsymbol{u}(x))\,dx \leq \liminf_{s\to\infty} \int_{\Omega\setminus E_k} f(x,\boldsymbol{u}_s,\nabla \boldsymbol{u}_s(x))\,dx. \ \blacksquare$$

Mamy następujacy pożyteczny rezultat o ogólnej dolnej półciągłości dla funkcjonałów całkowych.

TWIERDZENIE 7.3 (Ball–Zhang [20]). *Niech*

$$I(u) = \int_\Omega g(x, f_1(x,\boldsymbol{u},\nabla \boldsymbol{u}),\ldots,f_M(x,\boldsymbol{u},\nabla \boldsymbol{u}))\,dx, \tag{7.4}$$

gdzie $g : \Omega \times \mathbb{R}^M \to [0,+\infty]$ *jest funkcją typu Carathéodory'ego taką, że dla* $x \in \Omega$ *prawie wszędzie,*

(a) $\boldsymbol{a} \mapsto g(x,\boldsymbol{a})$ *jest funkcją wypukłą dla* $\boldsymbol{a} = (a_1,\ldots,a_M)$,

(b) $g(x,\boldsymbol{a})$ *jest niemalejąca względem* $a_l \in I_l$ *dla* $1 \leq l \leq M$, *gdzie* $I_l \subset \mathbb{R}$ *jest odcinkiem domkniętym (skończonym lub nie) oraz gdzie dla* $1 \leq l \leq M$,

(c) $f_l : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{M}^{mn} \to I_l$,

(d) f_l *spełnia założenia twierdzenia* 7.2 *dla pewnego* p *niezależnie od* l.

Niech $u_j \rightharpoonup u$ *w* $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. *Wówczas*

$$I(u) \leq \liminf_{j\to\infty} I(u_j).\cdot$$

Dowody powyższych twierdzeń znajdują się w pracy Balla i Zhanga [20]. Cała ta praca polega na zgrabnym powiązaniu aparatu miar Younga z lematem o wygryzaniu.

8. Analiza efektów koncentracji i oscylacji generowanych przez gradient. Zjawisko oscylacji można opisać, stosując miary Younga. Jednakże wadą miar Younga jest to, że gubią one efekty związane z koncentracją (por. [55, 66, 68, 133, 153]). Różne ciągi mogą generować te same miary Younga. Niektóre z tych ciągów mogą wykazywać efekt koncentracji, nie opisany przez miary Younga.

Przedstawimy tutaj propozycję podaną w pracy Fonseca i in. [66], dającą ogólną charakteryzację efektów koncentracji i oscylacji. W tym celu potrzebne jest pojęcie pary miar: miary Younga oraz miary warifoldowej, w skrócie MY-V (ang. *Young measure–varifold pair*).

Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie podzbiorem otwartym i ograniczonym i niech $\{f_j\}$ będzie ograniczonym ciągiem funkcji w $L^p(\Omega, \mathbb{R}^d)$ dla pewnego $p > 1$. Wówczas istnieje podciąg ciągu $\{f_j\}$, tak samo oznaczony, oraz rodzina $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ miar probabilistycznych określona na $\mathbb{R}^m$ oraz nieujemna miara Radona Λ określona na przestrzeni $\Omega\times\mathbb{S}^{d-1}$, zwana warifoldową, o następujących własnościach. Dla dowolnej funkcji $\vartheta \in C_0(\Omega)$ i wszystkich ciągłych funkcji φ określonych na $\mathbb{R}^d$ spełniających warunek

$$|\varphi(\boldsymbol{A})| \le C(1 + |\boldsymbol{A}|^r), \qquad 1 \le r \le p,$$

oraz dla dowolnych funkcji ψ ciągłych na $\mathbb{R}^d$ i jednorodnych stopnia p mamy

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \vartheta(x)\varphi(f_j(x))\,dx = \int_\Omega \vartheta(x) \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\boldsymbol{A})\,d\nu_x(\boldsymbol{A})\,dx \tag{8.1}$$

oraz

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \vartheta(x)\psi(f_j(x))\,dx &= \int_{\Omega\times\mathbb{S}^{d-1}} \vartheta(x)\psi(\boldsymbol{A})\,d\Lambda(x, \boldsymbol{A}) \\ &= \int_\Omega \vartheta(x) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \psi(\boldsymbol{A})\,d\lambda_x(A)d\pi(x).\end{aligned} \tag{8.2}$$

Ostatnia równość oznacza dezintegrację miary Radona Λ (por. [169]). Powyżej przyjęto następujące oznaczenia: π jest rzutem miary Λ na Ω, zaś $\lambda = \{\lambda_x\}_{x\in\Omega}$ jest rodziną miar probabilistycznych (dla π-prawie każdego $x \in \Omega$), $\Lambda = \lambda \otimes \pi$, $\lambda = \{\lambda_x\}_{x\in\Omega}$ jest dekompozycją miary Λ (por. [59]). Jeżeli $\{\boldsymbol{u}_j\}$ jest ciągiem ograniczonym w $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ i $\boldsymbol{f}_j = \nabla \boldsymbol{u}_j$ oraz jeśli przestrzeń $\mathbb{R}^d$ jest identyfikowana z przestrzenią $\mathbb{M}^{mn}$ macierzy $m \times n$, to mówimy ze (ν, Λ) jest parą $W^{1,p}(\Omega)$-YM-V, a nawet krócej, (ν, Λ) jest parą YM-V.

Poniższy przykład pokazuje, że istnieją ograniczenia na miarę Λ. Niech $p = m = n$ i niech funkcja ψ będzie wyznacznikiem, $\psi(\boldsymbol{A}) = \det \boldsymbol{A}$. Wówczas na mocy powyższych rozważań mamy

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega \vartheta(x) \det \nabla \boldsymbol{u}_j(x)\,dx = \int_\Omega \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \det \boldsymbol{A}\,d\lambda_x(\boldsymbol{A})\,d\pi(x).$$

Z drugiej strony wiadomo, że (por. Ball [14])

$$\det \nabla \boldsymbol{u}_j \rightharpoonup \det \nabla \boldsymbol{u}$$

w sensie miar, gdzie $\boldsymbol{u}$ oznacza słabą granicę ciągu $\{\boldsymbol{u}_j\}$ w przestrzeni

$W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Stąd wniosek, że zachodzi zależność

$$(\det \nabla \boldsymbol{u})\, dx = \Big(\int\limits_{\mathbb{S}^{n^2-1}} \det \boldsymbol{A}\, d\lambda_x(\boldsymbol{A})\Big)\, d\pi,$$

gdzie dx oznacza miarę Lebesgue'a. Jeżeli miarę π rozłożymy na część absolutnie ciągłą i osobliwą: $\pi = \pi_a + \pi_s$ względem miary Lebesgue'a dx, to otrzymamy związek

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{n^2-1}} \det \boldsymbol{A}\, d\lambda_x(\boldsymbol{A}) = 0$$

dla π_s-prawie każdego $x \in \Omega$.

Podstawowe twierdzenie charakteryzujące parę YM-V jest następujące.

TWIERDZENIE 8.1. *Niech $p > 1$. Para (ν, Λ) jest parą YM-V, gdzie $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ oraz $\Lambda = \{\lambda_x\}_{x\in\Omega} \otimes \pi$, wtedy i tylko wtedy, gdy:*

1. $\nabla u(x) = \int_{\mathbb{M}^{mn}} \boldsymbol{A}\, d\nu_x(\boldsymbol{A})$ *dla prawie każdego (w sensie miary Lebesgue'a) $x \in \Omega$, dla pewnego $u \in W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$,*

2. $\varphi(\nabla u(x)) \le \int_{\mathbb{M}^{mn}} \varphi(\boldsymbol{A})\, d\nu_x(A)$ *dla prawie każdego $x \in \Omega$ oraz dla każdej kwaziwypukłej funkcji φ, posiadającej skończoną granicę*

$$\lim_{|\boldsymbol{A}|\to\infty} \frac{\varphi(\boldsymbol{A})}{1 + |\boldsymbol{A}|^p},$$

3. $\int_{\mathbb{M}} \psi(\boldsymbol{A})\, d\nu_x(\boldsymbol{A}) \le (d\pi/dx) \int_S \psi(A)\, d\lambda_x(\boldsymbol{A})$ *dla prawie każdego $x \in \Omega$ oraz dla każdej p-jednorodnej ciągłej funkcji ψ takiej, że $Q\psi(0) = 0$, gdzie $Q\psi$ jest kwaziwypukłą regularyzacją funkcji ψ,*

4. $\int_S \psi(A)\, d\lambda_x(A) \ge 0$ *dla π_s-prawie każdego $x \in \Omega$, dla każdej p-jednorodnej, ciągłej funkcji ψ takiej, że $Q\psi(0) = 0$; π_s oznacza tu część osobliwą miary π względem miary Lebesgue'a dx.*

Części 1 i 2 powyższego twierdzenia wraz z warunkiem całkowalności

$$\int\limits_{\Omega} \int\limits_{\mathbb{M}^{mn}} |A|^p\, d\nu_x(A)\, dx < \infty$$

charakteryzują miarę Younga. Część 3 pokazuje oddziaływania pomiędzy miarą Younga oraz absolutnie ciągłą częścią miary warifoldowej. Część 4 twierdzenia reprezentuje ograniczenia na miarę warifoldową w zbiorze, gdzie skoncentrowana jest osobliwa część miary π, mianowicie miara π_s. Interesującą konsekwencją tego rezultatu jest to, że nie ma ograniczenia na szczególną miarę π. Dowód, którego nie będziemy przytaczać, tego twierdzenia opiera się na rezultacie dotyczącym dekompozycji ciągów gradientów ograniczonych w $L^p(\Omega;\mathbb{R}^m)$. W szczególności chodzi o to, że każdy taki ciąg ma podciąg, który może być przedstawiony jako suma ciągu $\{\nabla z_j\}$ gradientów, którego p-ta potęga jest jednostajnie całkowalna, i pozostałą, która jest zbieżna do zera w sensie miary (i stąd prawie jednostajnie zbieżna).

