INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

TOM 13 WARSZAWA 1965 ZESZYT 4
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE
4, **13** (1965)

OSOBLIWE RÓWNANIA CAŁKOWE TERMOSPRĘŻYSTOŚCI

JÓZEF IGNACZAK, WITOLD NOWACKI (WARSZAWA)

1. Wstęp

Celem pracy jest uzyskanie rozwiązań równań termosprężystości, opisujących drgania harmoniczne ośrodka, za pomocą osobliwych równań całkowych. Przez całkowanie podstawowych równań różniczkowych termosprężystości można wyprowadzić związki całkowe, stanowiące uogólnienie znanych z elastokinetyki twierdzeń SOMIGLIANA [1].

Całkowanie równania potencjału termosprężystego przemieszczenia prowadzi również do przedstawienia jego rozwiązania w postaci całek powierzchniowych. W przypadku braku sprzężenia między temperaturą a deformacją ciała otrzymuje się tu znane z elastokinetyki twierdzenie HELMHOLTZA.

Uzyskane w punktach 2 i 3 rozwiązania dostarczają tzw. potencjałów powierzchniowych warstwy pojedynczej i podwójnej. Zastosowanie tych potencjałów pozwala na sprowadzenie podstawowych zagadnień brzegowych termosprężystości do rozwiązania układu osobliwych równań całkowych. Wyprowadzono wreszcie twierdzenia o nieciągłości potencjałów termosprężystych przy przejściu przez brzeg obszaru na drodze bezpośredniego całkowania równań spełnionych przez te potencjały. Uzyskane równania całkowe są osobliwymi równaniami całkowymi FREDHOLMA drugiego rodzaju. Całki w nich występujące rozumiane są w sensie wartości głównych.

W ostatnim punkcie pracy podano proces budowania przybliżonych rozwiązań równań termosprężystości przez wykorzystanie tzw. kanonicznych, funkcjonalnych równań całkowych. Metoda ta zezwala na przybliżone rozwiązanie równań termosprężystości dla dowolnego, jednospójnego ciała trójwymiarowego.

2. Równanie termosprężystości

Rozpatrzmy jednorodne, izotropowe i doskonale sprężyste ciało zajmujące obszar V ograniczony powierzchnią Σ. W ośrodku tym słuszne są równania zlinearyzowane termosprężystości [2 i 3]

$$\mu u_{i,kk}+(\lambda+\mu)u_{k,ki}+X_i=\gamma\theta_{,i}+\varrho\ddot{u}_i,\tag{2.1}$$

$$\theta_{,kk}-\frac{1}{\varkappa}\dot{\theta}-\eta\dot{u}_{k,k}=-\frac{Q}{\varkappa},\quad i,j,k=1,2,3.$$

Pierwsze równanie przedstawia równania przemieszczeniowe (równania ruchu), drugie jest rozszerzonym równaniem przewodnictwa cieplnego. W równaniach tych $\theta = T - T_0$ jest wzrostem temperatury w stosunku do stanu naturalnego T_0, w którym naprężenia i odkształcenia są równe zeru. Symbole u_i oznaczają składowe wektora przemieszczenia, X_i składowe wektora sił masowych, Q jest funkcją opisującą intensywność źródeł ciepła. Wielkości μ i λ są stałymi Lamégo, odniesionymi do stanu izotermicznego. Dalsze oznaczenia są następujące: $\gamma = (3\lambda+2\mu)\alpha_t$, gdzie α_t jest współczynnikiem liniowej rozszerzalności cieplnej, ϱ gęstością, a $\varkappa = \lambda_0/\varrho c_\varepsilon$ jest współczynnikiem, w którym λ_0 jest stałą przewodnictwa cieplnego, a c_ε jest ciepłem właściwym przy stałej deformacji. Wreszcie $Q = W/\varrho c_\varepsilon$, gdzie W oznacza ilość ciepła, wytwarzaną w jednostce czasu i objętości, a $\eta = \gamma T_0/\lambda_0$. Funkcje u_i, θ, X_i i Q są funkcjami miejsca i czasu. Kropka nad funkcją oznacza pochodną względem czasu.

Do równań (2.1) dodać należy równania konstytutywne

$$\sigma_{ij} = 2\mu\, \varepsilon_{ij}+(\lambda\varepsilon_{kk} - \gamma\theta)\, \delta_{ij} \tag{2.2}$$

oraz związki między odkształceniami i przemieszczeniami

$$\varepsilon_{ij} = u_{(i,j)} = \frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}). \tag{2.3}$$

Dokonując rozkładu wektora przemieszczenia i wektora sił masowych na część potencjalną oraz część solenoidalną

$$u_i = \Phi_{,i}+\varepsilon_{ijk}\,\Psi_{k,j}, \quad X_i = \varrho\,(\vartheta_{,i}+\varepsilon_{ijk}\,\chi_{k,j}), \tag{2.4}$$

doprowadzimy układ równań (2.1) do postaci

$$\begin{gathered}\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\partial_t^2\right)\Phi = m\theta - \frac{1}{c_1^2}\vartheta, \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c_2^2}\partial_t^2\right)\Psi_i = -\frac{1}{c_2^2}\chi_i, \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\theta - \eta\partial_t\nabla^2\Phi = -\frac{Q}{\varkappa}.\end{gathered} \tag{2.5}$$

Wprowadziliśmy tu oznaczenia

$$c_1^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\varrho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\varrho}, \quad m = \frac{\gamma}{c_1^2\varrho}, \quad \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Równanie $(2.5)_1$ przedstawia podłużną falę sprężystą, a $(2.5)_2$ falę poprzeczną. Równanie $(2.5)_3$ jest równaniem przewodnictwa cieplnego. Po wyeliminowaniu z $(2.5)_1$ i $(2.5)_3$ temperatury, mamy

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_1^2}\partial_t^2\right)\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\Phi - m\eta\partial_t\nabla^2\Phi = -\frac{m}{\varkappa}Q - \frac{1}{c_1^2}\left(\nabla^2 - \frac{1}{\varkappa}\partial_t\right)\vartheta. \tag{2.6}$$

W dalszych rozważaniach zajmować się będziemy jedynie drganiami harmonicznymi w czasie. Ponieważ obciążenie siłami masowymi i źródłami ciepła daje się sprowadzić do zagadnienia brzegowego, założymy w dalszych rozważaniach, że przyczyny wywołujące drgania, wyrażone są tylko przez warunki brzegowe.

