

**Tomasz Szolc**

**ANALIZA DYNAMICZNA ZŁOŻONYCH,  
DYSKRETNO-CIĄGŁYCH  
UKŁADÓW MECHANICZNYCH**



INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI  
POLSKIEJ AKADEMII NAUK  
WARSZAWA 2003

ISSN 0208-5658

Redaktor Naczelny:

prof. dr hab. Józef Joachim Telega

Recenzent:

prof. dr hab. Wacław Szcześniak

Praca wpłynęła do Redakcji 10 lutego 2003 r.

**Praca habilitacyjna**

---

Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN

Nakład: 100 egz. Ark. Wyd. 12

Oddano do druku w marcu 2003 roku

---

Druk i oprawa: Poligrafia-Reklama, Warszawa, ul. Jana Kazimierza 35/37

## Spis treści:

<b>Wprowadzenie</b> .....	5
<b>1. Sposoby modelowania dynamicznego</b> .....	7
<b>2. Założenia modelowania dynamicznego z wykorzystaniem lepko-sprężystych makroelementów ciągłych</b> .....	14
2.1 Podstawowe założenia koncepcji lepko-sprężystych makroelementów ciągłych .....	17
2.2 Klasyfikacja lepko-sprężystych makroelementów ciągłych .....	20
2.3 Zastosowanie elementów o parametrach dyskretnych .....	26
2.4 Budowanie dyskretno-ciągłego modelu mechanicznego całego badanego obiektu .....	27
2.5 Uwagi dotyczące warunków początkowych ruchu opisanego dyskretno-ciągłymi modelami mechanicznymi .....	29
<b>3. Metodyka rozwiązywania problemu</b> .....	32
3.1 Rozwiązanie falowe typu d'Alemberta .....	32
3.2 Rozwiązanie metodą rozdzielenia zmiennych oraz metodą Fouriera .....	36
3.2.1 Zastosowanie metody rozdzielenia zmiennych do analizy drgań własnych .....	40
3.2.2 Zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera do analizy drgań wymuszonych .....	42
3.2.3 Wyznaczanie funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF) rozważanych układów .....	43
3.2.4 Uwagi dotyczące analizy stateczności badanego układu mechanicznego .....	44
<b>4. Zastosowanie rozwiązania falowego typu d'Alemberta</b> .....	45
<b>4.1 Zastosowanie rozwiązania falowego typu d'Alemberta do układów drgających skrętnie</b> .....	45
4.1.1 Analiza dynamiczna układów korbowych spaliniowych silników tłokowych .....	45
4.1.2 Zastosowanie rozwiązania falowego typu d'Alemberta do analizy drgań skrętnych układów napędowych maszyn i pojazdów .....	51
4.1.3 Zastosowanie rozwiązania falowego typu d'Alemberta do analizy drgań skrętnych wałów maszyn wirnikowych .....	68
4.1.4 Weryfikacja doświadczalna analizy drgań skrętnych przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego i rozwiązania falowego typu d'Alemberta .....	84
<b>4.2 Zastosowanie rozwiązania falowego typu d'Alemberta do badania układów strunowych drgających poprzecznie</b> .....	97
<b>5. Zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera</b> .....	110
<b>5.1 Zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera do badania układów strunowych drgających poprzecznie</b> .....	110
<b>5.2 Zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera do analizy aktywnie sterowanych drgań giętnych wywołanych obciążeniami ruchomymi</b> .....	115

<b>5.3 Zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera do analizy drgań giętnych i giętno-skrętnych wałów maszyn wirnikowych</b> .....	124
5.3.1 Analiza drgań giętnych układu linii wałów wirnikowych parowego turbogenerators energetycznego .....	125
5.3.2 Analiza drgań giętno-skrętnych układu wałów wirnikowych turbosprężarki parowej .....	133
5.3.3 Analiza drgań giętno-skrętnych przekładniowego układu napędu maszyny wirnikowej .....	141
<b>6. Zastosowanie modelowania dyskretno-ciągłego do analizy drgań układów jezdnych pojazdów szynowych</b> .....	146
<b>6.1 Założenia do dyskretno-ciągłych modeli mechanicznych układów jezdnych pojazdów szynowych i toru kolejowego</b> .....	147
<b>6.2 Opis ruchu dyskretno-ciągłego modelu układów jezdnych pojazdów szynowych i toru kolejowego</b> .....	154
6.2.1 Analiza drgań własnych .....	160
6.2.2 Analiza drgań wymuszonych .....	161
6.2.3 Wyznaczanie funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF) .....	162
<b>6.3 Weryfikacja parametrów dyskretno-ciągłego modelu układu jezdnych pojazdów szynowych i toru kolejowego</b> .....	162
6.3.1 Weryfikacja parametrów modelu zestawu kołowego .....	163
6.3.2 Weryfikacja parametrów modelu toru kolejowego .....	165
<b>6.4 Wyniki obliczeń otrzymane za pomocą dyskretno-ciągłych modeli układów wózek toczny - tor kolejowy</b> .....	168
6.4.1 Analiza drgań własnych .....	168
6.4.2 Wyznaczanie funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF) .....	178
6.4.3 Analiza drgań wymuszonych .....	180
<b>6.5 Weryfikacja doświadczalna uzyskanych za pomocą modelu dyskretno-ciągłego wyników symulacji dynamicznego oddziaływania wózka kolejowego z torem</b> .....	191
<b>6.6 Wyniki obliczeń otrzymane za pomocą dyskretno-ciągłego modelu układu wózek napędny - tor kolejowy</b> .....	203
6.6.1 Analiza drgań własnych .....	203
6.6.2 Analiza drgań wymuszonych .....	205
<b>7. Zakończenie</b> .....	215
7.1 Porównanie wyników analizy drgań własnych uzyskanych za pomocą jedno- i trójwymiarowego modelu wspornikowej belki wielostopniowej .....	215
7.2 Uwagi dotyczące oryginalnych elementów proponowanej metodyki oraz możliwości dalszego jej rozwijania .....	222
<b>Summary</b> .....	226
<b>Literatura</b> .....	228