Mówimy, że $\{\nabla z_j\}$ odpowiada za oscylacje, podczas gdy pozostała część charakteryzuje efekty koncentracji.

LEMAT 8.4. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i ograniczonym i niech $\{\boldsymbol{w}_j\}$ będzie ciągiem ograniczonym w $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Wówczas istnieje podciąg $\{\boldsymbol{w}_k\}$ oraz ciąg $\{z_k\} \subset W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ takie, że miara Lebesgue'a*

$$|\{z_j \neq \boldsymbol{w}_j \text{ lub } \nabla z_j \neq \nabla \boldsymbol{w}_j\}| \to 0,$$

gdy $j \to \infty$, oraz $\{|\nabla z_j|^p\}$ jest ciągiem funkcji jednostajnie całkowalnych. Ponadto, jeśli Ω jest obszarem spełniającym warunek Lipschitza, wówczas każde z_j może być wybrane jako funkcja Lipschitza.

Zauważmy, że lemat ten mówi, iż oba ciągi $\{\nabla z_j\}$ oraz $\{\nabla \boldsymbol{w}_j\}$ generują tę samą miarę Younga (por. [89]). Charakteryzacja $W^{1,p}$-miar Younga nie daje żadnej metody rozkładu ciągu na część „oscylacyjną" i związaną z „koncentracją" danego ciągu $\{\boldsymbol{w}_j\}$ ograniczonego w $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$.

Charakteryzacja ta mówi jedynie o tym, że miara Younga generowana przez ciąg $\{\boldsymbol{w}_j\}$ będzie generowana również przez ciąg $\{\boldsymbol{v}_j\}$ taki, że $\{|\boldsymbol{v}_j|^p\}$ jest jednakowo całkowalny. Okazuje się jednak, że nie istnieje bezpośredni związek pomiędzy jednym ciągiem a drugim.

Podamy jeszcze charakteryzację $W^{1,p}$- miar Younga w języku nierówności Jensena dla funkcji kwaziwypukłych.

TWIERDZENIE 8.2 (Fonseca i in. [66]). *Niech $p > 1$. Miara parametryzowana $\nu = \{\nu_x\}_{x\in\Omega}$ jest $W^{1,p}$-miarą Younga wtedy i tylko wtedy, gdy*

1. $\nabla \boldsymbol{u}(x) = \int_{M}^{mn} \boldsymbol{A}\, d\nu_x(\boldsymbol{A})$ *dla p.k. $x \in \Omega$ oraz pewnego $\boldsymbol{u} \in W^{1,p}(\omega)$,*
2. $\varphi(\nabla \boldsymbol{u}(x)) \leq \int_{M}^{mn} \varphi(\boldsymbol{A})\, d\nu_x(\boldsymbol{A})$ *dla p.k. $x \in \Omega$ oraz dla każdej kwaziwypukłej funkcji φ takiej, że istnieje skończona granica*

$$\lim_{|\boldsymbol{A}|\to\infty} \frac{\varphi(\boldsymbol{A})}{1 + |\boldsymbol{A}|^p} < \infty,$$

3. $\int_\Omega \int_{M}^{mn} |\boldsymbol{A}|^p\, d\nu_x(\boldsymbol{A})\, dx < \infty.$

PRZYKŁAD 8.1 (oscylacje). Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $p > 1$. Daną funkcję $f \in W_0^{1,p}(Y;\mathbb{R}^m)$ przedłużamy periodycznie na całą przestrzeń $\mathbb{R}^n$, z okresem $Y = (-1/2, 1/2)^n$. Dla ustalonego elementu $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^{mn}$ określamy

$$u_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \frac{1}{j} f(j\boldsymbol{x}).$$

Ponieważ

$$\nabla \boldsymbol{u}_j(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A} + \nabla f(\boldsymbol{y}), \qquad \boldsymbol{y} = j\boldsymbol{x},$$

wobec tego widać, że ciąg $\boldsymbol{u}_j \rightharpoonup \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ w $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$ oraz para YM-V generowana przez ciąg jest parą (ν, Λ), gdzie (por. (8.1) i dzięki okresowości funkcji f)

$$\langle \nu_x, \varphi \rangle = \int\limits_Y \varphi(\boldsymbol{A} + \nabla f(y))\, dy$$

dla prawie każdego (względem miary Lebesgue'a) x należącego do obszaru Ω i dla wszystkich funkcji $\varphi \in C_0(\mathbb{M}^{mn})$ oraz $\lambda = \{\lambda_x\}_{x \in \Omega} \otimes \pi$, gdzie $\pi = \|\boldsymbol{A} + \nabla f\|^p_{L^p(Y,\mathbb{M})}$ i ponadto (por. (8.2))

$$\langle \lambda_x, \psi \rangle = \frac{1}{\|\boldsymbol{A} + \nabla f\|^p_{L^p(Y,\mathbb{M})}} \int\limits_Y \psi\Big(\frac{\boldsymbol{A} + \nabla f(y)}{|\boldsymbol{A} + \nabla f(y)|}\Big) |\boldsymbol{A} + \nabla f(y)|^p\, dy$$

dla π-prawie każdego $x \in \Omega$ i wszystkich funkcji $\psi \in C(\mathbb{S}^{mn-1})$.

PRZYKŁAD 8.2 (koncentracje). Rozważamy funkcję $f \in W_0^{1,p}(Y; \mathbb{R}^m)$ przedłużoną zerem na $\mathbb{R}^m$, $Y = (-1/2, 1/2)^n$. Ustalamy $p > 1$ i wybieramy $x_0 \in \Omega$ oraz określamy ciąg u_j następująco:

$$u_j(x) := j^{-1+n/p} f(j(x - x_0)).$$

Wówczas ciąg $u_j \rightharpoonup 0$ jest słabo zbieżny do zera w $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ oraz istnieje para YM-V (ν, Λ) generowana przez ten ciąg taka, że $\nu = \delta_0$ dla p.k. $x \in \Omega$, $\Lambda = \{\lambda_x\}_{x \in \Omega} \otimes \pi$, gdzie $\pi = \|\nabla f\|^p_{L^p(Y,\mathbb{M})} \delta_{x_0}$ oraz

$$\langle \lambda_x, \psi \rangle = \frac{1}{\|\nabla f\|^p_{L^p(Y,\mathbb{M})}} \int\limits_Y \psi\Big(\frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|}\Big) |\nabla f(y)|^p\, dy$$

dla π-p.k. $x \in \Omega$ i wszystkich $\psi \in C(\mathbb{S}^{mn-1})$.

Jeżeli $\varphi \in C_0(\mathbb{M}^{mn})$ spełnia warunek $\varphi(0) = 0$, wówczas

$$\lim_{j \to \infty} \int\limits_\Omega \theta(x) \varphi(\nabla u_j(x))\, dx = 0$$

dla wszystkich funkcji $\theta \in C_0(\Omega)$. Ustalmy $\varepsilon > 0$ oraz q takie, że $1 < q < p$. Istnieje wówczas $C(\varepsilon) > 0$ takie, że $|\varphi(\boldsymbol{A})| \le \varepsilon + c(\varepsilon)|\boldsymbol{A}|^p$ dla wszystkich $\boldsymbol{A} \in \mathbb{M}^{mn}$. Stąd

$$\begin{aligned} \Big|\int\limits_\Omega \theta(x)\varphi(\nabla u_j(x))\, dx\Big| &\le \varepsilon \|\theta\|_{L^\infty} + C(\varepsilon)\|\theta\|_{L^\infty} n^{Nq/p} \int\limits_\Omega |\nabla f(j(x - x_0))|^q\, dx \\ &\le \varepsilon \|\theta\|_{L^\infty} + C(\varepsilon)\|\theta\|_{L^\infty} j^{nq/p} \|\nabla f\|^q_{L^q(Y,\mathbb{M}^{mn})}. \end{aligned}$$

Przechodząc do granicy z $j \to \infty$ oraz z $\varepsilon \to 0$, otrzymujemy wymagany rezultat.

Weźmy funkcję $\psi \in C(\mathbb{S}^{mn-1})$. Dla dostatecznie dużych j mamy

$$\begin{aligned} &\int\limits_\Omega \theta(x)\psi\Big(\frac{\nabla u_j(x)}{|\nabla u_j(x)|}\Big)|\nabla u_j(x)|^p\, dx \\ &\qquad = \int\limits_\Omega \theta(x)\psi\Big(\frac{\nabla f(j(x - x_0))}{|\nabla f(j(x - x_0))|}\Big) j^n |\nabla f(j(x - x_0))|^p\, dx \end{aligned}$$

$$= \int_Y \theta(x_0 + \frac{1}{j}y)\psi\Big(\frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|}\Big)|\nabla f(y)|^p\,dy.$$

Przechodząc z $j \to \infty$, dostajemy

$$\int_\Omega \int_S \theta(x)\psi(A)\,d\nu_x(A)\,d\pi(x) = \theta(x_0)\int_Y \psi\Big(\frac{\nabla f(y)}{|\nabla f(y)|}\Big)|\nabla f(y)|^p\,dy.$$

W ostatnim przykładzie zachowanie się ciągu minimizerów było całkowicie scharakteryzowane przez miarę warifoldową z pewną informacją o mierze Younga $\nu_x = \delta_0$.