Wstawiając do równań (2.5) funkcje

$$\Phi(x,t) = \Phi^*(x)\, e^{i\omega t}, \qquad \Psi_j(x,t) = \Psi_j^*(x)\, e^{i\omega t}$$

i pomijając źródła ciepła i siły masowe po prawych stronach tych równań, otrzymamy następujący układ równań [4]:

$$(2.7) \qquad \Box_1^2 \Phi^* - m\theta^* = 0, \qquad \Box_2^2 \Psi_i^* = 0, \qquad \Box_3^2 \theta^* + \frac{\varepsilon}{m} h_3^2 \nabla^2 \Phi^* = 0.$$

Wprowadzono tu oznaczenia

$$\Box_\alpha^2 = \nabla^2 + h_\alpha^2, \quad \alpha = 1,2,3, \quad h_1 = \frac{\omega}{c_1}, \quad h_2 = \frac{\omega}{c_2}, \quad h_3 = \frac{1}{i}\left(\frac{i\omega}{\varkappa}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon = \eta m \varkappa.$$

Eliminując z równań $(2.7)_1$ i $(2.7)_3$ funkcję θ^*, otrzymamy równanie fal podłużnych

$$(2.8) \qquad \Box_{k_1}^2 \Box_{k_3}^2 \Phi^* = 0,$$

gdzie

$$\Box_{k_1}^2 = \nabla^2 + k_1^2, \qquad \Box_{k_3}^2 = \nabla^2 + k_3^2.$$

Wielkości k_1 i k_3 są pierwiastkami równania

$$k^4 - k^2[h_1^2 + (1+\varepsilon) h_3^2] + h_1^2 h_3^2 = 0$$

i przyjmują wartości

$$k_r = \alpha_r - i\beta_r, \quad r = 1,3, \quad \alpha_r > 0, \quad \beta_r \geqslant 0.$$

Oznaczając $k_1 = k_1(\varepsilon)$, $k_3 = k_3(\varepsilon)$ mamy $k_1(0) = h_1$, $k_3(0) = h_3$. W dalszych rozważaniach, dotyczących wyłącznie drgań harmonicznych ze względu na zmienną czasową, opuszczać będziemy gwiazdki przy funkcjach Φ^*, θ^* itp.

3. Postać całkowa rozwiązania równania potencjału termosprężystości

W niniejszym ustępie rozpatrywać będziemy jedynie fale podłużne, powstałe w ciele ograniczonym V o brzegu Σ. Punktem wyjścia naszych rozważań będą równania (2.8) i $(2.7)_1$. W celu uzyskania tożsamości całkowej, określającej funkcję Φ dla $x \in V$ przy pomocy całek powierzchniowych, wychodzimy z następujących równań dla dwu dowolnych funkcji $\Phi(x)$ i $\overline{\Phi}(x)$:

$$(3.1) \qquad \int_V dV(\xi)\,[\overline{\Phi}(\xi)\, \Box_{k_1}^2 \Box_{k_3}^2 \Phi(\xi) - \Phi(\xi)\, \Box_{k_1}^2 \Box_{k_3}^2 \overline{\Phi}(\xi)] =$$

$$= \int_V dV(\xi)\,[\overline{\Phi}(\xi)\nabla^4\Phi(\xi) - \Phi(\xi)\nabla^4\overline{\Phi}(\xi)] + (k_1^2+k_3^2)\int_V dV(\xi)\,[\overline{\Phi}(\xi)\nabla^2\Phi(\xi) - \Phi(\xi)\nabla^2\overline{\Phi}(\xi)].$$

Wykorzystując wzór podstawowy dla bilaplasjanu

$$\int_V dV(\bar{\Phi}\nabla^4\Phi - \Phi\nabla^4\bar{\Phi}) = \int_\Sigma d\Sigma\Big[(\nabla^2\bar{\Phi})\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial}{\partial n}(\nabla^2\bar{\Phi}) + \tag{3.2}$$

$$+\bar{\Phi}\frac{\partial}{\partial n}(\nabla^2\Phi) - (\nabla^2\Phi)\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}\Big]$$

oraz przekształcenie Greena

$$\int_V dV(\bar{\Phi}\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\bar{\Phi}) = \int_\Sigma d\Sigma\left(\bar{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}\right), \tag{3.3}$$

przedstawić możemy równanie (3.1) w następującej postaci:

$$\int_V dV(\bar{\Phi}\,\Box^2_{k_1}\Box^2_{k_3}\Phi - \Phi\,\Box^2_{k_1}\Box^2_{k_3}\bar{\Phi}) = \tag{3.4}$$

$$= \int_\Sigma d\Sigma\left(\bar{\Phi}\frac{\partial}{\partial n}\Box^2\Phi - \Phi\frac{\partial}{\partial n}\Box^2\bar{\Phi}\right) - \int_\Sigma\left(\nabla^2\Phi\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n} - \nabla^2\bar{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)d\Sigma,$$

gdzie

$$\Box^2 = \nabla^2 + k_1^2 + k_3^2.$$

Załóżmy, że funkcja Φ nie ma osobliwości w obszarze V i spełnia równanie jednorodne

$$\Box^2_{k_1}\Box^2_{k_3}\Phi = 0, \qquad x \in V. \tag{3.5}$$

Temperatura θ związana z funkcją Φ dana jest za pomocą wzoru

$$\theta = \frac{1}{m}\Box^2_1\Phi. \tag{3.6}$$

Niech funkcja $\bar{\Phi}$ spełnia następujące równanie osobliwe w nieskończonej przestrzeni termosprężystej:

$$\Box^2_{k_1}\Box^2_{k_3}\bar{\Phi}(x, \xi) = -m\delta(x-\xi), \tag{3.7}$$

gdzie $\delta(x)$ jest funkcją Diraca. Rozwiązaniem tego równania jest funkcja [5]

$$\begin{gathered}\bar{\Phi}(x, \xi) = -\frac{m}{4\pi r}\frac{e^{-ik_1r} - e^{-ik_3r}}{k_1^2 - k_3^2},\\ r^2 = (x_j - \xi_j)(x_j - \xi_j), \quad j = 1, 2, 3.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Łatwo można sprawdzić [z równania $(2.5)_3$], że funkcja $\bar{\Phi}$ jest potencjałem termosprężystego przemieszczenia dla skupionego źródła ciepła o intensywności $\varkappa$, działającego w punkcie ξ. Dla obszarów zewnętrznych funkcja $\bar{\Phi}$ spełnia również rozszerzony na zagadnienie termosprężystości warunek wypromieniowania [4].