## Wprowadzenie

Pod pojęciem układu mechanicznego rozumiemy najczęściej układ, zwany również mechanizmem, który pod wpływem dostarczonej energii wykonuje zamierzone ruchy przetwarzane w efekcie na pracę użyteczną. Typowym przykładem takich układów są wszelkiego rodzaju maszyny i pojazdy. Ich elementy robocze wykonują ruch przekazywany od źródła zasilania, na przykład silnika, do ostatniego elementu roboczego, tj. narzędzia roboczego, generatora prądu elektrycznego lub kół jezdnych. W celu zrealizowania funkcji zadanej maszynie lub pojazdowi konieczny jest ruch każdego jej elementu, zwany ruchem podstawowym. W rzeczywistości wskutek nieuchronnych odkształceń, zazwyczaj sprężystych, tych elementów oraz luzów w miejscach ich połączeń na ruch podstawowy nakładają się dodatkowe ruchy. Można je nazwać ruchami pasożytniczymi, gdyż nie są one zamierzone. Tak więc można stwierdzić, że rzeczywisty ruch każdego elementu roboczego maszyny lub pojazdu składa się z ruchu podstawowego i pasożytniczego, [132]. Maszyna jest na ogół układem o bardzo dużej liczbie stopni swobody skrępowanymi więzami sprężystymi o jednoczesnym występowaniu sił oporów oraz luzów. Analizując jedynie ruch podstawowy maszyny lub pojazdu, przy pominięciu luzów, odkształceń sprężystych oraz przy wykorzystaniu jedynie więzów geometrycznych opis jej ruchu można sprowadzić do co najwyżej kilku lub nawet do jednego stopnia swobody. Natomiast analiza ruchu pełnego lub tylko pasożytniczego jest zadaniem niezwykle skomplikowanym. Zazwyczaj jest ona przeprowadzana oddzielnie przy wykorzystaniu specyficznych własności ruchów pasożytniczych.

Ruchy pasożytnicze są zazwyczaj ruchami oscylującymi względem układu współrzędnych opisującego ruch podstawowy mając najczęściej charakter ruchów powtarzalnych, gdyż inaczej dochodziłoby do poważnych zaburzeń pracy maszyny w formie, na przykład utraty stateczności. Tak więc można stwierdzić, że ruchy pasożytnicze są drganiami. Drgania te mogą mieć charakter ustalony, nie zanikający w czasie, tj. o nie zmieniających się amplitudach. Obserwujemy wtedy drgania okresowe, pseudo-okresowe lub procesy chaotyczne. Ruch pasożytniczy maszyny lub pojazdu może mieć również charakter drgań przejściowych, czyli zanikających w czasie, wywoływanych na przykład krótkotrwałymi przeciążeniami, uderzeniami w połączeniach na skutek występujących w nich luzów, czy też nagłymi zmianami struktury badanego układu mechanicznego.

W celu zapewnienia należytej wytrzymałości, precyzji ruchu oraz możliwie niskiej hałaśliwości pracy większość elementów maszyn jest projektowana jako maksymalnie sztywne, tj. charakteryzujące się jak najmniejszą podatnością. Cechuje to przede wszystkim takie elementy jak: wały, osie, koła zębate, prowadnice, korpusy, obudowy łożysk, wirniki i inne. Nie dotyczy to rzecz jasna elementów z założenia podatnych takich jak sprzęgła podatne, elementy zawieszenia pojazdów (tzw. resorowanie), czy elementy wibroizolacyjne. Dzięki wspomnianej powyżej stosunkowo dużej sztywności podstawowych elementów roboczych maszyny ich ruchy pasożytnicze podczas normalnej pracy charakteryzują się tzw. małymi przemieszczeniami, [74, 201]. Ponadto, obciążenia podstawowych elementów maszyny wywołują naprężenia nie przekraczające zakresu sprężystego, czyli zakresu stosowalności prawa Hooke'a, co wiąże się z ich tzw. małymi odkształceniami. Drgania mechaniczne charakteryzujące się małymi przemieszczeniami i małymi odkształceniami określane są mianem „małych drgań”, [49, 74, 92, 201]. Analizy małych drgań elementów maszyn i pojazdów dokonuje się stosując specyficzny sposób ich modelowania – w tym przypadku modelowania dynamicznego – pozwalającego na dokonywanie w wielu przypadkach odpowiednich uproszczeń i linearyzacji korzystnych dla przejrzystości przyjmowanego w efekcie modelu mechanicznego i matematycznego oraz

zmniejszających czasochłonność i koszt wykonywanych obliczeń bez znaczącego wpływu na dokładność otrzymywanych wyników. Ruch pasożytniczy maszyny, czyli „małe drgania” można często analizować niezależnie od ruchów podstawowych. Jednak w przypadkach gdy ruchy pasożytnicze istotnie wpływają bądź mogą wpływać na ruch podstawowy – obydwa procesy należy wówczas rozpatrywać jednocześnie.