Innymi przypadkami, w których miary warifoldowe odgrywają istotną rolę, są takie, w których poszukuje się efektywnej energii

$$\liminf_{j\to\infty} \int_\Omega W(\nabla u_j)\,dx$$

stowarzyszonej z ciągiem $\{u_j\}$ ograniczonym w przestrzeni $W^{1,p}(\Omega;\mathbb{R}^m)$, gdzie funkcja W, gęstość energii wewnętrznej, jest niewypukła i ma zachowanie asymptotyczne w nieskończoności typu $C(1+|\boldsymbol{A}|^p)$.

Pierwsze prace, w których stosowano miary probabilistyczne do zagadnień ewolucji, należą do Tartara [153]; dokładniej chodzi o prawa zachowania, w których pojawiły się oscylacje. Następnie pojawiła się potrzeba wprowadzenia aparatu nadającego się do badania efektów koncentracji, szczególnie wtedy, kiedy ograniczenia w L^∞ były nieosiągalne. Takie miary zaproponowali DiPerna i Majda [55]. Ich idea polegała na wprowadzeniu trójki uogólnionych miar Younga (μ, ν^1, ν^2) stowarzyszonych z ciągiem ograniczonym w przestrzeni L^2. Związki pomiędzy wprowadzonymi w tym rozdziale miarami a miarami DiPerny i Majdy można scharakteryzować następująco:

$$\mu := \pi, \quad \nu^1 := \frac{1+|\cdot|^2}{1+\frac{d\pi}{dx}}\nu_x, \quad \nu^2 = \lambda_x.$$

DiPerna i Majda [55] pokazali, że uogólnione miary Younga, generowane przez ciąg klasycznych rozwiązań dwuwymiarowego równania Eulera z jednostajnie ograniczoną lokalną energią kinetyczną, stanowią rozwiązanie miarowe. Więcej informacji o miarach DiPerny i Majdy i ich relacji z klasycznymi miarami Younga można znaleźć w pracach Kružika i Roubička [91].

9. H-miary. Jeżeli ciąg funkcyjny dąży słabo do zera (a nie silnie) w $L^2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$), wówczas ciąg taki wykazuje efekty oscylacji lub koncentracji w zależności od tego, czy granica jego kwadratu ma n-wymiarową gęstość, czy też nie. Jakościowa metoda badania efektów oscylacji lub koncentracji jest związana z zastosowaniem H-miar; są to miary określone na zbiorze $\Omega \times \mathbb{S}^{n-1}$. Mają one charakter mikrolokalny, jednocześnie precyzują i uogólniają twierdzenia o skompensowanej zwartości. Pojęcie H-miary wprowadził Tartar [155]. Niezależnie od niego Gerard [69] wprowadził pojęcie lokalnego defektu miary, co jest tym samym co H-miary w sensie Tartara. W rozdziale 9 pracy wprowadziliśmy pojęcie pary YM-V; jest to próba powiązania efektów oscylacji i koncentracji dla pewnych problemów nieliniowych, gdzie efekty oscylacji czy koncentracji są generowane przez gradient funkcji wektorowej (por. [66]).

W przeciwieństwie do tego podejścia H-miary są pojęciem wprowadzonym wcześniej i służyły do badania równań liniowych (np. hiperbolicznych). Zastosowanie aparatu H-miar do badania zadań brzegowych i brzegowo-początkowych można znaleźć w pracach [7, 67, 133, 95].

Podobnie jak dla miar Younga, istnieje twierdzenie o istnieniu H-miar związanych z ciągiem słabo zbieżnym w przestrzeni $L^2(\Omega)$.

Niech $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon\}$ będzie ciągiem funkcji wektorowych (mogą być skalarne jako szczególny przypadek) określonych na $\mathbb{R}^n$ z wartościami w $\mathbb{R}^m$. Składowe funkcji $\boldsymbol{u}_\varepsilon$ o wartościach wektorowych oznaczamy przez $\{u_\varepsilon^i\}_{1\le i\le m}$.

TWIERDZENIE 9.1 (istnienie H-miar). *Niech $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ będzie ciągiem słabo zbieżnym w $L^2(\Omega;\mathbb{R}^m)$ do zera. Wówczas istnieje podciąg tego ciągu i rodzina miar Radona o wartościach zespolonych $\boldsymbol{\mu} = (\mu^{ij}(x,\boldsymbol{\xi}))_{1\le i,j\le m}$, określona na przestrzeni $\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^{n-1}$ takie, że zależność*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}[\mathcal{F}(\phi_1 u_\varepsilon^i)](\boldsymbol{\xi})\,\overline{[\mathcal{F}(\phi_2 u_\varepsilon^j)](\xi)}\,\psi(\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|)\,d\xi \tag{9.1}$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\phi_1(x)\overline{\phi_2}(x)\psi(\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|)\mu_{ij}(dx,d\xi) = \langle\mu^{ij},\phi_1\overline{\phi_2}\otimes\psi\rangle$$

zachodzi dla dowolnych funkcji $\phi_1,\phi_2\in C_0(\mathbb{R}^n)$ oraz $\psi\in C(\mathbb{S}^{n-1})$.

Tutaj $\mathcal{F}$ oznacza transformatę Fouriera:

$$\mathcal{F}[f(x)](\boldsymbol{\xi}) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\xi}}\,d\boldsymbol{x}.$$

Symbol $\overline{f}$ oznacza sprzężenie zespolone funkcji f. Podobnie jak w poprzednim rozdziale $\mathbb{S}^{n-1}$ oznacza sferę $(n-1)$-wymiarową.

Podczas gdy miara Younga „mierzy" oscylacje, H-miara lokalizuje, w jakim miejscu w przestrzeni fizycznej i w jakim kierunku następuje osłabienie silnej zbieżności ciągu, spowodowanej oscylacją lub koncentracją.

Mamy następującą ważną własność H-miar:

LEMAT 9.1. *Wartości H-miary leżą w zbiorze macierzy hermitowskich nieujemnych:*

$$\mu_{ij} = \overline{\mu}_{ji},\qquad \sum_{i,j=1}^{p}\mu_{ij}\lambda_i\overline{\lambda}_j \ge 0\qquad \forall\lambda\in\mathbb{C}^p. \tag{9.2}$$

Własność ta wynika natychmiast ze związku (9.1).

LEMAT 9.2. *Jeżeli ciąg macierzy* $\{u_i^\varepsilon u_j^{*\varepsilon}\}_{0\le i,j\le n}$ *jest słabo* zbieżny do miary* ν_{ij}, *to dla każdej funkcji ciągłej* $\phi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ *zachodzi zależność*

$$\langle \nu_{ij}, \phi\rangle = \langle \mu_{ij}, \phi \otimes 1\rangle.$$

Fakt ten wynika z (9.1), jeśli przyjąć $\psi = 1$ i wykorzystać twierdzenie Plancherela.

PRZYKŁAD 9.1. Niech $\{u_j(x)\}_{j\in\mathbb{N}}$ dąży silnie do zera w $L^2(\mathbb{R}^m)$. Wówczas $\mu_{ij} = 0$. Krótko mówiąc, H-miara ciągu silnie zbieżnego do zera jest równa zeru. Zauważmy, że nie ma w tym przypadku potrzeby wybierania podciągu, ponieważ ciąg transformat

$$[\mathcal{F}(u_j(x))](\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} u_j(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx$$

jest silnie zbieżny do zera.

PRZYKŁAD 9.2. Rozważmy ciąg funkcji skalarnych posiadający *efekt koncentracji* w pewnym ustalonym punkcie $z \in \mathbb{R}^n$,

$$u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n/2} f\left(\frac{x-z}{\varepsilon}\right), \tag{9.3}$$

gdzie $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Oczywiście zakładamy, że ciąg ten jest słabo zbieżny do zera. Odpowiadająca temu ciągowi H-miara μ jest równa (por. [155])

$$\mu = \delta_z \otimes \nu,$$

gdzie ν ma następującą gęstość powierzchniową:

$$\nu(\xi) = \int_0^\infty |\mathcal{F}f(t\xi)|^2 t^{n-1}\, dt \quad \text{dla } \xi \in \mathbb{S}^{n-1}. \tag{9.4}$$

Zgodnie z twierdzeniem o istnieniu H-miar możemy napisać

$$\langle \mu, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \Phi\left(z, \frac{\xi}{|\xi|}\right) d\xi \tag{9.5}$$

dla każdej funkcji Φ ciągłej na $\mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1}$. Dla każdej funkcji ciągłej ϕ o nośniku zwartym ciąg funkcji

$$\{\phi u_\varepsilon - \phi(z) u_\varepsilon\}$$

dąży silnie do zera w przestrzeni $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ponadto zauważmy, że

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} |\phi(z)|^2 |\mathcal{F}u_\varepsilon(\xi)|^2 \psi(\xi/|\xi|)\, d\xi &= \lim_{\varepsilon\to 0} |\phi(z)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^n |\mathcal{F}f(\varepsilon\xi)|^2 \psi(\xi/|\xi|)\, d\xi \\ &= |\phi(z)|^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}f(\xi)|^2 \psi(\xi/|\xi|)\, d\xi = \langle \mu, |\phi|^2 \otimes \psi\rangle.\end{aligned}$$

Ważną własnością H-miar jest tzw. zasada lokalizacji, która jest uogólnieniem teorii skompensowanej zwartości (por. [153]).