Zauważmy, że

$$(3.9)\qquad \bar{\theta}(x,\xi) = \frac{1}{m}\Box_1^2\bar{\Phi} = -\frac{1}{4\pi r(k_1^2-k_3^2)}\left[(h_1^2-k_1^2)e^{-ik_1r}-(h_1^2-k_3^2)e^{-k_3r}\right].$$

Wstawiając (3.7) do równania (3.4) i biorąc pod uwagę równanie (3.6) otrzymamy następujące podstawowe wzory:

$$(3.10)\qquad \Phi(x) = \frac{1}{m}\int\limits_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\left[\bar{\Phi}(\xi,x)\frac{\partial}{\partial n}\Box^2\Phi(\xi) - \Phi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\Box^2\bar{\Phi}(\xi,x)\right] -$$
$$-\frac{1}{m}\int\limits_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\left[\nabla^2\Phi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\bar{\Phi}(\xi,x) - \nabla^2\bar{\Phi}(\xi,x)\frac{\partial}{\partial n}\Phi(\xi)\right]\quad \text{dla } x\in V$$

oraz

$$(3.11)\qquad \Phi(x) = 0 \quad \text{dla } x\in E-V,$$

gdzie E jest całą przestrzenią.

Równania te można przekształcić wykorzystując związek między funkcją Φ i θ według wzoru (3.6). Po prostych przekształceniach otrzymamy

$$(3.12)\qquad \Phi(x) = \int\limits_{\Sigma} d\Sigma\left\{\left(\bar{\Phi}\frac{\partial\theta}{\partial n} - \theta\frac{\partial\bar{\Phi}}{\partial n}\right) + \frac{1}{m}\left[(\Box_k^2\bar{\Phi})\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial}{\partial n}(\Box_k^2\bar{\Phi})\right]\right\},\quad x\in V$$

oraz

$$(3.12')\qquad \Phi(x) = 0 \quad \text{dla } x\in E-V,$$

gdzie $\quad \Box_k^2 = \nabla^2 + k_1^2 + k_3^2 - h_1^2\,.$

Wzór (3.12) określa funkcję $\Phi(x)$ wewnątrz obszaru V za pomocą funkcji $\Phi(\xi)$, $\partial\Phi(\xi)/\partial n$, $\theta(\xi)$ i $\partial\theta(\xi)/\partial n$ na powierzchni Σ. Stosując do funkcji (3.12) operację $1/m\,\Box_1^2$ i wykorzystując własności funkcji $\bar{\Phi}$ oraz związek

$$-(k_1^2-h_1^2)(k_3^2-h_1^2) = \varepsilon h_1^2 h_3^2$$

dla temperatury, otrzymamy analogiczny wzór

$$\theta(x) = \int\limits_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\left[\bar{\theta}(\xi,x)\frac{\partial}{\partial n}\theta(\xi) - \theta(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\bar{\theta}(\xi,x)\right] +$$
$$+\frac{\varrho\omega^2}{\alpha}\int\limits_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\left[\bar{\Phi}(\xi,x)\frac{\partial\Phi(\xi)}{\partial n} - \Phi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\bar{\Phi}(\xi,x)\right],\qquad x\in V$$

$$\theta(x) = 0 \quad \text{dla } x\in E-V,$$

gdzie

$$\alpha = \frac{m\gamma}{\varepsilon h_3^2},\qquad \varepsilon = \eta m\varkappa.$$

W przypadku braku sprzężenia ($\varepsilon = 0$) otrzymamy z równania (3.13)

$$(3.14) \qquad [\theta(x)]_{\varepsilon=0} = \int_{\Sigma} d\Sigma \left[\bar{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial n} - \theta \frac{\partial}{\partial n} \bar{\theta} \right]_{\varepsilon=0}.$$

Ponieważ dla zagadnienia niesprzężonego mamy $k_1(0) = h_1$ oraz $k_3(0) = h_3$, zatem z równania (3.9) wynika, że $[\bar{\theta}]_{\varepsilon=0} = \frac{1}{4\pi r} e^{-ih_3 r}$. Wzór (3.14) przyjmuje postać

$$(3.15) \qquad [\theta(x)]_{\varepsilon=0} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \left[\frac{e^{-ih_3 r}}{r} \frac{\partial}{\partial n} \theta(\xi) - \theta(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ih_3 r}}{r} \right) \right], \quad r = r(x, \xi), \quad x \in V.$$

Wzór (3.15) jest znany jako wzór Greena dla niesprzężonego, klasycznego równania przewodnictwa cieplnego [6].

Wróćmy do równania (3.12) i załóżmy, że mamy do czynienia z ośrodkiem hipotetycznym, w którym $\alpha_t = 0$. W takim ośrodku jest $\eta = 0$ oraz $m = 0$. Zważywszy, że

$$(3.16) \qquad [\bar{\Phi}]_{\eta=0} = -\frac{m}{4\pi r} \frac{e^{-ih_1 r} - e^{-ih_3 r}}{h_1^2 - h_3^2}, \quad \frac{1}{m} [\Box_k^2 \Phi]_{\eta=0} = \frac{1}{4\pi r} e^{-ih_1 r};$$

wstawiając (3.16) do wzoru (3.12) otrzymamy

$$(3.17) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \left[\left(\frac{e^{-ih_1 r}}{r} \right) \frac{\partial}{\partial n} \Phi(\xi) - \Phi(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-ih_1 r}}{r} \right) \right], \quad r = r(x, \xi), \quad x \in V.$$

Ze wzoru tego łatwo już przejść do ośrodka, w którym ruch odbywa się w warunkach adiabatycznych (elastokinetyka klasyczna). W wielkości h_1 należy jednak zastąpić izotermiczne stałe Lamégo μ_T i λ_T przez stałe adiabatyczne μ_s i λ_s. Wzór (3.17) jest znanym z elastokinetyki wzorem Helmholtza [7].

Wyprowadzone dla zagadnienia sprężonego termosprężystości wzory (3.12) i (3.13) nie stanowią kompletnego układu funkcji rozwiązujących ogólne zagadnienie brzegowe. Dlatego przejdziemy do poszukiwania ogólniejszych przedstawień całkowych rozwiązania, używając bądź bezpośredniej metody całkowania podstawowych równań termosprężystości, bądź też wykorzystując twierdzenie o wzajemności [8 i 9].

4. Postać całkowa ogólnego rozwiązania równań sprzężonej termosprężystości

Dążeniem naszym jest przedstawienie wektora przemieszczenia i temperatury w punkcie wewnętrznym x obszaru V za pomocą całek na powierzchni Σ, ograniczającej ten obszar.

Załóżmy, że przyczyny wywołujące ruch ośrodka są sprecyzowane przez warunki brzegowe. Skonstruujemy rozwiązania następujących równań termosprężystości:

$$(4.1) \qquad \sigma_{ij,j} = -\omega^2 \varrho u_i$$

oraz

$$\theta_{,kk}+h_3^2\theta+\frac{\gamma}{a}u_{k,k}=0, \qquad x\in V, \qquad i,j,k=1,2,3, \tag{4.2}$$

gdzie

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}(x), \qquad u_i=u_i(x), \qquad \theta=\theta(x), \qquad a=\frac{m\gamma}{\varepsilon h_3^2}.$$

Do równań różniczkowych (4.1) i (4.2) dołączamy równania konstytutywne

$$\sigma_{ij}=2\mu\, u_{(i,j)}+(\lambda u_{k,k}-\gamma\theta)\,\delta_{ij}. \tag{4.3}$$

Równania różniczkowe (4.1), (4.2) oraz związki (4.3) opisują amplitudy ruchu harmonicznego.