Założenia linearyzacyjne w przypadku drgających części maszyn można stosować jedynie do elementów konstrukcyjnych ulegających małym odkształceniom sprężystym, takich jak: wały, osie, belki, wsporniki, prowadnice, korpusy, koła zębate, a także w przypadku elementów zawieszonych, tj. sprężyn i resorów o charakterystykach, które z dostatecznym do celów technicznych przybliżeniem można uznać za liniowe. Elementy maszyn i układów jezdnych pojazdów rzadko ulegają odkształceniom plastycznym, a odkształcenia plastyczne lokalne występujące miejscowo na ich powierzchniach, na przykład wskutek działania koncentracji naprężeń wywoływanych karbami, bądź efektami kontaktowymi mają zwykle pomijalny wpływ na proces drgań. W związku z tym można tu zaniebysać nieliniowości typu fizycznego. W przeciwieństwie do konstrukcji budowlanych, elementy maszyn rzadko ulegają dużym przemieszczeniom, jak na przykład konstrukcje mostowe, maszty, anteny i inne, gdyż nie pozwalają na to ściśle wymogi dotyczące precyzji ich ruchu. Dzięki temu podczas modelowania dynamicznego unikamy zazwyczaj nieliniowości typu geometrycznego. Natomiast w maszynach i układach jezdnych pojazdów występują elementy o charakterystykach nieliniowych lub nawet silnie nieliniowych, a więc nieciągłych bądź „niegładkich”. Spowodowane jest to własnościami połączeń elementów podstawowych o nieliniowych charakterystykach lepko-bezwładnościowo-sprężystych i kinematycznych, czyli wszelkiego rodzaju przegubów, sprzęgieł podatnych i ciernych, łożysk ślizgowych, toczyń i magnetycznych, ząbów przekładni zębatach, przekładni i sprzęgieł hydrokinetycznych, oraz kinematyką mechanizmów korbowych silników spalinowych i pomp tłokowych, efektami kontaktowymi, na przykład kół jezdnych z podłożem (torem), i wieloma innymi czynnikami. Biorąc pod uwagę struktury rzeczywistych układów mechanicznych oraz proporcje wymiarowe ich części wykonujących drgania, wymienione powyżej elementy będące przyczyną nieliniowości mają zazwyczaj stosunkowo małą objętość oraz charakter działania zlokalizowany w określonych fragmentach tych układów, tj. w przekrojach elementów o dużych gabarytach i rozłożonej masie, na przykład wałów, osi, korpusów, prowadnic, ram nośnych i innych. Dlatego występujące w taki sposób w układach mechanicznych i konstrukcjach przyczyny nieliniowości najczęściej nazywamy nieliniowościami lub silnymi nieliniowościami typu lokalnego. Ich wpływ na zachowania dynamiczne zazwyczaj niezwykle istotny i dlatego obecnie w analizie dynamicznej maszyn, pojazdów i konstrukcji nieliniowości typu lokalnego muszą być uwzględniane w modelach mechanicznych.

Do powszechnie spotykanych rodzajów drgań odpowiedzialnych części maszyn i układów jezdnych pojazdów należą drgania giętne, skrętne, osiowe i translacyjne takich elementów jak: wały, osie, koła zębate, koła jezdne, belki, prowadnice, wirniki, wieńce łopatkowe i inne. W zależności od konkretnych rozwiązań konstrukcyjnych, kształtów geometrycznych i proporcji wymiarowych elementów badanego urządzenia drgania te mogą w mniejszym lub większym stopniu być wzajemnie ze sobą sprzężone. Dotyczy to przede wszystkim układów napędowych wielu maszyn i pojazdów, w tym również napędów okrętowych i lotniczych, układów korbowych spalinowych silników tłokowych, maszyn wirnikowych takich jak turbogeneratory, sprężarki, pompy, turbiny gazowe, dmuchawy i inne, a także prowadnic i manipulatorów robotów przemysłowych oraz układów jezdnych pojazdów drogowych i szynowych, w tym drgania giętno-skrętne-osiove ich zestawów kołowych. Szeroką klasę stanowią również wszelkiego rodzaju drgania korpusów maszyn i karoserii pojazdów, lecz te ze względu na swoją odrębną specyfikę nie będą one przedmiotem rozważań w niniejszej pracy.