TWIERDZENIE 9.2 (zasada lokalizacji). *Niech ciąg $\{u_\varepsilon\}$ będzie słabo zbieżny do zera i niech μ będzie H-miarą stowarzyszoną z tym ciągiem. Ponadto niech ciąg ten spełnia warunek*

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}(A^l_{kj}(x)u^j_\varepsilon(x)) \to 0 \quad \textit{silnie w } H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n);\ l=1,\ldots,l_0, \tag{9.6}$$

gdzie współczynniki $A^l_{kj}(x)$ są funkcjami ciągłymi w podzbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Wówczas H-miara μ spełnia zależność

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} A^l_{kj}(x)\xi_j\mu_{kr} = 0 \quad \textit{w } \Omega \textit{ dla każdego } r. \tag{9.7}$$

PRZYKŁAD 9.3. Niech $A^k_{ij} = \epsilon_{kij}$, gdzie

$$\epsilon_{kij} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } k,i,j \text{ tworzą permutację parzystą,} \\ -1, & \text{gdy } k,i,j \text{ tworzą permutację nieparzystą,} \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Wówczas warunek (9.6) oznacza, że wektor rotacji ciągu wektorów spełnia warunek

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{u}^\varepsilon(x) \to 0.$$

Warunek (9.7) przyjmuje postać

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}\epsilon_{lij}\xi_i\mu_{jr} = 0.$$

Z powyższego warunku wnioskujemy, że miara μ stowarzyszona z ciągiem ma następującą reprezentację:

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\xi} \otimes \boldsymbol{\xi}\nu,$$

gdzie ν jest skalarną miarą Radona.

PRZYKŁAD 9.4. Prostym przykładem ciągów słabo zbieżnych są ciągi funkcji periodycznych. Niech będzie dany ciąg funkcji

$$u_\varepsilon(x) = u(x, x/\varepsilon),$$

gdzie funkcja $u(x,y)$ jest określona na $\mathbb{R}^n \times Y$ (Y — komórka periodyczności), Y-okresowa względem drugiej zmiennej. Ponadto u spełnia warunek $\int_Y u(x,y)\,dy = 0$. Dla prostoty możemy założyć, że funkcja $u(x,\cdot)$ jest ciągła względem x i przyjmuje wartości w przestrzeni $L^\infty(Y)$. H-miara takiego ciągu może być wyznaczona w sposób analityczny. Mamy następujący rezultat (por. [6, 87, 155]):

LEMAT 9.3. *Niech funkcja $u(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ ma rozwinięcie Fouriera względem $\boldsymbol{y}$, tzn.*

$$u^k(x,y) = \sum_{q\in\mathbb{Z}^n} u_q^k(x)e^{2i\pi q\cdot y}. \tag{9.8}$$

Wtedy H-miara stowarzyszona z ciągiem $\{u^k\}$ *ma postać*

$$\mu_{kl} = \sum_{q\in\mathbb{Z}^n,\, q\neq 0} u_q^k(x)\overline{u}_q^l(x)\delta_{q/|q|}(\xi), \tag{9.9}$$

gdzie $\delta_{q/|q|}$ *jest miarą Diraca w punkcie* $q/|q|$.

Zauważmy, że w równaniu (9.8) współczynnik $u_0^k(x)$ musi być równy zeru, aby ciąg u_ε był słabo zbieżny do zera.

Można uprościć definicję H-miary dla okresowo oscylujących funkcji $u_\varepsilon(x) = u(x/\varepsilon)$, gdzie $u \in L^2_{\mathrm{per}}(Y)^p$. Teraz nie musimy zakładać, że funkcja $u(y)$ ma wartość średnią równą zero na komórce Y, ponieważ zawsze możemy wybrać podciąg i zastosować poprzedni lemat. Ponadto ponieważ badamy głównie funkcje o wartościach rzeczywistych, możemy rozważać tylko rzeczywistą część H-miary. Dla wygody będziemy oznaczać H-miarę związaną z $u(y)$, opuszczając zależność od zmiennej x. Wprowadźmy następującą definicję.

DEFINICJA 9.1. Niech $u(y)$ będzie funkcją z $L^2_{\mathrm{per}}(Y)^p$. H-*miarą* μ *tej funkcji* (ciągu) jest miara o wartościach macierzowych określona na S^{n-1} wzorem

$$\mu_{ij} = \Re \sum_{q\in\mathbb{Z}^N,\, q\neq 0} u_q^i\overline{u}_q^j\delta_{q/|q|}(\xi),$$

gdzie $\Re$ oznacza część rzeczywistą liczby zespolonej, natomiast u_q^i są współczynnikami Fouriera i-tej składowej funkcji $u(y)$, tzn.

$$u^i(y) = \sum_{q\in\mathbb{Z}^n,\, q\neq 0} |u_q\cdot\lambda|^2\delta_{q/|q|}(\xi).$$

W ten sposób otrzymaliśmy nieujemną rzeczywistą, symetryczną miarę, ponieważ dla dowolnego wektora $\lambda \in \mathbb{R}^m$ spełniony jest warunek

$$\sum_{i,j=1}^{m} \mu_{ij}\lambda_i\overline{\lambda}_j = \sum_{q\in\mathbb{Z}^n,\, q\neq 0} |u_q\cdot\lambda|^2\delta_{q/|q|}(\xi).$$

WNIOSEK 1. *Ponieważ funkcja* $u(y)$ *ma wartości rzeczywiste, mamy* $\mu_{ij}(-e) = \mu_{ij}(e)$, *czyli H-miara* μ *jest funkcją parzystą na* $\mathbb{S}^{n-1}$.

Szczególnie interesujący jest przypadek, gdy mamy ciąg wektorowych funkcji charakterystycznych $u(y) = \chi(y)$, $(\chi^i(y))_{1\le i\le m}$, który spełnia warunek

$$
\begin{aligned}
&\chi^i(y) = 0 \text{ lub } 1,\\
&\sum_{i=1}^{m} \chi^i(y) = 1, \qquad\qquad (9.10)\\
&\chi^i(y)\chi^j(y) = 0 \quad \text{dla } i \neq j.
\end{aligned}
$$

Z punktu widzenia zastosowań do mikromechaniki takie ciągi są w szczególności ważne dla kompozytów wieloskładnikowych, zwłaszcza gdy liczba składników wynosi $m \geq 3$. W tym przypadku H-miara posiada specjalne własności, które charakteryzuje następujący lemat.

LEMAT 9.4. *Niech μ będzie H-miarą rodziny funkcji charakterystycznych $\{\chi^i(y)\}_{1\leq i\leq m}$ spełniającą relacje* (9.10). *Wówczas miara μ ma następujące własności:*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \mu_{ij} = 0 \quad \text{dla } 1 \leq j \leq m,\\
&\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mu_{ij}(de) = -\theta^i\theta^j \quad \text{dla } i \neq j, \qquad\qquad (9.11)\\
&\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mu_{ii}(de) = \theta(1-\theta),
\end{aligned}
$$

gdzie $\theta^i = \int_Y \chi^i(y)\,dy$. Oczywiście obecnie mamy $\sum_{i=1}^m \theta^i = 1$.

Warunki (9.11) są warunkami koniecznymi na to, aby rzeczywista, symetryczna, nieujemna i parzysta miara μ była H-miarą rodziny funkcji charakterystycznych.

Istnieją dalsze ograniczenia na takie H-miary, co najmniej w przypadku $m > 2$. Dla $m = 2$ lemat 9.4 implikuje, że znajomość macierzy μ o wymiarach 2×2 redukuje ją do jednej ze składowych, np. μ_{11}, ponieważ $\mu^{12} = \mu^{21} = -\mu^{22} = -\mu_{11}$. Natomiast dla pojedynczej funkcji charakterystycznej zbiór wszystkich dopuszczalnych H-miar jest znany (por. Kohn [87] lub Tartar [155]).

Mamy kolejny lemat (por. np. [5, 87]):

LEMAT 9.5. *Niech μ będzie H-miarą funkcji charakterystycznej $\chi(y)$ takiej, że $\theta = \int_Y \chi(y)\,dy$. Zmieniając χ, widzimy, że zbiór wszystkich H-miar μ jest dokładnie zbiorem $\mathcal{P}(\mathbb{S}^{n-1})$ wszystkich miar probabilistycznych na sferze jednostkowej, pomnożonych przez czynnik $\theta(1-\theta)$.*

UWAGA 9.1. Przez $\mathcal{P}(\mathbb{S}^{n-1})$ oznaczamy przestrzeń miar probabilistycznych na sferze jednostkowej $\mathbb{S}^{n-1}$. Jednocześnie miara probabilistyczna ν jest miarą nieujemną o masie jednostkowej, tzn.

$$\nu(e) \geq 0 \ \forall e \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad \text{przy czym} \quad \int_{\mathbb{S}^{n-1}} d\nu(e) = 1.$$

Ponieważ zbiór wszystkich H-miar związanych z funkcjami charakterystycznymi jest nieznany, istnieje potrzeba jakiegoś sposobu wyrażania w postaci jawnej takich H-miar. Jest to celem następującej „reguły miksującej" (ang. *mixing formula for H-measures*) dla H-miar (por. Kohn [87], Tartar [155], Allaire [5]).