Przyjmijmy inny układ równań, odpowiadający termosprężystemu ośrodkowi nieograniczonemu, w którym działa skupione źródło ciepła o intensywności $\varkappa$ i zmieniające się w sposób harmoniczny w czasie. Wszelkie funkcje występujące w tych równaniach oznaczamy funkcją z kreską poziomą:

$$\bar{\sigma}_{ij,j}=-\omega^2\varrho\bar{u}_i \tag{4.4}$$

oraz

$$\bar{\theta}_{jj}+h_3^2\bar{\theta}+\frac{\gamma}{a}\bar{u}_{k,k}=-\delta(x-\xi), \tag{4.5}$$

$$\bar{\sigma}_{ij}=\bar{\sigma}_{ij}(x,\xi), \qquad \bar{\theta}=\bar{\theta}(x,\xi), \qquad \bar{u}_i=\bar{u}_i(x,\xi).$$

Ponadto dołączamy do powyższych równań wzory Duhamela-Neumanna

$$\bar{\sigma}_{ij}=2\mu\,\bar{u}_{(i,j)}+(\lambda\bar{u}_{k,k}-\gamma\bar{\theta})\,\delta_{ij}. \tag{4.6}$$

Kombinując odpowiednio układy równań (4.1), (4.2) i (4.3) oraz (4.4) (4.5) i (4.6), całkując je odpowiednio po obszarze V oraz wykorzystując przekształcenie Greena, otrzymamy następujące równanie:

$$\theta(x)=\int_{\Sigma}d\Sigma(\xi)\left[\bar{\theta}(\xi,x)\frac{\partial}{\partial n}\theta(\xi)-\theta(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\bar{\theta}(\xi,x)\right]+ \tag{4.7}$$

$$+\frac{1}{a}\int_{\Sigma}d\Sigma(\xi)\,[\bar{u}_i(\xi,x)p_i(\xi)-u_i(\xi)\bar{p}_i(\xi,x)], \qquad x\in V.$$

Tutaj wprowadzono oznaczenia

$$p_i(\xi)=\sigma_{ij}(\xi)\,n_j(\xi), \qquad \bar{p}_i(\xi,x)=\bar{\sigma}_{ij}(\xi,x)\,n_j(\xi),$$

a operacje różniczkowania, występujące pod znakiem całek powierzchniowych, przeprowadzone są względem zmiennych ξ. Wzór (4.7) przedstawia związek między temperaturą θ w punkcie $x\in V$ a funkcjami θ, $\partial\theta/\partial n$, u_i i p_i na powierzchni Σ.

Porównanie związków (4.7) i (3.13) pokazuje, jak związane są na powierzchni Σ wartości potencjału Φ i jego pochodnej $\partial\Phi/\partial n$ z obciążeniami p_i oraz przemieszczeniami powierzchniowymi u_i. Aby otrzymać reprezentację całkową dla wektora $u_i(x)$ dla $x \in V$ należy przyjąć dwa inne układy związków, mianowicie układ równań (4.1), (4.2) i (4.3) oraz układ równań

$$
\begin{gathered}
\sigma^s_{ij,j} = -\omega^2 \varrho u^s_i - \delta(x-\xi)\delta_{is}, \qquad \theta^s_{,kk} + h_3^2\theta^s + \frac{\gamma}{a} u^s_{k,k} = 0, \\
\sigma^s_{ij} = 2\mu u^s_{(i,j)} + (\lambda u^s_{k,k} - \gamma\theta^s)\delta_{ij}, \qquad i,j,k,s = 1,2,3; \\
\sigma^s_{ij} = \sigma^s_{ij}(x,\xi), \qquad u^s_i = u^s_i(x,\xi), \qquad \theta^s = \theta^s(x,\xi).
\end{gathered} \tag{4.8}
$$

Powyższy układ równań odnosi się do siły skupionej harminicznie zmiennej w czasie, przyłożonej do punktu ξ i skierowanej wzdłuż osi x_s. Kombinując odpowiednio układy równań (4.1), (4.2) i (4.3) oraz (4.8) otrzymamy następujący wzór:

$$
\begin{aligned}
u_s(x) = \int_\Sigma d\Sigma(\xi)\,[u^s_k(\xi,x)p_k(\xi) - u_k(\xi)p^s_k(\xi,x)] +& \\
+ a\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\left[\theta^s(\xi,x)\frac{\partial}{\partial n}\theta(\xi) - \theta(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\theta^s(\xi,x)\right]&,
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

gdzie

$$
u^s_k(x,\xi) = u^k_s(x,\xi) = u^s_k(\xi,x), \qquad p^s_k(\xi,x) = \sigma^s_{kj}(\xi,x)n_j(\xi).
$$

Funkcje u^s_k i θ^s podobnie jak i $\bar{u}_i$ i $\bar{\theta}$ są funkcjami Greena dla ośrodka termosprężystego [5] i są funkcjami znanymi.

Wzory (4.7) i (4.9) stanowią sprzężoną reprezentację całkową ogólnego rozwiązania termosprężystości. Są one uogólnieniem znanych z elastostatyki wzorów Somigliana na zagadnienia termosprężystości [1]. Zauważamy, że funkcje θ^s i $\bar{u}_s$ nie są dowolne, lecz związane są związkami

$$
\bar{u}_s(x,\xi) = a\theta^s(\xi,x), \qquad \theta^s(x,\xi) = -\theta^s(\xi,x). \tag{4.10}
$$

Związek ten można otrzymać przez odpowiednie wykorzystanie układów równań (4.4)–(4.6) oraz (4.8) lub też bezpośrednio z twierdzenia o wzajemności. Jeśli funkcje Greena $\bar{u}_i$ i $\bar{\theta}$ oraz u^s_i i θ^s dobrać w ten sposób, aby odnosiły się do ciała zajmującego obszar V ograniczony powierzchnią Σ i przyjąć, że na Σ powinny być spełnione warunki brzegowe

$$
\bar{u}_i = 0, \quad \bar{\theta} = 0, \quad u^s_i = 0, \quad \theta^s = 0 \quad \text{na } \Sigma,
$$

to równania (4.7) i (4.9) uproszczą się do postaci

$$
\begin{aligned}
\theta(x) &= -\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\left[\theta(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\bar{\theta}(\xi,x) + \frac{1}{a}u_i(\xi)\bar{p}_i(\xi,x)\right], \\
u_s(x) &= -\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\left[u_k(\xi)p^s_k(\xi,x) + a\theta(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\theta^s(\xi,x)\right].
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