## 1. Sposoby modelowania dynamicznego

Analizę małych drgań giętnych, skrętnych i osiowych wymienionych powyżej układów napędowych maszyn i pojazdów oraz sprzężonych z nimi drgań, na przykład translacyjnych, innych elementów, takich jak zawieszenia czy podparcia łożyskowe, przeprowadzano od wielu lat za pomocą modeli dyskretnych, których ruch jest opisywany liniowymi bądź nieliniowymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi, [44, 61, 68, 70, 98, 145]. Zaletą tych modeli jest łatwość wykonywania obliczeń ze względu na stosunkowo dobrą znajomość metod rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych, istniejące metody ich badań jakościowych oraz ze względu na wypracowane do tych celów i powszechnie dostępne oprogramowanie komputerowe w postaci odpowiednich pakietów programów typu MATLAB, MATHEMATICA, MAPLE, ADAMS i inne. Jednak wspomniana łatwość wykonywania obliczeń dotyczy jedynie modeli dyskretnych o stosunkowo niedużej liczbie stopni swobody, tj. nie przekraczającej kilkunastu, dwudziestu kilku czy co najwyżej kilkudziesięciu, [14, 44, 61, 68, 95, 116, 127]. Modelowanie dyskretne wydaje się być szczególnie adekwatne do układów mechanicznych, w jakich można wyróżnić elementy, których odkształcenia dynamiczne w badanym zakresie częstości są pomijalne i dzięki temu elementy te zastępowane są bryłami sztywnymi. Ponadto, elementy te są wzajemnie ze sobą połączone za pomocą różnego rodzaju łączników, sprężyn, przegubów i innych charakteryzujących się stosunkowo małą masą. Dzięki temu wzajemne połączenia tych brył są reprezentowane zazwyczaj bezmasowymi elementami sprężysto-tłumiącymi. Tego typu podejście jest stosowane często do analizy drgań pojazdów drogowych i szynowych przeprowadzanej zwykle w granicach niskich częstotliwości, tj. od zera do kilkunastu Hertzów, [45, 145]. Wówczas, otrzymywana jest zazwyczaj dostateczna do celów technicznych dokładność uzyskiwanych wyników przy zadowalającej efektywności obliczeniowej. Natomiast modelowanie dyskretne układów mechanicznych wydaje się być kłopotliwe, gdy rzeczywiste struktury tych układów nie pozwalają na naturalne wyróżnienie fragmentów zastępowanych bryłami sztywnymi i bezmasowymi elementami sprężysto-tłumiącymi. Dotyczy to przede wszystkim ciężkich i długich wałów, osi, belek i innych, których dyskretyzacja napotyka na trudności w identyfikacji wartości otrzymywanych mas skupionych, sztywności i współczynników tłumienia oraz prowadzi do dużej liczby stopni swobody.

Dlatego naturalną alternatywą modelowania dyskretnego układów mechanicznych jest modelowanie ciągłe. Ze względu na fakt ciągłej makrostruktury rzeczywistych elementów maszyn i pojazdów modelowanie ciągłe wydaje się być podejściem bardziej naturalnym i dokładnym. Ruch modeli ciągłych jest opisywany cząstkowymi równaniami różniczkowymi lub równaniami całkowitymi, których rozwiązywanie nawet w przypadku modeli jednowymiarowych jest znacznie trudniejsze niż równań różniczkowych zwyczajnych, a niekiedy wręcz niemożliwe. W związku z tym, upraszcza się strukturę modelu ciągłego, na przykład przez uproszczenie kształtu geometrycznego jego głównych elementów (tj. w tym przypadku belek lub wałów) w celu uzyskania stałości ich przekrojów poprzecznych, bądź tzw. słabej ich zmienności, oraz przez „uciąglenie” różnego rodzaju niejednorodności struktury badanego obiektu, tzn. punktowych podparć, skupionych obciążeń czy występowania mas skupionych reprezentujących tarcze, wirniki, koła zębate, zamachowe i inne. Tego typu uproszczenia pozwalają wówczas opisać ruch rozpatrywanego modelu ciągłego za pomocą jednego, najczęściej liniowego równania różniczkowego cząstkowego o znanej postaci rozwiązania przy tzw. prostych warunkach brzegowych, [49, 60, 74, 193]. Za pomocą tego typu podejścia, aczkolwiek ścisłego pod względem rozwiązania matematycznego, nie można rozpatrywać układów rzeczywistych osiągając jednocześnie należytą do celów technicznych dokładność wyników obliczeń. Natomiast możliwe jest przeprowadzanie badań jakościowych dotyczących istoty samego zjawiska, których wyniki liczbowe należy traktować jedynie jako zgrubne przybliżenie. Wielu autorów uwzględni wspomniane powyżej obciążenia skupione, skokowe zmiany kształtu geometrycznego badanego

obiektu, punktowe podparcia, niejednorodności struktury, na przykład w postaci brył sztywnych, opisując ich występowanie w równaniu ruchu w postaci dodatkowych członów mnożonych przez odpowiednie funkcje Heaviside'a lub dystrybucje Dirac'a, [3, 78, 101]. Prowadzi to zwykle do skomplikowanej postaci cząstkowego równania różniczkowego ruchu modelu ciągłego, przez co równanie to można rozwiązywać w sposób przybliżony, tj. numerycznie, bądź za pomocą znanych metod Ritz'a, Galerkina, Rayleigh'a, czy Treftz'a [74, 113] lub też stosując skomplikowane rozwiązania analityczne w formie operatorowej, [3, 78, 101]. W związku z powyższym, dynamiczne modelowanie ciągłe układów mechanicznych stosowane dotychczas na skutek naturalnych trudności rozwiązywania matematycznego, czy konieczności dokonywania niezbędnych uproszczeń kosztem utraty dokładności i wiarygodności uzyskiwanych wyników obliczeń nie znalazło powszechnego zastosowania w praktyce technicznej, a służy ono zazwyczaj jedynie do studiowania problemów akademickich.