LEMAT 9.6. *Niech* $\{\chi_1^i(y)\}_{1\le i\le m}$ *oraz* $\{\chi_2^i(y)\}_{1\le i\le m}$ *będą dwiema rodzinami funkcji charakterystycznych o udziałach objętościowych odpowiednio* $(\theta_1^i)_{1\le i\le m}$ *i* $(\theta_2^i)_{1\le i\le m}$. *Stowarzyszone z nimi H-miary oznaczamy odpowiednio przez* $(\mu_1^{ij})_{1\le i,j\le m}$ *oraz* $(\mu_2^{ij})_{1\le i,j\le m}$. *Niech* $\psi(y)$ *będzie inną funkcją charakterystyczną mającą średnią* ϱ *i stowarzyszoną H-miarę* ν. *Miksując odpowiednio funkcje* χ_1 *oraz* χ_2 *i funkcję udziału objętościowego* ψ, *utwórzmy nowy ciąg funkcji charakterystycznych*

$$\chi_\varepsilon^i(y) = \psi(y)\chi_1^i(y/\varepsilon) + (1-\psi(y))\chi_2^i(y/\varepsilon).$$

Jeżeli ε *dąży do zera, wówczas udziały objętościowe nowej rodziny są następujące:*

$$\theta^i = \varrho\theta_1^i + (1-\varrho)\theta_2^i \qquad dla\ 1 \le i \le m.$$

H-miara nowej rodziny ma postać

$$\mu_{ij} = \varrho\mu_{ij}^1 + (1-\varrho)\mu_{ij}^2 + (\theta_1^i - \theta_2^i)(\theta_1^j - \theta_2^j)\nu.$$

Rezultat ten jest wykorzystywany w zagadnieniach sterowania optymalnego, zagadnieniach małego kontrastu materiałów kompozytowych, zagadnieniach przejść fazowych, w teorii laminatów itd. (por. Allaire [6]).

UWAGA 9.2. Twierdzenie fundamentalne o H-miarach daje formułę reprezentacji granicy funkcji kwadratowych ciągu $\{u_\varepsilon\}$. Przyjmując $\psi \equiv 1$, mamy zwykłą miarę w przestrzeni fizycznej, tzn. $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \mu_{ij}(\cdot, d\xi)$ jest słabą* granicą ciągu funkcji kwadratowych $\{u_\varepsilon^i \overline{u}_\varepsilon^j\}$, który jest ograniczony w $L^1(\mathbb{R}^n)$. Tak więc H-miary dają dokładniejszą charakteryzację braku zwartości, biorąc pod uwagę kierunki oscylacji.

Twierdzenie fundamentalne można uogólnić na przypadek bardziej ogólnych form kwadratowych zależnych od u_ε w kontekście operatorów pseudoróżniczkowych (Hörmander [75]). Przypomnijmy, że standardowy operator pseudo-różniczkowy P jest określony przez swój symbol $(q_{ij}(x,\xi))_{1\le i,j\le m} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ wzorem

$$(P\boldsymbol{u})_i(x) = \sum_{j=1}^m \mathcal{F}^{-1}(q_{ij}(x,\cdot)\mathcal{F}u_j(\cdot))(x)$$

zachodzącym dla każdej gładkiej funkcji $\boldsymbol{u} = (u_i)$.

TWIERDZENIE 9.3. *Niech ciąg* $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon\}$ *będzie słabo zbieżny do zera w przestrzeni* $L^2(\mathbb{R}^n)^m$. *Istnieje podciąg ciągu* $\{\boldsymbol{u}_\varepsilon\}$ *i H-miara* $\boldsymbol{\mu}$ *takie, że dla* *dowolnego multijednorodnego operatora pseudo-różniczkowego P stopnia 0 o symbolu głównym $(q_{ij}(x,\xi))_{1\le i,j\le m}$ zachodzi równość*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} P(\boldsymbol{u}_\varepsilon)\cdot\overline{\boldsymbol{u}}_\varepsilon\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sum_{i,j=1}^{m} q_{ij}(x,\xi)\,\mu_{ij}(dx,d\boldsymbol{\xi})$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \operatorname{tr}\{\boldsymbol{q}(x,\boldsymbol{\xi})\,\boldsymbol{\mu}(dx,d\boldsymbol{\xi})\}.$$

Ponadto miara $\boldsymbol{\mu}$ jest hermitowska i półokreślona w następującym sensie:

$$\begin{cases} \mu_{ij} = \overline{\mu}_{ji}, & 1\le i,\ j\le m,\\ \sum\limits_{i,j=1}^{m}\mu_{ij}h_i\overline{h}_j & \textit{jest dodatnią miarą Radona, } \boldsymbol{h}\in\mathbb{C}^m. \end{cases}$$

Ponadto jeśli $\boldsymbol{u}_\varepsilon\equiv\mathbf{0}$ poza domkniętym zbiorem K w $\mathbb{R}^m$, wówczas $\operatorname{supp}\mu\subset K\times\mathbb{S}^{n-1}$.

UWAGA 9.3. Zauważmy, że $\sum_{i,j=1}^{m} q_{ij}\mu_{ij} = \operatorname{tr}(\boldsymbol{q\mu})$, gdzie $\boldsymbol{q\mu}$ oznacza iloczyn macierzy $\boldsymbol{\mu}$ i $\boldsymbol{q}$, przy czym obie macierze mają wymiar $m\times m$. Zwykle używamy notacji następującej (por. Tartar [155]):

$$\langle\langle\mu\cdot Q(x,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{U})\rangle\rangle = \int_{\mathbb{S}^{n-1}}\sum_{i,j=1}^{m} q_{ij}(x,\boldsymbol{\xi})\mu_{ij}(x,d\boldsymbol{\xi}),$$

gdzie $Q(x,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{U}) = \sum_{i,j=1}^{m} q_{ij}(x,\boldsymbol{\xi})\overline{U}_iU_j$, a $\boldsymbol{U}$ jest tutaj zmienną pozorną.

PRZYKŁAD 9.5. Ostatnie twierdzenie 9.3 pozwala na charakteryzację granicy ciągu $|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2$. Niech q_{ij} ma postać

$$q_{ij}(x,\boldsymbol{\xi}) = \varphi(x)\delta_{ij},\quad 1\le i,j\le m,\quad \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m).$$

Zastosowanie ostatniego twierdzenia daje

$$\lim_{\varepsilon\to 0}|\boldsymbol{u}_\varepsilon|^2 = \sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\mu_{ii}(dx,d\boldsymbol{\xi}).$$

TWIERDZENIE 9.4. *Niech $\boldsymbol{\mu}$ będzie H-miarą spełniającą zasadę lokalizacji. Niech $(q_{ij}(x,\xi))_{1\le i,j\le m}$ będzie symbolem jednorodnym stopnia 0 względem $\boldsymbol{\xi}$. Ponadto, niech*

$$\Lambda = \left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{U})\in\mathbb{R}^n\times S^{n-1}\times C^m : \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A^l_{jk}(x)\xi_kU_j = 0,\ 1\le l\le l_0\right\}.$$

Jeżeli

$$\sum_{i,j=1}^{m} q_{ij}(x,\xi)\overline{U}_iU_j\ge 0\qquad \textit{dla każdego } (x,\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{U})\in\Lambda,$$

wówczas

$$\sum_{i,j=1}^{m} q_{ij}\mu_{ij} \geq 0.$$

Z twierdzeń 9.3 i 9.4 można wywnioskować następujący rezultat o skompensowanej zwartości, przydatny przy zastosowaniu H-miar do poszukiwania ograniczeń na efektywne stałe materiałowe.

LEMAT 9.7. *Niech $\{u_\varepsilon\}$ będzie ciągiem zbieżnym do u w sensie słabej topologii w $L^2(\mathbb{R}^n)^m$. Załóżmy, że dla $1 \leq l \leq l_0$ ciąg $\{u_\varepsilon\}$ spełnia warunek*

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(A_{jk}^l(x)u_\varepsilon^j) \to \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(A_{jk}^l(x)u^j) \quad \textit{silnie w } H_{\mathrm{loc}}^{-1}(\Omega),$$

gdzie współczynniki A_{jk}^l są ciągłe w zbiorze otwartym $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Niech Λ będzie zbiorem charakterystycznym określonym następująco:

$$\Lambda = \left\{(x, \xi, U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{S}^{n-1} \times C^m : \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} A_{jk}^l \xi_k U_j = 0,\ 1 \leq l \leq l_0\right\}.$$

Niech P będzie multijednorodnym operatorem pseudo-różniczkowym rzędu 0 z hermitowskim symbolem głównym $(q_{ij}(x,\xi))_{1\leq i,j\leq m}$ takim, że

$$\sum_{i,j=1}^{m} q_{ij}(x,\xi)\overline{U}_i U_j \geq 0$$

dla każdego $(x, \xi, U) \in \Lambda$. Wówczas dla dowolnej nieujemnej gładkiej funkcji ϕ o nośniku zwartym w Ω mamy

$$\liminf_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)P(u_\varepsilon)\cdot \overline{u}_\epsilon \, dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)P(u)\cdot \overline{u}\, dx. \tag{9.12}$$

W tym rozdziale wykorzystaliśmy rezultaty publikowane w pracach [6, 67, 69, 87, 155, 157, 162]. W drugiej części opracowania pokażemy, między innymi, jak stosuje się H-miary do badania ograniczeń na efektywne stałe materiałowe.

Uwagi końcowe. Celem części I było zapoznanie czytelnika z różnymi podejściami i podstawowymi własnościami parametryzowanych miar probabilistycznych, zwanych też miarami Younga, i ich uogólnieniami. Miary uogólnione implikują istnienie dwóch lub więcej miar generowanych przez ten sam ciąg oscylujący (por. Alibert i Bouchitte [4], DiPerna i Majda [55], Fonseca i in. [66], Kałamajska [81], Roubiček [143]). Za pomocą miar Younga można opisać jedynie oscylacje, natomiast nie jest możliwe opisanie koncentracji.