Wzory (4.11) stanowią rozwiązanie pierwszego zagadnienia brzegowego, w którym dane są na Σ przemieszczenia u_i oraz temperatura θ. Gdyby funkcje $\bar{u}_i$ i $\bar{\theta}$ oraz u_i^s i θ^s odnosiły się do ciała zajmującego obszar ograniczony V, na którego powierzchni nie ma obciążeń ani zmian temperatury, to do równań (4.7) i (4.9) należałoby wstawić

$$\bar{p}_i = 0, \quad \bar{\theta} = 0, \quad p_i^s = 0, \quad \theta^s = 0 \quad \text{na } \Sigma.$$

Wtedy wzory (4.7) i (4.9) przyjmą postać

$$\begin{aligned} \theta(x) &= -\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\left[\theta(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\bar{\theta}(\xi, x) - \frac{1}{\alpha}\bar{u}_k(\xi, x)p_k(\xi)\right], \\ u_s(x) &= \int_\Sigma d\Sigma(\xi)\left[u_k^s(\xi, x)p_k(\xi) - \theta(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\theta^s(\xi, x)\right] \end{aligned} \tag{4.12}$$

i stanowią rozwiązanie drugiego zagadnienia brzegowego, w którym na Σ dane są obciążenia p_k i temperatura θ. Jednakże stosowanie wzorów (4.11) i (4.12) jest ograniczone ze względu na trudności związane z uzyskaniem funkcji Greena $\bar{u}_i$, $\bar{\theta}$, u_k^s i θ^s spełniających z góry dane warunki brzegowe.

5. Potencjały termosprężyste oraz równania całkowe dla zagadnień brzegowych

Wprowadźmy analogicznie do potencjałów elastokinetyki [10] termosprężyste potencjały powierzchniowe. I tak termosprężystym potencjałem warstwy pojedynczej nazywać będziemy układ

$$\begin{aligned} V_s(x) &= 2\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,u_s^k(\xi, x) + 2\alpha\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\,\psi(\xi)\,\theta^s(\xi, x), \\ V(x) &= 2\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\,\psi(\xi)\bar{\theta}(\xi, x) + \frac{2}{\alpha}\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,u_k(\xi, x), \end{aligned} \tag{5.1}$$

gdzie $\varphi_k = \varphi_k(\xi)$ i $\psi = \psi(\xi)$ są nieznanymi gęstościami powierzchniowymi odpowiedniej regularności. Występujące tu funkcje $\bar{u}_k$, $\bar{\theta}$, u_s^k i θ^s są funkcjami Greena, określonymi za pomocą wzorów (4.4)–(4.6) oraz (4.8) i odnoszącymi się do termosprężystej przestrzeni nieograniczonej.

Termosprężystym potencjałem warstwy podwójnej nazywamy układ

$$\begin{aligned} W_s(x) &= 2\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,p_k^s(\xi, x) + 2\alpha\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\,\psi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\theta^s(\xi, x). \\ W(x) &= 2\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\,\psi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\bar{\theta}(\xi, x) + \frac{2}{\alpha}\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,\bar{p}_k(\xi, x). \end{aligned} \tag{5.2}$$

We wzorach (5.2) wprowadziliśmy oznaczenia

$$\begin{aligned} p_k^s(\xi, x) &= [2\mu\, u^s_{(k,j)} + (\lambda u^s_{p,p} - \gamma\theta^s)\,\delta_{kj}]\,n_j, \\ \bar{p}_k(\xi, x) &= [2\mu\, \bar{u}_{(k,j)} + (\lambda \bar{u}_{p,p} - \gamma\bar{\theta})\,\delta_{kj}]\,n_j. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Zdefiniujmy jeszcze potencjał termosprężysty, będący kombinacją liniową potencjałów warstwy pojedynczej i podwójnej:

$$
(5.4)\qquad
\begin{aligned}
M_s(x) &= 2\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\varphi_k(\xi)p_k^s(\xi, x) + 2\alpha\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\psi(\xi)\theta^s(\xi, x),\\
M(x) &= 2\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\psi(\xi)\overline{\theta}(\xi, x) + \frac{2}{\alpha}\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\varphi_k(\xi)\overline{p}_k(\xi, x).
\end{aligned}
$$

Przy badaniu skoków potencjałów (5.1), (5.2) i (5.4) przy przejściu przez powierzchnię Σ wprowadzimy następujące oznaczenia. Niech $W_s(\xi_0)$, $W_s^{(i)}(\xi_0)$ i $W_s^{(e)}(\xi_0)$ oznaczają kolejno granice wektora $W_s(\xi)$ dla $\xi \to \xi_0 \in \Sigma$ po powierzchni Σ, $W_s(\xi)$ dla $\xi \to \xi_0 \in \Sigma$ od wnętrza obszaru V, oraz $W_s(\xi)$ dla $\xi \to \xi_0 \in \Sigma$ przy $\xi \in E-V$. Można dowieść, że potencjały $V_s(x)$ i $V(x)$ są funkcjami ciągłymi punktów $x \in \Sigma$. Pokażemy natomiast, że potencjał warstwy podwójnej $\{W_s(x), W(x)\}$ jest na tej powierzchni nieciągły. Mamy bowiem

$$
(5.5)\qquad
\begin{aligned}
W_s^{(i)}(\xi_0) &= -\varphi_s(\xi_0) + W_s(\xi_0), & W^{(i)}(\xi_0) &= -\psi(\xi_0) + W(\xi_0),\\
W_s^{(e)}(\xi_0) &= \varphi_s(\xi_0) + W_s(\xi_0), & W^{(e)}(\xi_0) &= \psi(\xi_0) + W(\xi_0).
\end{aligned}
$$

Związki te są analogiczne do odpowiednich związków dla skoków potencjału harmonicznego warstwy podwójnej. Pokażemy, że pierwsza całka powierzchniowa we wzorach (5.2) jest funkcją nieciągłą, druga natomiast przedstawia funkcję ciągłą. Z pierwszego bowiem równania układu (4.8) wynika

$$
(5.6)\qquad \varphi_k(x)\sigma_{kj,j}^s(x, \xi) = -\delta(x-\xi)\varphi_s(\xi) - \omega^2\varrho u_k^s(x, \xi)\varphi_k(x).
$$

Zważywszy, że

$$
(5.7)\qquad \int_V dV(x)\delta(x-\xi) = h(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{dla} \quad \xi \in V,\\ \frac{1}{2} & \text{dla} \quad \xi \in \Sigma,\\ 0 & \text{dla} \quad \xi \in E-V \end{cases}
$$

i całkując funkcję (5.6) po $x \in V$, a następnie zamieniając zmienne, otrzymamy

$$
(5.8)\qquad 2\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\varphi_k(\xi)p_k^s(\xi, x) = -2h(x)\varphi_s(x) + g_s(x),
$$

gdzie

$$
g_s(x) = 2\int_V dV(\xi)\varphi_{i,j}(\xi)\sigma_{ij}^s(\xi, x) - 2\varrho\omega^2\int_V dV(\xi)u_k^s(x, \xi)\varphi_k(\xi).
$$

Można wykazać, że $g_s(x)$ jako kombinacja całek objętościowych jest ciągła dla $x \in \Sigma$. Podobnie biorąc pod uwagę równanie (4.9) sprawdzimy, że drugi składnik potencjału W_s jest funkcją ciągłą.