Szybki rozwój technik komputerowych umożliwił opracowanie i stosowanie metod dyskretyzacji układów ciągłych o złożonej strukturze i bardzo skomplikowanych kształtach geometrycznych, dzięki którym ruch modelu wstępnie ciągłego ze stosunkowo wysoką dokładnością identyfikacji parametrów jest opisany układem równań różniczkowych zwyczajnych. Powszechnie stosowaną tego typu metodą jest metoda elementów skończonych (MES), [13, 85, 86, 92, 202]. Oprócz niej stosowane są również inne metody, jak na przykład metoda elementów brzegowych (MEB), [17], czy metoda elementów czasoprzestrzennych (MECz), [4-7, 79]. Metoda elementów skończonych ze względu na swoją przejrzystość i racjonalność sformułowania matematycznego oraz niezwykle szerokie możliwości zastosowań praktycznych stała się obecnie bardzo popularną i cieszącą się największą wiarygodnością metodą modelowania i przeprowadzania obliczeń w wielu dziedzinach. MES wykorzystuje się nie tylko do rozwiązywania zagadnień statycznych, [13, 202], i dynamicznych mechaniki konstrukcji i układów mechanicznych, [92, 113, 153-158, 199, 202], lecz również w mechanice płynów, [8, 11, 202], analizie i symulacji procesów obróbki plastycznej, [87, 155-157, 165], modelowaniu organów ludzkich, [88, 89, 107, 147, 158], dwu- i trójwymiarowych zagadnieniach kontaktowych, [87, 158, 165], problemach optymalizacji opartej na ścisłych metodach analizy wrażliwości, [87, 166], i w wielu innych. Mimo niezaprzeczalnych zalet, dzięki którym góruje nad innymi metodami, MES ma również istotne wady. Metoda ta z założenia jako przybliżona nie opisuje odkształceń i przemieszczeń badanego układu rzeczywistego ściśle, tj. według określonej teorii odkształceń czy równania konstytutywnego, lecz w sposób przybliżony, gdzie stopień dokładności zależy od gęstości przyjętej siatki dyskretyzacji, a tym samym od uzyskanej w efekcie liczby stopni swobody. Nawet w przypadku modeli dynamicznych, jednowymiarowych służących do analizy drgań giętych, skrętnych i osiowych elementów maszyn i pojazdów liczba stopni swobody przy należytej wiernej reprezentacji rzeczywistej struktury badanego obiektu jest zwykle rzędu kilkuset, a niekiedy nawet przekracza tysiąc, na przykład w przypadku modelowania linii wałów turbogeneratorów energetycznych, [199]. Natomiast w przypadku modeli dwu- i trójwymiarowych liczba stopni swobody może nawet dochodzić do setek tysięcy. Dla dynamicznych modeli liniowych duża liczba stopni swobody nie stanowi tak dużego problemu, ponieważ istniejące znane metody transformacji układów równań różniczkowych zwyczajnych do współrzędnych modalnych prowadzą do ich rozsprzężenia, co znacząco skraca czas ich numerycznego rozwiązywania. W rzeczywistości jednak w przypadku maszyn i pojazdów spotykamy liczne nieliniowości, na przykład typu lokalnego, opisane za pomocą nieliniowych równań różniczkowych ruchu. Wówczas otrzymany układ równań różniczkowych zwyczajnych opisujący ruch całego badanego obiektu nie daje się transformować, a całkowanie numeryczne stu kilkudziesięciu, czy kilkuset nieliniowych, sprzężonych równań różniczkowych z wymaganą dokładnością stanowi pokaźny wysiłek obliczeniowy nawet dla najnowszych generacji komputerów typu „work-station”. W związku z powyższym, w celu uniknięcia konieczności całkowania numerycznego tak dużej liczby równań stosuje się redukcję liczby stopni swobody wyjściowego modelu MES do kilkunastu lub nawet kilku, w zależności od



wymaganej dokładności przeprowadzanych obliczeń, interesującego badacza zakresu częstości drgań i innych czynników. Do najczęściej stosowanych metod redukcji liczby stopni swobody używanych do analizy dynamicznej układów mechanicznych należą metoda kondensacji statycznej, [92, 126], metoda syntezy modalnej, [126], metoda redukcji Ritz'a i metoda podprzestrzennych iteracji, [92]. Należy podkreślić, że ponieważ redukcja liczby stopni swobody stanowi naturalne uproszczenie wyjściowego modelu MES badanego obiektu, wszelkie metody redukcji są więc metodami przybliżonymi i stosowanie ich jest zawsze przyczyną powstawania mniejszych lub większych błędów. Ponadto, nie istnieją w tych metodach jednoznaczne i ogólne kryteria dokonywania takich uproszczeń. Na przykład w przypadku metody kondensacji statycznej nie można wskazać *a priori* tych stopni swobody, które należy wyeliminować, i należy wtedy odwoływać się do zdobytego uprzednio doświadczenia [92, 126]. Podobnie, w przypadku metody syntezy modalnej dobór jak i wyznaczanie branych pod uwagę tzw. więzowych i wewnętrznych modów drgań przeprowadzane jest w sposób subiektywny kierując się wycuciem i doświadczeniem uzyskanym na podstawie badania obiektów podobnych, [126]. W związku z powyższym, proces redukcji i jego konsekwencje, tzn. dokładność, zależą istotnie od subiektywnego przyjęcia przez badacza pewnych założeń wyjściowych dotyczących modelu wstępnego, tj. modelu MES o dużej liczbie stopni swobody, co w efekcie zawsze prowadzi do błędów obliczeniowych od stosunkowo niewielkich do niezwykle poważnych, [126]. Przez to w wyniku końcowym traci się oczekiwaną dokładność wyników otrzymywanych za pomocą MES, a ponadto pojawia się niebezpieczeństwo uzyskiwania tzw. źle uwarunkowanych numerycznie układów równań ruchu, co niweluje przewagę tej metody nad innymi.