Literatura na temat miar Younga i miar uogólnionych jest obecnie dość obszerna. Jednakże z punktu widzenia zastosowań, które będą przedmiotem

II części pracy, wiele problemów pozostaje jak dotychczas nierozwiązanych. W szczególności dotyczy to metod numerycznych, szacowania rozwiązań przybliżonych itd. (por. Carstensen [37]). Książka Prohla [138] ogranicza się do zagadnień mikromagnetyków nieodkształcalnych, czyli sztywnych.

W niniejszej części staraliśmy się zaprezentować podejście „ciągowe", reprezentowane przez i pochodzące od Tartara, Balla, Kinderlehrera, Pedregala i innych. Ciekawe jest też inne podejście, reprezentowane przez Baldera, Valadiera, Roubička. Czytelnikowi pragnącemu poszerzyć swą wiedzę w ramach pierwszego podejścia można polecić książkę Pedregala [123] oraz obszerny artykuł Müllera, natomiast drugie podejście jest ujęte w obszernej monografii Roubička [143] oraz w kilku obszernych artykułach autorstwa Valadiera oraz Baldera.

Cytowana w pracy literatura stanowi zaledwie cząstkę wiedzy dotyczącej miar Younga. W wielu artykułach pojęcie miary Younga występuje pod inną nazwą (np. *relaxed controls*, *measures of oscillations*); tak jest np. w pracach Fattoriniego.

Podziękowanie. Praca została sfinansowana przez KBN, projekt badawczy Nr 8 T07A 052 21; trzeci z autorów był również finansowany przez projekt badawczy KBN Nr T07A 043 18.

Literatura

[1] E. Acerbi, N. Fusco, *Semicontinuity problems in the calculus of variations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 86 (1984), 125–145.

[2] G. Alberti, S. Müller, *A new approach to variational problems with multiple scales*, Comm. Pure Appl. Math. 54 (2001), 761–825.

[3] G. Alberti, G. Bouchitte, P. Seppecher, *Phase transition with the line-tension effect*, Arch. Rat. Mech. Anal. 144 (1998), 1–46.

[4] J. J. Alibert, G. Bouchitte, *Non uniform integrability and generalized Young measures*, J. Convex Anal. 4 (1997), 129–147.

[5] G. Allaire, *Homogenization and Applications to Material Sciences*, Lecture Notes at the Newton Inst., Cambridge, 1999.

[6] G. Allaire, H. Maillot, *H-measures and bounds on the effective properties of composite materials*, Portugaliae Math. 60 (2003), 161–192.

[7] N. Antonic, *H-measures in hyperbolic symmetric systems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 126A (1996), 1133–1155.

[8] N. Antonic, N. Balenovic, *Homogenization and optimal design for plates*, ZAMM 80 (2000), S757–S758.

[9] G. Aubert, R. Tahraoui, *Young measures, relaxation of functionals and existence results without weak lower semicontinuity*, Adv. Diff. Equations 3, 1998.

[10] E. J. Balder, *A general approach to lower semicontinuity and lower closure in optimal control theory*, SIAM J. Control Optim. 22 (1984), 570–597.

[11] E. J. Balder, *Young measures techniques for existence of Carnot-Nash-Waltras equilibria*, w: Topics in Mathematical Economics and Game Theory, M. Wooders

(red.), Fields Institute Communications 23, Amer. Math. Soc., Providence, 1999, 31–39.

[12] E. J. Balder, *Lectures on Young measures theory and its applications in economics*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste 31 (2000), suppl. 1, 1–69.

[13] E. J. Balder, C. Hess, *Two generalizations of Komlos' theorem with lower closure-type applications*, J. Convex Anal. 3 (1996), 25–44.

[14] J. M. Ball, *Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rat. Mech. Anal. 63 (1977), 337–403.

[15] J. M. Ball, *A version on the fundamental theorem for Young measures*, w: Partial Differential Equations and Continuum Models of Phase Transitions, Springer, Berlin, 1989.

[16] J. M. Ball, *On the calculus of variations and sequentially weakly continuous maps*, w: Ordinary and Partial Differential Equations (Dundee, 1976), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1976.

[17] J. M. Ball, R. D. James, *Fine phase mixtures as minimizers of energy*, Arch. Rat. Mech. Anal. 100 (1987), 13–52.

[18] J. M. Ball, R. D. James, *Proposed experimental tests of a theory of fine micro-structure and two-well problem*, Phil. Trans. Roy. Soc. London A 338 (1992), 389–450.

[19] J. M. Ball, F. Murat, *Remarks on Chacon's biting lemma*, Proc. Amer. Math. Soc. 107 (1989), 655–663.

[20] J. M. Ball, K. Zhang, *Lower semicontinuity of multiple integrals and the Biting Lemma*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 114A (1990), 367–379.

[21] J. M. Ball, J. Currie, P. Olver, *Null lagrangians, weak continuity, and variational problems of arbitrary order*, J. Funct. Anal. 421 (1981), 315–328.

[22] J. M. Ball, B. Kirchheim, J. Kristensen, *Regularity of quasiconvex envelopes*, Calc. Var. 11 (2000), 333–359.

[23] A. Blake, A. Zisserman, *Visual Reconstruction*, MIT Press, Cambridge 1987.

[24] P. Buelik, M. Luskin, *Stability of microstructure for tetragonal to monoclinic martensitic transformations*, Math. Model. Numer. Anal. 34 (2000), 663–685.

[25] H. Berliocchi, J-M. Lasry, *Intégrandes normales et mesures parametrées en calcul des variations*, Bull. Soc. Math. France 101 (1973), 129–184.

[26] K. Bhattahyara, R. James, *A theory of thin films of martensitic materials with applications to microactuators*, J. Mech. Phys. Solids 47 (1999), 531–576.

[27] K. Bhattahyara, B. Li, M. Luskin, *Uniqueness and stability of the simply laminated microstructure for martensic crystals that undergo a cubic to orthorombic phase transformation*, preprint, 1998.

[28] K. Bhattahyara, B. Li, M. Luskin, *The simply laminated microstructure in martensic crystals that undergo a cubic-to-orthorombic phase transformation*, Arch. Rat. Mech. Anal. 149 (1999), 123–154.

[29] K. Bhattahyara, N. Firoozye, R. D. James, R. V. Kohn, *Restrictions on micro-structure*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 124A (1994), 843–878.

[30] W. Bielski, E. Kruglenko, J. J. Telega, *Nonconvex minimization problems and microstructure*, Szczęśniak (red.), Transactions, 2002.

[31] M. Bocea, I. Fonseca, *Equi-integrability results for 3D-2D dimension reduction problems*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 7 (2002), 443.

[32] E. Bonnetier, C. Conca, *Approximation of Young measures by functions and applications to a problem of optimal design for plates with variable thickness*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 124A (1994), 399–422.

[33] A. Braides, *Γ-convergence for Beginners*, Oxford University Press, 2002.

[34] A. Braides, I. Fonseca, G. Leoni, *A-quasiconvexity: relaxation and homogenization*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 5 (2000), 58.

[35] D. Brandon, R. C. Rogers, *Nonlocal regularization of L. C. Young's tacking problem*, Appl. Math. Optim. 25 (1992), 287-301.

[36] G. Buttazzo, *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation Problem in the Calculus of Variations*, Pitman Res. Notes in Math. 207, Longman, Harlow, 1989.

[37] C. Carstensen, *Numerical Analysis of Microstructure*, Lecture Note 10/2001, Max Planck Inst. Math. Sci. 2001.

[38] C. Carstensen, A. Prohl, *Numerical analysis of relaxed micromagnetics by penalised finite element*, Numer. Math. 2000.

[39] C. Carstensen, K. Hackl, *On microstructure occuring in a model of finite-strain elastoplasticity involving a single slip-system*, Z. Angew. Math. Mech. 80 (2000), S421–422.

[40] C. Carstensen, A. Prohl, *Numerical analysis of a relaxed model in micromagnetics*, Z. Angew. Math. Mech. 80 (2000), S821–S822.

[41] C. Carstensen, A. Prohl, *Numerical analysis of relaxed micromagnetics by penalised finite elements*, Numer. Math. 90 (2001), 65–99.

[42] J. Chabrowski, Z. Kewei, *On variational approach to photometric stereo*, Ann. Inst. H. Poincaré 10 (1993), 363–375.

[43] M. Chipot, *Hyperelasticity for crystals*, Euro. J. Appl. Math. 1 (1990), 113–129.

[44] M. Chipot, *Approximation and oscillations*, w: Microstructure and Phase Transition, D. Kinderlehrer, R. James, M. Luskin, J. L. Ericksen (red.), Springer, Berlin 1993.

[45] M. Chipot, V. Lécuyer, *Some microstructures in three dimensions*, w: Numerical methods for viscosity solutions and applications (Heraklion, 1999), Ser. Adv. Math. Appl. Sci., 59, World Sci., River Edge, NJ, 2001, 59–76.

[46] M. Chipot, D. Kinderlehrer, G. Vergara-Caffarelli, *Smoothness of linear laminates*, Arch. Rat. Mech. Anal. 96 (1986).

[47] P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity. Volume I: Three Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[48] S. Conti, A. DeSimone, G. Dolzmann, S. Müller, F. Otto, *Multiscale modeling of materials—the role of analysis*, preprint, 2002.

[49] B. Dacorogna, *Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non-Linear Functionals*, Lecture Notes in Math. 922, Springer, Berlin, 1982.

[50] B. Dacorogna, *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer, Berlin, 1989.

[51] B. Dacorogna, J.-P. Haeberly, *Some numerical methods for the study of the convexity notions arising in the calculus of variations*, EPFL Technical Report no. 06.95, July, 1995.