Wzory (5.8) i (5.2) dostarczają pierwszej grupy związków (5.5). Nieciągłość funkcji $W = W(x)$ można wykazać analogicznie przez całkowanie równań (5.4) i (4.5). Drugi składnik we wzorze na $W(x)$ jest ciągły na powierzchni Σ.

Wprowadzimy oznaczenia

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_i(x) &= [2\mu V_{(i,j)} + (\lambda V_{k,k} - \gamma V)\delta_{ij}] n_j(x), \\
\hat{\theta}(x) &= V_{,k} n_k(x),
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

gdzie funkcje V_s i V są dane na podstawie wzoru (5.1). Można wykazać, że

$$
\begin{aligned}
\hat{p}_k^{(i)}(\xi_0) &= \varphi_k(\xi_0) + \hat{p}_k(\xi_0), & \hat{\theta}^{(i)}(\xi_0) &= \psi(\xi_0) + \hat{\theta}(\xi_0), \\
\hat{p}_k^{(e)}(\xi_0) &= -\varphi_k(\xi_0) + \hat{p}_k(\xi_0), & \hat{\theta}^{(e)}(\xi_0) &= -\psi(\xi_0) + \hat{\theta}(\xi_0).
\end{aligned} \tag{5.10}
$$

Potencjały termosprężyste (5.1)–(5.4) funkcje określające relacje skoku dla tych potencjałów pozwalają na redukcję podstawowych zagadnień brzegowych termosprężystości do rozwiązania układu osobliwych równań całkowych.

Ograniczmy się w naszych rozważaniach jedynie do niektórych typowych zagadnień. Rozpatrzmy przypadek danych przemieszczeń na brzegu przy równocześnie danej temperaturze lub przepływie temperatury na powierzchni Σ.

Załóżmy, że na brzegu Σ dane są przemieszczenia $u_s(\xi_0) = f_s(\xi_0)$ oraz temperatura $\theta(\xi_0) = g(\xi_0)$. Rozwiązania zagadnienia poszukujemy w postaci potencjału warstwy podwójnej (5.2) przyjmując

$$
U_s(x) = W_s(x), \qquad \theta(x) = W(x). \tag{5.11}
$$

Łatwo sprawdzimy, że funkcje $U_s(x)$ i $\theta(x)$ spełniają równanie

$$
L_{sk} U_k - \gamma \partial_s \theta = 0, \qquad \Box_3^2 \theta + \frac{\gamma}{a} \partial_k U_k = 0, \qquad x \in V, \tag{5.12}
$$

gdzie

$$
L_{sk} = (\mu \partial_p \partial_p + \omega^2 \varrho)\delta_{sk} + (\lambda+\mu)\partial_s \partial_k .
$$

Biorąc pod uwagę (5.5) dla funkcji $\varphi_k(\xi)$ i $\psi(\xi)$ otrzymamy następujący układ sprzężonych równań całkowych:

$$
\begin{aligned}
\varphi_s(\xi_0) - 2\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\varphi_k(\xi) p_k^s(\xi,\xi_0) - 2\alpha \int_\Sigma d\Sigma(\xi)\psi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\theta^s(\xi,\xi_0) &= \\
&= -f_s(\xi_0), \\
\psi(\xi_0) - 2\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\psi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\bar{\theta}(\xi,\xi_0) - \frac{2}{a}\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\varphi_k(\xi)\bar{p}_k(\xi,\xi_0) &= \\
&= -g(\xi_0).
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

Równania (5.13) mają zatem postać osobliwych równań całkowych Fredholma drugiego rodzaju, a całki w nich występujące należy rozumieć w sensie wartości głównych.

Dla zagadnienia niesprzężonego otrzymujemy kolejno z równań (5.11) i (5.13)

(5.14)
$$[U_s]_{\varepsilon=0} = 2\int_{\Sigma} d\Sigma\, \varphi_k [p_k^s]_{\varepsilon=0} + 2\int_{\Sigma} d\Sigma\, \psi \left[\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial n}\right]_{\varepsilon=0},$$
$$[\theta]_{\varepsilon=0} = 2\int_{\Sigma} d\Sigma\, \psi \left[\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial n}\right]_{\varepsilon=0},$$

gdzie funkcje φ_k i ψ spełniają niesprzężone równanie całkowe

(5.15)
$$\varphi_s^{\varepsilon}(\xi_0) - 2\int_{\Sigma} d\Sigma\, \varphi_k [p_k^s]_{\varepsilon=0} = -f_s(\xi_0) + 2\int_{\Sigma} d\Sigma\, \psi \left[\frac{\partial \bar{u}_s}{\partial n}\right]_{\varepsilon=0},$$
$$\psi(\xi_0) - 2\int_{\Sigma} d\Sigma\, \psi \left[\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial n}\right]_{\varepsilon=0} = -g(\xi_0).$$

Załóżmy, że na brzegu Σ dane są przemieszczenia $u_i(\xi_0) = f_i(\xi_0)$ oraz przepływ ciepła $\left[\frac{\partial \theta}{\partial n}\right]_{\xi=\xi_0} = S(\xi_0)$. Rozwiązania poszukiwać będziemy w postaci

(5.16)
$$\tilde{U}_s(x) = M_s(x), \qquad \tilde{\theta}(x) = M(x), \qquad x \in V,$$

gdzie funkcje M_s, M są określone za pomocą wzorów (5.4). Sprawdzimy łatwo, że wewnątrz obszaru V spełnione są równania (5.12), a niewiadome gęstości $\varphi_k(\xi)$ i $\psi(\xi)$ spełniają następujący układ osobliwych równań całkowych:

(5.17)
$$\varphi_s(\xi_0) - 2\int_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\, \varphi_k(\xi)\, p_k^s(\xi, \xi_0) - 2\alpha \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\, \psi(\xi)\, \theta^s(\xi, \xi_0) = -f_s(\xi_0),$$
$$\psi(\xi_0) + 2\int_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\, \psi(\xi) \frac{\partial}{\partial n_0} \bar{\theta}(\xi, \xi_0) + \frac{2}{\alpha}\int_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\, \varphi_k(\xi) \frac{\partial}{\partial n_0} \bar{p}_k(\xi, \xi_0) =$$
$$= S(\xi_0),$$

gdzie

$$\frac{\partial}{\partial n_0} \bar{\theta}(\xi, \xi_0) = \lim_{x \to \xi_0} \frac{\partial}{\partial n_x} \bar{\theta}(\xi, x), \qquad \text{gdy } x \in \Sigma$$

i analogicznie zdefiniowane $\partial/\partial n_0\, \bar{p}_k(\xi, \xi_0)$.