Jedną z form modyfikacji metody elementów skończonych jest zastępowanie aproksymacji międzywęzłowych przemieszczeń i odkształceń pojedynczego elementu funkcjami analitycznymi uzyskiwanymi drogą ścisłego rozwiązywania cząstkowych równań różniczkowych ruchu tego elementu traktowanego wstępnie jako ciągły i wyodrębniony. Dalszy tok postępowania metody, tj. wyznaczanie lokalnych macierzy sztywności, bezwładności i tłumienia, jest identyczny jak w klasycznym sformułowaniu MES. Jednym z tego typu podejść jest tzw. metoda sztywności dynamicznej zastosowana m.in. w [12, 62, 102-104, 106]. Wykorzystując tą metodę ruch fragmentów rzeczywistego obiektu o stosunkowo prostych kształtach geometrycznych, na przykład stałym przekroju poprzecznym, daje się opisać równaniem różniczkowym cząstkowym o znanym rozwiązaniu analitycznym, tj. równaniem drgań belki Timoshenki, równaniem drgań skrętnych wału lub innym. Wówczas, nie ma konieczności zagęszczania siatki dyskretyzacji ze względu na ciągłe rozłożenie masy, dzięki czemu modyfikacja tego rodzaju pozwala na częściowe zmniejszenie liczby stopni swobody modelu mechanicznego jak również na pewne zwiększenie dokładności obliczeń. W pracach [12, 62, 102, 106] użyto metody sztywności dynamicznej do rozwiązywania problemów liniowych. Natomiast w [103, 104] wykorzystano ją do analizy drgań belek z nieliniowościami typu geometrycznego.

Pewną modyfikacją metody elementów skończonych jest metoda elementów czasoprzestrzennych (MECz) opisana m.in. w [4-7, 79], która może mieć podobne zastosowania jak MES. W metodzie elementów czasoprzestrzennych dyskretyzacja wyjściowego modelu ciągłego badanego obiektu przebiega analogicznie jak w przypadku MES, gdzie pole przemieszczeń międzywęzłowych jest aproksymowane zadanymi funkcjami analitycznymi, najczęściej wielomianami, dobór których zależy od zadanej, przyjętej do badań teorii, na przykład zginania belek, rodzaju przepływu cieczy, czy równania konstytutywnego odkształcanego materiału. W MECz oprócz dyskretyzacji przestrzennej badanego obiektu, dokonuje się również dyskretyzacji w czasie, gdzie przebiegi między kolejnymi chwilami czasu aproksymowane są również zadanymi funkcjami analitycznymi, podobnie jak rozkłady przemieszczeń międzywęzłowych. Zazwyczaj stosowane są tu wielomiany pierwszego rzędu, czyli zakłada się odcinkami liniowe przebiegi czasu między kolejnymi rejestrowanymi chwilami. Prowadzi to w wyniku do układów algebraicznych a

nie różniczkowych zwyczajnych równań ruchu, jak w przypadku MES. Ułatwia to z jednej strony procesy symulacji ruchu dokonywane za pomocą MECz, lecz nie unika się problemów dużej liczby stopni swobody, dokładności aproksymacji w przestrzeni i w czasie, a więc kwestii dokładności i stabilności numerycznej. W związku z powyższym, z punktu widzenia samej efektywności obliczeniowej zalety MECz w stosunku do MES są raczej niewielkie i dlatego metoda ta jest wykorzystywana zazwyczaj do rozwiązywania problemów, w przypadku których zastosowanie metody elementów skończonych jest kłopotliwe, tj. przy badaniu układów o zmieniających się w sposób ciągły strukturze i wymagających przez to adaptacji na bieżąco siatki dyskretyzacji, do symulacji procesów falowych i plastycznych, zagadnień kontaktu tocznego i innych, [4-7]. Natomiast poza nielicznymi przypadkami, na przykład w pracy [41, 143], w zagadnieniach dynamiki maszyn metoda elementów czasoprzestrzennych stosowana jest raczej rzadko.