[52] R. J. DiPerna, *Convergence of approximate solutions to conservative laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. 82 (1983), 27–70.

[53] R. J. DiPerna, *Compensated compactness and general systems of conservative laws*, Trans. Amer. Math. Soc. 292 (1985), 383–442.

[54] R. J. DiPerna, *Measure-valued solutions to conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. 88 (1985), 223–270.

[55] R. J. DiPerna, A. J. Majda, *Oscillations and concentrations in weak solutions of the incompressible fluid equations*, Comm. Math. Phys. 108 (1987), 667–689.

[56] W. E, *Homogenization of linear and nonlinear transport equations*, Comm. Pure Appl. Math. 45 (1992), 301–326.

[57] Y. Efendiev, M. Luskin, *Stability of microstructures for some martensitic transformations*, Math. Comput. Modelling 34 (2001), 1289–1305.

[58] J. J. Egozcue, R. Meziat, P. Pedregal, *From a nonlinear, nonconvex variational problem to a linear, convex formulation*, Appl. Math. Optim. 47 (2002), 27–44.

[59] L. C. Evans, *Weak Convergence Methods for Nonlinear Partial Differential Equations*, CBMS 74, Amer. Math. Soc., 1990.

[60] I. Fonseca, G. Parry, *Variational problems for crystals with defects*, w: Microstructure and Phase Transition, D. Kinderlehrer, R. James, M. Luskin, J. L. Ericksen (red.), Springer, Berlin, 1993.

[61] I. Fonseca, D. Kinderlehrer, P. Pedregal, *Energy functionals depending on elastic strain and chemical composition*, Calc. Var. Partial Differential Equations 2 (1994), 283–313.

[62] I. Fonseca, *Higher order variational problems*, in: 2001 Centre of Nonlinear Analysis, Summer School, May 30–June 9, 2001.

[63] I. Fonseca, G. Leoni, *Relaxation results in micromagnetics*, Ricerche Mat. 49 (2000), 269.

[64] I. Fonseca, S. Maly, *Relaxation of multiple integrals below the growth exponent*, Ann. Inst. H. Poincaré 14 (1997), 309–338.

[65] I. Fonseca, S. Müller, *Quasiconvex integrands and lower semicontinuity in L^1*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), 1081–1098.

[66] I. Fonseca, S. Müller, P. Pedregal, *Analysis of concentration and oscillation effects generated by gradients*, SIAM J. Math. Anal. 29 (1998), 736–756.

[67] G. A. Francfort, F. Murat, *Oscillations and energy densities in the wave equation*, Comm. Part. Diff. Eq. 17 (1992), 1785–1865.

[68] P. Gerard, *Mesures semi-classiques et ondes de Bloch*, Séminaire EDP 1990–1991, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 1991.

[69] P. Gerard, *Microlocal defect measure*, Comm. Part. Diff. Eq. 16 (1991), 1761–11794.

[70] P. Gerard, P. A. Markowich, N. J. Mauser, F. Poupaud, *Homogenization limits and Wigner transforms*, Comm. Pure Appl. Math. 50 (1997), 323–379.

[71] M. K. Gobbert, A. Prohl, *A comparison of classical and new finite element methods for the computation of laminate microstructure*, Appl. Numer. Math. 36 (2001), 155–178.

[72] S. Govindjee, A. Mielke, G. A. Hall, *The free-energy of mixing for n-variant martensic phase transformations using quasi-convex analysis*, J. Mech. Phys. Solids 50 (2002), 1897–1922.

[73] M. Guidorzi, L. Poggiolini, *Lower semicontinuity for quasiconvex integrals of higher order*, Nonlinear Diff. Eq. A 6 (1999), 227–246.

[74] D. Hilbert, *Mathematical problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 37 (2000), 407–436.

[75] L. Hörmander, *The Analysis of Partial Differential Operators III*, Springer, Berlin 1985.

[76] N. Hungerbühler, *A refinement of Ball's theorem on Young measures*, New York J. Math. 3 (1997), 48–53.

[77] N. Hungerbühler, *Quasilinear elliptic systems in divergence form with weak monotonocity*, New York J. Math. 5 (1999), 83–90.

[78] N. Hungerbühler, *Young measures and nonlinear PDEs*, habilitation thesis, Birmingham, October 1999.

[79] R. James, D. Kinderlehrer, *Theory of diffusionless phase transitions*, w: PDE's and Continuum Models of Phase Transitions, M. Rascle, D. Serre, M. Slemrod (red.), Lecture Notes in Physics 344, Berlin, 1989.

[80] A. Kałamajska, *On lower semicontinuity of multiple integrals*, Colloq. Math. 74 (1997).

[81] A. Kałamajska, *Between the classical theorem of Young and convergence theorem in set-valued analysis*, preprint no. 633, Instytut Matematyki Polskiej Akademii Nauk, 2003.

[82] D. Kinderlehrer, P. Pedregal, *Characterization of Young measures generated by gradients*, Arch. Rat. Mech. Anal. 115 (1991), 329–365.

[83] D. Kinderlehrer, P. Pedregal, *Remarks about Young measures supported on two wells*, (1996), 329–365.

[84] D. Kinderlehrer, P. Pedregal, *Weak convergence of integrands and the Young measure representation*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), 1–19.

[85] D. Kinderlehrer, P. Pedregal, *Gradient Young measures generated by sequences in Sobolev spaces*, J. Geom. Anal. 4 (1994).

[86] D. Kinderlehrer, D. E. Mason, *Incoherence at heterogeneous interfaces*, J. Mech. Physics Solids 47 (1999), 1609–1632.

[87] R. V. Kohn, *The relaxation of double-well energy*, Cont. Mech. Thermodyn. 3 (1991), 193–236.

[88] R. V. Kohn, F. Otto, *Small surface energy, coarse-graining, and selection of microstructure*, Physica D 107 (1997), 272–289.

[89] J. Kristensen, *Finite functionals and Young measures generated by gradients of Sobolev functions*, Math. Inst., Tech. Univ. of Denmark, Mat-Report No. 1994–34, 1994.

[90] J. Kristensen, *Lower semicontinuity in spaces of weakly differentiable functions*, Math. Ann. 313 (1999), 653–710.

[91] M. Kružik, T. Roubiček, *On the measures of DiPerna and Majda*, Math. Bohemica 122 (1997), 383–399.

[92] M. Kružik, T. Roubiček, *Weierstrass-type maximum principle for microstructure in micromagnetics*, Z. Anal. Anwend. 19 (2000), 415–428.

[93] M. Kružik, T. Roubiček, *Optimization problems with concentration and oscillation effects: relaxation theory and numerical approximation.* Numer. Funct. Anal. Optim. 20 (1999), 511–530.

[94] M. Kružik, A. Prohl, *Approximation of Young measures in micromagnetic problems*, preprint.

[95] P. H. Leo, S. Müller, *H-measures for splitting particles*, preprint, 2000.

[96] T. Lewiński, J. J. Telega, *Plates, Laminates and Shells: Asymptotic Analysis and Homogenization*, World Sci., Singapore, 2000.

[97] G. Letta, *Semicontinuité de certaines fonctionnelles sur l'espace des mesures de Young*, Rend. Accad. Naz. Sci. 20 (1996), 215–219.

[98] B. Li, M. Luskin, *Approximation of a martensitic laminate with varying volume fractions*, Math. Modelling Numer. Anal. 33 (1999), 67–87.

[99] B. Li, *Approximation of martensitic microstructure with general homogeneous boundary data*, J. Math. Anal. Appl. 266 (2002), 451-467.

[100] Z. Li, *A mesh transformation method for computing microstructures*, Numer. Math. 89 (2001), 511–533.

[101] Z. Li, *Relaxation results in micromagnetics. Computations of needle-like microstructures.* Appl. Numer. Math. 39 (2001), 1–15.

[102] J.-L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris 1969.

[103] M. Luskin, *Numerical analysis of a microstructure for a rotationally invariant, double well energy*, ZAMM, J. Angew. Math. Mech. 76 (1996), S2–S4.

[104] M. Luskin, *Approximation of a laminated microstructure for a rotationally invariant, double well energy density*, Numer. Math. 75 (1996), 205–221.

[105] B. Li, M. Luskin, *Theory and computation for the microstructure near the interface between twinned layers and a pure variant of martensite*, Mat. Sci. Engn. A 273–275 (1999), 237–240.

[106] Z. P. Li, *Lower semicontinuity of multiple integrals and convergent integrands*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 1 (1996), 169–189.

[107] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta, M. Růžička, *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionary PDEs*, Chapman and Hall, London 1996.

[108] J. Málek, J. Nečas, M. Růžička, *On the non-newtonian incompressible fluids*, Math. Models Meth. Appl. Sci. 3 (1993), 35–63.

[109] J. Matos, *Young measures and the absence of fine microstructures in a class of phase transition*, Eur. J. Appl. Math. 3 (1992), 31–54.

[110] E. J. McShane, *Generalized curves*, Duke Math. J. 6 (1940), 513–536.

[111] A. Mielke, *Flow properties for Young-measure solutions of semilinear hyperbolic problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 129 A (1999), 85–123.

[112] C. B. Morrey, *Quasiconvexity and the lowersemicontinuity of multiple integrals*, Pac. J. Math. 2 (1952), 25–53.

[113] C. B. Morrey, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer, Berlin, 1965.

[114] S. Müller, *Variational models for microstructure and phase transitions*, w: Calculus of Variations and Geometric Evolution Problems, S. Hildebrandt, M. Struwe (red.), Lecture Notes in Math. 1713, Springer, 1999, 85–210.