Dla zagadnienia niesprzężonego otrzymamy znaczne uproszczenie równań (5.17):

(5.18)
$$\varphi_s(\xi_0) - 2\int_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\, \varphi_k(\xi) [p_k^s(\xi, \xi_0)]_{\varepsilon=0} - 2\int_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\, \psi(\xi) [\bar{u}_s(\xi, \xi_0)]_{\varepsilon=0} =$$
$$= -f_s(\xi_0),$$
$$\psi(\xi_0) + 2\int_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\, \psi(\xi) \left[\frac{\partial}{\partial n} \bar{\theta}(\xi, \xi_0)\right]_{\varepsilon=0} = S(\xi_0).$$

Nie będziemy tu wypisywać równań całkowych dla zagadnienia brzegowego, w którym na brzegu dane są obciążenia. Zauważymy jedynie, że jeśli dane jest obciążenie $p_i = p_i(\xi_0)$ oraz strumień $S(\xi_0) = S$ na brzegu Σ, to rozwiązania należy poszukiwać w postaci potencjału warstwy pojedynczej $V_s(x)$ i $V(x)$. Korzystając ze związków (5.9) i (5.10) można również explicite wypisać odpowiednie osobliwe równania całkowe.

Badanie istnienia i jednoznaczności otrzymanych osobliwych równań można przeprowadzić w podobny sposób jak to czyniono w odniesieniu do potencjałów sprężystych [10].

6. Kanoniczne funkcjonalne równania całkowe oraz rozwiązania przybliżone

Załóżmy, że na brzegu Σ ciała określona jest pochodna normalna potencjału termosprężystego przemieszczenia $[\partial\Phi/\partial n]_\Sigma = f(\xi)$ oraz temperatura $\theta(\xi) = g(\xi)$. Biorąc pod uwagę związki (3.12) i (3.13) utworzymy następujące równanie funkcjonalne dla $x \in E - V$:

$$
(6.1) \qquad 0 = \int_\Sigma d\Sigma(\xi)\Bigg\{\left[\overline{\Phi}(\xi, x)\frac{\partial}{\partial n}\theta(\xi) - g(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\overline{\Phi}(\xi, x)\right] + \\
+ \frac{1}{m}\left[(\Box_k^2\overline{\Phi}(\xi, x))f(\xi) - \Phi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}(\Box_k^2\overline{\Phi}(\xi, x))\right]\Bigg\}
$$

oraz

$$
(6.2) \qquad 0 = \int_\Sigma d\Sigma(\xi)\left[\overline{\theta}(\xi, x)\frac{\partial}{\partial n}\theta(\xi) - g(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\overline{\theta}(\xi, x)\right] + \\
+ \frac{\varrho\omega^2}{\alpha}\int_\Sigma d\Sigma(\xi)\left[\overline{\Phi}(\xi, x)f(\xi) - \Phi(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\overline{\Phi}(\xi, x)\right].
$$

W równaniach (6.1) i (6.2) niewiadomymi są funkcje $\partial\theta/\partial n$ oraz Φ na powierzchni Σ. Jeśli znamy te funkcje, to znamy również θ oraz Φ dla $x \in V$ zgodnie ze wzorami (3.12) i (3.13).

Równania (6.1) i (6.2) nie zawierające funkcji Φ, $\partial\theta/\partial n$ poza całką i dla których obszar zmienności punktów x i ξ nie pokrywa się, nazywamy kanonicznymi równaniami funkcjonalnymi. Można okazać, że równania (6.1) i (6.2) mają tylko jedno rozwiązanie dla funkcji Φ i $\partial\theta/\partial n$ przy $\xi \in \Sigma$. Wprowadźmy oznaczenia

$$
(6.3) \qquad \frac{\partial}{\partial n}\theta(\xi) = X(\xi), \qquad \Phi(\xi) = Y(\xi).
$$

Równania (6.1) i (6.2) można rozwiązać w sposób przybliżony, zastępując je przez liniowe równania algebraiczne za pomocą kwadratury mechanicznej. Wybierzmy N punktów x_j $(j = 1, 2, ..., N)$ na pewnej powierzchni Σ', która zawiera w sobie cały obszar V. Punkty x_j mogą być punktami przecięcia N normalnych, wystawionych do powierzchni Σ z powierzchnią Σ'. Normalne te wystawiamy na ogół w sposób równomiernie rozłożony na Σ. W tym przypadku jądra funkcji podcałkowych w równaniach (6.1) i (6.2) są funkcjami ograniczonymi dla $x_j \in \Sigma'$ oraz $\xi \in \Sigma$. Można więc stosować do tych równań kwadraturę mechaniczną.

Równania (6.1) (6.2) prowadzą do przybliżonych związków

$$\sum_{i=1}^{N} A_i^{(N)} \overline{\Phi}(\xi_i, x_j) X(\xi_i) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} A_i^{(N)} \frac{\partial}{\partial n} (\Box_k^2 \overline{\Phi}(\xi_i, x_j)) Y(\xi_i) = a_j \tag{6.4}$$

oraz

$$\sum_{i=1}^{N} A_i^{(N)} \overline{\theta}(\xi_i, x_j) X(\xi_i) - \frac{\varrho\omega^2}{\alpha} \sum_{i=1}^{N} A_i^{(N)} \frac{\partial}{\partial n} (\overline{\Phi}(\xi_i, x_j)) Y(\xi_i) = b_j, \tag{6.5}$$

$$i, j = 1, 2, 3, \ldots, N, \quad \xi_i \in \Sigma,$$

gdzie

$$a_j = \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \left[g(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \overline{\Phi}(\xi, x_j) - \frac{1}{m} f(\xi) \Box_k^2 (\overline{\Phi}(\xi, x_j)) \right],$$

$$b_j = \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \left[g(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \overline{\theta}(\xi, x_j) - \frac{\varrho\omega^2}{\alpha} f(\xi) \overline{\Phi}(\xi, x_j) \right].$$

Symbole $A_i^{(N)}$ są współczynnikami danej kwadratury mechanicznej. Układ równań (6.4) i (6.5) ma $2N$ niewiadomych $X(\xi_i)$, $Y(\xi_i)$, $i = 1, \ldots, N$, i może być rozwiązany, jeśli jego wyznacznik podstawowy jest różny od zera, co na ogół daje się zapewnić przez odpowiedni dobór punktów x_j na powierzchni Σ'.