Wspomniana powyżej metoda elementów brzegowych (MEB) jest stosowana głównie do badania ruchu powierzchni elementów konstrukcji traktowanych jako płyty, powłoki, membrany i belki, powierzchni elementów maszyn i pojazdów, na przykład korpusów, łopatek turbinowych czy karoserii, oraz powierzchni gruntu często oddziaływującego z fundamentami budowli, [17]. Wykorzystuje się ją zwykle do dwu- i trójwymiarowych modeli mechanicznych, przy czym w przeciwieństwie do FEM dyskretyzacji podlega jedynie powierzchnia badanego obiektu, co prowadzi do znacznego uproszczenia obliczeń przy zachowaniu należytej dokładności otrzymywanych wyników nawet przy skomplikowanych kształtach geometrycznych i imperfekcjach powierzchni, lepko-sprężystych własności podłoża, tzn. materiału, jego niejednorodności, anizotropii czy porowatości. Przedmiotem badań przeprowadzanych przy wykorzystaniu MEB jest analiza drgań powierzchni, w tym detekcja pęknięć i śledzenie ich rozprzestrzeniania się, badanie propagacji fal powierzchniowych i inne. Do będących przedmiotem pracy zagadnień drgań belek, osi i wałów badanych za pomocą modeli jednowymiarowych, jak wynika z literatury, na przykład z pracy [17], MEB traci swoją przewagę nad MES, dając w przypadku modeli mechanicznych o zbliżonej złożoności podobne wyniki obliczeń.

W celu uniknięcia niedogodności towarzyszących wykorzystywaniu wymienionym powyżej trzem metodom komputerowym, tj. MES, MECz i MEB, do analizy dynamicznej wybranych układów mechanicznych i konstrukcji od wielu lat stosuje się hybrydową technikę modelowania polegającą na reprezentowaniu wybranych fragmentów badanego obiektu rzeczywistego za pomocą elementów o parametrach rozłożonych w sposób ciągły, a innych części za pomocą elementów o parametrach dyskretnych, oraz na wzajemnym ich łączeniu zgodnie ze strukturą tego obiektu. Taki sposób modelowania nazywany dyskretno-ciągłym jest stosowany od wielu lat przez licznych autorów, na przykład [41, 60, 76, 77, 83, 117, 118, 120-122, 129, 139-143, 198, 199]. Wykorzystywany jest on zazwyczaj w przypadku analizy dynamicznej konstrukcji mostowych, prowadnic robotów przemysłowych, układów napędowych maszyn i pojazdów, wirujących wałów podpartych na łożyskach, torów kolei konwencjonalnej i magnetycznej i wielu innych układach mechanicznych. Wówczas najczęściej są przyjmowane jednowymiarowe modele tych obiektów w formie belek, prętów, wałów i strun. Ze względu na fakt, iż ruch przekrojów poprzecznych elementów o parametrach rozłożonych w sposób ciągły opisywany jest równaniami różniczkowymi cząstkowymi lub równaniami całkowitymi, które są sprzężone z równaniami różniczkowymi zwyczajnymi ruchu elementów o parametrach dyskretnych, zazwyczaj w przypadku takich modeli stosowane są analityczne metody rozwiązania w postaci fal stojących, gdzie przyjmowana jest czysto drganiowa interpretacja zjawiska, lub typowe podejście falowe, przy którym drgania rozpatrywane są w postaci nakładających się na siebie fal bieżących i odbitych. Podejście drganiowe oparte na rozwiązaniu metodą rozdzielania zmiennych i wykorzystaniu własności ortogonalności funkcji i wektorów własnych stosowano m. in. w pracach [76, 77, 129] w przypadku prostych układów liniowych składających się z jednorodnej belki ciągłej i sprzężonych z nią oscylatorów o parametrach dyskretnych, gdzie analizę ograniczono do badania drgań swobodnych

przy zadanych warunkach początkowych. W pracach [3, 109] za pomocą liniowych modeli dyskretno-ciągłych badano drgania skłębne linii wałów turbogeneratora energetycznego sprężonych z giętno-skłębnymi drganiami łopatek wylotowych wirników niskiego ciśnienia. W obu przypadkach prac równania różniczkowe cząstkowe i zwyczajne ruchu sprowadzono do wspólnego układu równań operatorowych i wykorzystując metodę rozdzielania zmiennych oraz własności ortogonalności funkcji i wektorów własnych badano drgania własne oraz wymuszone drgania przejściowe wywoływane zwarciami elektrycznymi w generatorze prądu. W pracach [100, 101] zastosowano liniowy, dyskretno-ciągły model maszyny wirnikowej do analizy drgań giętnych wałów podpartych na izotropowych i anizotropowych łożyskach. Ze względu na niesamosprężoność operatora sprężystego w równaniu ruchu wirującej belki Rayleigha i warunkach brzegowych opisujących oddziaływanie podpór łożyskowych, w rozwiązaniu matematycznym takie wielkości jak przemieszczenia przekrojów poprzecznych wału, kąty ich ugięcia oraz siły tnące i momenty gnące wygodnie było przyjąć w postaci współrzędnych stanu, tak by równanie ruchu całego układu wraz z warunkami brzegowymi móc sprowadzić do układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu w postaci normalnej Gaussa, [60]. Stosując rozwiązanie Fouriera we współrzędnych stanu układ ten rozwiązywano następnie metodą analizy modalnej.