[115] S. Müller, I. Fonseca, *A-quasiconvexity, lower semicontinuity and Young measures*, SIAM J. Math. Anal. (1998).

[116] J. Muñoz, P. Pedregal, *Equilibrium conditions for Young measures.*

[117] J. Muñoz, P. Pedregal, *Explicit solutions of nonconvex variational problems in dimension one*, Appl. Math. Optim. 41 (2000), 129–140.

[118] R. A. Nicolades, N. Walkington, H. Wang, *Numerical methods for a nonconvex optimization problem modeling martensitic microstructure*, SIAM J. Sci. Comput. 4 (1993), 1122–1141.

[119] R. A. Nicolaides, N. J. Walkington, *Computation of microstructure utilizing Young measure representations*, J. Intelligent Materials Systems and Structures 4 (1993), 795–800.

[120] P. Pedregal, *Laminates and microstructure*, Eur. J. Appl. Math. 4 (1992), 121–149.

[121] P. Pedregal, *Relaxation in ferromagnetism: The rigid case*, J. Nonlinear Sci. 4 (1994), 105–125.

[122] P. Pedregal, *The concept of laminate*, w: Microstructure and Phase Transition, D. Kinderlehrer, R. James, M. Luskin, J. L. Ericksen (red.), Springer, Berlin, 1993.

[123] P. Pedregal, *Parametrized Measures and Variational Principles*, Birkhäuser, Basel, 1997.

[124] P. Pedregal, *Equilibrium conditions for Young measures*, SIAM J. Control. Optim. 36 (1998), 797–813.

[125] P. Pedregal, *Numerical approximation of parametrized measures*, Numer. Funct. Anal. Optim. 16 (1995), 1049–1066.

[126] P. Pedregal, *Optimal design and constrained quasiconvexity*, SIAM J. Math. Anal. 32 (2000), 854–869.

[127] P. Pedregal, *Relaxation in magnetostriction*, Calc. Var. Partial Differential Equations 10 (2000), 1–19.

[128] P. Pedregal, *On the numerical analysis of non-convex variational problem*, Numer. Math. 74 (1996), 325–336.

[129] P. Pedregal, *Optimization, relaxation and Young measure*, Bull. Amer. Math. Soc. 36 (1997), 27–58.

[130] P. Pedregal, *Constrained quasiconvexity and structural optimization*, Arch. Rat. Mech. Anal. 154 (2000), 325–342.

[131] P. Pedregal, *Variational Methods in Nonlinear Elasticity*, SIAM, 2000.

[132] P. Pedregal, *Fully explicit quasiconvexification of the mean-square deviation of the gradient of the state in optimal design*, Electronic Res. Ann. AMS 7 (2001), 72–78.

[133] R. Peszek, *Oscillations of solutions to the two-dimensional Broadwell model, an H-measure approach*, SIAM J. Math. Anal. 26 (1995), 750–760.

[134] A. Prohl, *Error analysis for the computation of microstructure in cubic ferromagnets*, Math. Seminar, Christian-Albrechts-Univ. Kiel, preprint, 1999.

[135] A. Prohl, *An adaptive finite element method for solving a double well problem describing crystalline microstructure*, Math. Model. Numer. Anal. 33 (1999), 781–796.

[136] A. Prohl, *An adaptive finite element method for solving a double well problem describing crystalline microstructure*, Math. Model. Numer. Anal. 33 (1999), 781–796.

[137] L. Piccini, M. Valadier, *Uniform integrability and Young measures*, J. Math. Anal. Appl. 195 (1995), 428–439.

[138] A. Prohl, *Computational Micromagnetism*, Teubner, Stuttgart, 2001.

[139] M. Rascle, *On the ststic and dynamic study of oscillations for some nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 8 (1991), 333–350.

[140] X. Ren, M. Winter, *Young measures in a nonlocal phase transition problem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 127A (1997), 615–637.

[141] M. O. Rieger, *Young measure solutions for nonconvex elastodynamics*, Max Planck Institute, Univ. Leipzig, preprint 62/2000,

[142] T. Roubiček, *Effective characterization of generalized Young measures generated by gradients*, Boll. Un. Mat. Ital. 9-B (1995), 755–779.

[143] T. Roubiček, *Relaxation in Optimization Theory and Variational Calculus*, de Gruyter, Berlin, 1997.

[144] T. Roubiček, M. Kružik, *Numerical treatment of microstructure evolution modelling*, w: ENUMATH 97. Proceedings of the 2$^{\text{nd}}$ European conference on numerical mathematics and advanced applications (Heidelberg), H. G. Bock *et al.* (red.), World Sci., 1998, 532–539.

[145] T. Roubiček, W. H. Schmidt, *Existence in optimal control problems of certain Fredholm integral equations*, Control Cybernetics 30 (2001), 303–322.

[146] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[147] M. Saadoune, M. Valadier, *Extraction of a "good" subsequence from a bounded sequence of integrable functions*, J. Convex Anal. 2 (1995), 345–357.

[148] V. P. Smyshlayev, J. Willis, *On the relaxation of a three-well energy*, Proc. Roy. Soc. London A 455 (1988), 779–814.

[149] V. Šverak, *New examples of quasiconvex functions*, Arch. Rat. Mech. Anal. 119 (1992), 293–300.

[150] V. Šverak, *On Tartar's conjecture*, Ann. Inst. H. Poincaré 10 (1993), 405–412.

[151] M. A. Sychev, *Young measure approach to characterization of behaviour of integral functionals on weakly convergent sequences by means of their integrands*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 15 (1998), 755–782.

[152] M. A. Sychev, *A new approach to Young measure theory, relaxation and convergence in energy*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 16 (1999), 773–812.

[153] L. Tartar, *Compensated compactness and applications to partial differential equations.* w: Nonlinear Analysis and Mechanics: Heriot Watt Symposium, vol. IV, R. Knops (red.), Res. Notes in Math. 39, Pitman, London, 1979.

[154] L. Tartar, *The compensated compactness method applied to systems of conservation laws*, in: Systems of Nonlinear Partial Differential Equations, J. M. Ball (red.), Reidel, 1983, 263–285.

[155] L. Tartar, *H-measures, a new approach for studying homogenisation, oscillations and concentration effects in partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 115A (1990), 193–230.

[156] L. Tartar, *Etude des oscillation dans les équations aux derivées partielles nonlinéaires*, Lecture Notes in Physics 195, 1984.

[157] L. Tartar, *H-measures and small amplitude homogenization*, w: Composite Media, R. V. Kohn i G. Milton (red.), 1990, 89–99.

[158] L. Tartar, *Some remarks on separately convex functions*, w: Microstructure and Phase Transition, D. Kinderlehrer, R. James, M. Luskin, J. L. Ericksen (red.), Springer, Berlin, 1993.

[159] L. Tartar, *Beyond Young measures*, Meccanica 30 (1995), 505–526.

[160] L. Tartar, *Oscillations and concentrations effects in partial differential equations: Why waves may behave like particles*, w: XVII CEDYA: Congress on Differential Equations and Applications/VII CMA: Congress on Applied Mathematics (Salamanca, 2001), 179–219.

[161] L. Tartar, *An introduction to the homogenization method in optimal design*, w: B. Kawohl, O. Pironneau, L. Tartar, J.-P. Zolezio, Optimal Shape Design, A. Cellina, A. Ornelas (red.), Lecture Notes in Math. 1740, Springer, Berlin, 2000.

[162] L. Tartar, *On mathematical tools for studying partial differential equations of continuum physics: H-measures and Young measures*, w: Developments in Partial Differential Equations to Mathematical Physics, Buttazzo, Galdi, Zanghirati (red.), Plenum, New York, 1991.

[163] L. Tartar, *Homogenneisation et H-mesures*, ESAIM: Actes du 30ème Congrès d'Analyse Numérique 6 (1998), 111–131.

[164] J. J. Telega, T. Lewiński, *On a saddle-point theorem in minimum compliance design*, J. Optim. Theory Appl. 106 (2000), 441–450.

[165] F. Theil, *Young-measure solutions for a viscoelastically damped wave equation with nonmonotone stress-strain relation*, Arch. Rat. Mech. Anal. 144 (1998), 47–78.

[166] A. M. Toader, *Memory effects and Γ-convergence: A time dependent case*, J. Convex Anal. 6 (1999), 13–27.

[167] A. M. Toader, *Link between Young measures associated to constrained sequences*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 5 (2000), 579–590.

[168] M. Valadier, *Young measures*, w: Methods of Nonconvex Analysis, Lecture Notes in Math. 1446, Springer, Berlin, 1990.

[169] M. Valadier, *A course on Young measures*, Rend. Ist. Mat. Trieste 26 (1994), 349–394.

[170] M. Valadier, *Admissible function in two-scale convergence*, Portugal. Math. 54 (1997), 147–164.

[171] J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.

[172] L. C. Young, *Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations*, C. R. Soc. Sci. Lettres de Varsovie Cl. III 30 (1937), 212–234.
[173] L. C. Young, *Lectures on the Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Chelsea, Philadelphia, 1969.
[174] K. Zhang, *Biting theorems for Jacobians and their applications*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 7 (1990), 345–366.
[175] S. Zhou, *A note on nonlinear elliptic systems involving measures*, Electronic J. Diff. Equations 8 (2000), 1–6.

Instytut Geofizyki
Polska Akademia Nauk
ul. Księcia Janusza 64
01-452 Warszawa
E-mail: wbielski@igf.edu.pl

Instytut Podstawowych Problemów Techniki
Polska Akademia Nauk
ul. Świętokrzyska 21
00-049 Warszawa
E-mail: ekrug@ippt.gov.pl
jtelega@ippt.gov.pl