Przybliżona postać potencjału $\Phi(x)$, $\theta(x)$ dla punktów położonych wewnątrz obszaru V jest następująca:

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(N)} \left[\overline{\Phi}(\xi_i, x) X(\xi_i) - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial n} (\Box_k^2 \overline{\Phi}(\xi_i, x)) Y(\xi_i) \right] - \tag{6.6}$$

$$- \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \left[g(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \overline{\Phi}(\xi, x) - \frac{1}{m} f(\xi) (\Box_k^2 \overline{\Phi}(\xi, x)) \right],$$

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(N)} \left[\overline{\theta}(\xi_i, x) X(\xi_i) - \frac{\varrho\omega^2}{\alpha} \frac{\partial}{\partial n} \overline{\Phi}(\xi_i, x) Y(\xi_i) \right] - \tag{6.7}$$

$$- \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi) \left[g(\xi) \frac{\partial}{\partial n} \overline{\theta}(\xi, x) - \frac{\varrho\omega^2}{\alpha} f(\xi) \overline{\Phi}(\xi, x) \right].$$

Rozpatrzmy dowolne ograniczone ciało termosprężyste z danymi na Σ przemieszczeniami $f_i(\xi)$ oraz temperaturą $g(\xi)$. Korzystając ze związków (4.7) i (4.9) i stosując analogiczną procedurę przybliżonego rozwiązania otrzymamy dla przemieszczenia i temperatury wewnątrz ciała następujące związki:

$$(6.8)\qquad u_s(x) = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(N)} [\varphi_k(\xi_i) u_k^s(x, \xi_i) + \alpha\psi(\xi_i)\theta^s(\xi_i, x)] - \\ - \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\left[f_i(\xi)p_i^s(\xi, x) + \alpha g(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\theta^s(\xi, x)\right]$$

oraz

$$(6.9)\qquad \theta(x) = \sum_{i=1}^{N} A_i^{(N)}\left[\frac{1}{\alpha}\varphi_k(\xi_i)\bar{u}_k(\xi_i, x) + \psi(\xi_i)\bar{\theta}(\xi_i, x)\right] - \\ - \int_{\Sigma} d\Sigma(\xi)\left[\frac{1}{\alpha}f_k(\xi)\bar{p}_k(\xi, x) + g(\xi)\frac{\partial}{\partial n}\bar{\theta}(\xi, x)\right],$$

gdzie $4N$ niewiadome wartości $\varphi_k(\xi_i)$, $\psi(\xi_i)$, $k = 1, 2, 3$, $i = 1, ..., N$ stanowią rozwiązanie następującego liniowego układu równań algebraicznych:

$$(6.10)\qquad u_s(x_j) = 0, \quad \theta(x_j) = 0, \quad x_j \in \Sigma', \quad j = 1, 2, ..., N.$$

Literatura cytowana w tekście

1. E. Trefftz, *Mathematische Elastizitätslehre*, Handb. d. Physik, Band VI, 1926.
2. M. A. Biot, *Thermoelasticity and irreversible thermodynamics*, J. Appl. Phys., **27** (1956).
3. P. Chadwick, *Thermoelasticity. The dynamical theory. Progress in Solid Mechanics*, V. I., Amsterdam 1960.
4. J. Ignaczak, W. Nowacki, *The Sommerfeld radiation conditions for coupled problems of thermoelasticity. Examples of coupled stress and temperature concetration at cylindrical and spherical cavities*, Arch. Mech. Stos., 1, **14** (1962):
5. W. Nowacki, *Green functions for an thermoelastic medium* (I), Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 6, **12** (1964).
6. P. M. Morse, H. Feshbach, *Methods of theoretical physics*, New York-Toronto-London, 2, **1** (1953).
7. B. B. Baker, E. T. Copson, *The Mathematical Theory of Huygen's Principle*, Oxford 1953.
8. V. Ionescu-Cazimir, *Problem of linear coupled thermoelasticity. Theorems on reciprocity for the dynamic problem of coupled thermoelasticity*, I, Bull. Acad. Polon. Sci., Série Sci. Techn., 9, **12** (1964).
9. W. Nowacki, *Mixed boundary value problems of thermoelasticity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Série. Sci. Techn., 11, **12** (1964).
10. V. D. Kupradze, *Dynamical problems in elasticity*, Progress in Solid. Mechanics, **3**, Amsterdam 1963.

Резюме

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Выводится так наз. интегральное представление общего решения линейной совместной термоупругости. Принимается, что постоянные материала и термические постоянные не зависят от температуры. Рассматриваются гармонические во времени колебания. Полученные интегральные зависимости составлены при использовании двух систем сингулярных

решений: первая обозначает симметрический тензор перемещения второго ряда и температуры, соответствующий действию в бесконечной среде сосредоточенной силы. Вторая система обозначает потенциальный вектор перемещения и температуру вызванную, в бесконечной термоупругой среде, действием сосредоточенного источника тепла. При помощи этих систем сингулярных решений дается дефиниция так наз. термоупругих потенциалов простого, двойного и смешанного слоев. Затем составляется так наз. сингулярное, интегральное уравнение для основных краевых решений. Эти уравнения имеют форму совместных, сингулярных, интегральных уравнений Фредгольма второго рода, а существующие там интегралы понимаются в смысле главных значений.

В последнем разделе работы использовалось интегральное представление решения некоторого приближенного решения трехмерных задач термоупругости, при использовании так наз. канонических функциональных уравнений.

Summary

SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THERMOELASTICITY

The present paper contains a derivation of the integral representation of the general solution of coupled linear elasticity. It is assumed that the material and termal constants are independent of the temperature and that the vibration is harmonic. The integral relations are obtained by means of two sets of singular solutions of which the first determines the symmetric second order displacement tensor and the temperature both corresponding to the action, in an infinite body of a concentrated force, and the second — the potential displacement vector and the temperature produced in an infinite thermoelastic body by the action of a concentrated source of heat. These sets of singular solutions are used to define the thermoelastic potential of a single, double and mixed layer and to obtain singular integral equations for the fundamental boundary-value problems. These equations have the form of coupled singular Fredholm equations of the second kind, the integrals involved being understood in the sense of principal values. In the last section of the paper the integral representation of the solution is made use of to obtain an approximate solution of three-dimensional problems of thermoelasticity using the canonical functional equations.

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
INSTYTUTU PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI PAN

Praca została złożona w Redakcji dnia 25 maja 1965 r.