We wszystkich wymienionych powyżej pracach zastosowano podejście drganiowe przy rozwiązywaniu równań różniczkowych cząstkowych. Natomiast typowo falową interpretację drgań modeli dyskretno-ciągłych przyjęto w pracach [118, 120-122, 139, 140] do analizy skłębnych drgań wałów, drgań wzdłużnych (osiowych) układów prętowych, [139], oraz drgań poprzecznych elementów budowli traktowanych jako układy belkowe poddawane efektom czystego ścinania, [141]. W tych pracach przyjęto hiperboliczne równania ruchu typu falowego jako równania opisujące propagację fal skłębnych, wzdłużnych i fal ścinania w elementach sprężystych modeli o parametrach rozłożonych w sposób ciągły. Zastosowano przy tym rozwiązania typu d'Alemberta tożsamościowo spełniające równania ruchu, gdzie funkcje opisujące propagację fal padających i odbitych wyznaczane są równaniami warunków brzegowych. We wszystkich cytowanych powyżej pracach autorstwa Nadolskiego i Pielorz elementy o parametrach rozłożonych w sposób ciągły, z których zbudowane są ich modele mechaniczne, mają skończone długości. Nieskończone długości mają natomiast belki w dyskretno-ciągłych modelach toru kolei konwencjonalnej i magnetycznej przyjęte w pracach [35, 93, 94] jako struktury podparte periodycznie, odpowiednio na podkładach lub filarach traktowanych jako elementy o parametrach dyskretnych. W tym przypadku uzyskano rozwiązanie analityczne w postaci fal bieżących cząstkowego równania różniczkowego ruchu nieskończonej długiej belki Bernoulli'ego-Eulera lub Timoshenki obciążonej siłą skupioną o stałej lub harmonicznie zmiennej wartości poruszającej się wzdłuż toru ze stałą prędkością. Założono w tych pracach, że periodyczność rozwiązania wzdłuż belki może być związana z okresowością jej podparcia podobnie jak w przypadku drgań siatek krystalicznych, [93, 94].

Liczba prac poświęconych zagadnieniom modelowania dyskretno-ciągłego układów mechanicznych i konstrukcji jest tak duża, że nie sposób cytować ich wszystkich. Przedstawiono więc jedynie podejścia najbardziej charakterystyczne. Należy zwrócić uwagę na fakt, że większość z nich dotyczy modeli liniowych, a analizę dynamiczną skoncentrowano raczej na badaniach jakościowych zjawiska drgań czy propagacji fal, bardziej z punktu widzenia problemów akademickich aniżeli względów aplikacyjnych.

Do analizy modeli dyskretno-ciągłych i ciągłych układów mechanicznych i konstrukcji opracowano również komputerową metodę do analizy drgań swobodnych i wymuszonych zwaną metodą macierzy przeniesienia (MMP). Specyficzną cechą tej metody jest tzw. numeryczna dyskretyzacja elementów o parametrach rozłożonych w sposób ciągły w przeciwieństwie do dyskretyzacji fizycznej stosowanej w metodzie elementów skończonych i metodzie elementów czasoprzestrzennych. Polega to na myślowym podziale elementów o parametrach rozłożonych na

podelementy połączone tzw. przekrojami węzłowymi, gdzie wielkościami niewiadomymi w każdym z nich są przemieszczenia, kąty obrotu, siły i momenty. Wzajemne zależności pomiędzy wartościami każdej z wymienionych wielkości w kolejnych przekrojach węzłowych są wyznaczone w formie odpowiednich macierzy na podstawie związków czysto analitycznych, tj. wyjściowych równań różniczkowych cząstkowych ruchu, [60, 137, 199]. Metoda ta jest stosowana w dynamice konstrukcji, [19, 36, 39, 64], układów napędowych oraz w dynamice maszyn wirnikowych, [1, 71, 126, 198, 199], jako jedno z podstawowych narzędzi do rutynowych obliczeń w procesie konstruowania. Przy wykorzystaniu dobrze zidentyfikowanego dyskretno-ciągłego lub ciągłego modelu mechanicznego badanego obiektu za pomocą MMP można uzyskiwać zadowalające do celów technicznych wyniki, gdyż w przeciwieństwie do MES czy MECz, metoda macierzy przeniesienia jest metodą ścisłą. Niemniej jednak, metoda ta ma istotne ograniczenia w stosunku do możliwości MES albo nawet klasycznego modelowania dyskretnego. Za pomocą MMP w sformułowaniu klasycznym można rozpatrywać jedynie układy liniowe, a obliczenia sprowadzać do analizy drgań własnych, symulacji wymuszonych drgań ustalonych, [60, 126, 198, 199], oraz do analizy stateczności, na przykład w pracy [19, 36, 39]. Mimo poczynionych wielu modyfikacji do MMP, na przykład w pracach dotyczących dynamiki maszyn wirnikowych [198, 199], ograniczenia te są raczej trudne do pokonania. Mimo to metoda macierzy przeniesienia jest często z powodzeniem wykorzystywana w praktyce inżynierskiej przynajmniej do obliczeń wstępnych.

Przy omawianiu metod analizy drgań modeli ciągłych i dyskretno-ciągłych należy również wspomnieć o powszechnie stosowanym w nich sposobie rozwiązywania w postaci tzw. metod przybliżonych. Do najważniejszych z nich należą metoda Ritz'a, Galerkina, Trefftz'a i Rayleigh'a opisane m. in. w [74, 113]. Mimo udowodnionej matematycznej poprawności sformułowania, za pomocą tych metod można badać drgania swobodne i wymuszone w sposób z założenia przybliżony, tzn. z przewidzianymi błędami, zwykle obejmując jedynie co najwyżej kilka najniższych postaci drgań własnych rozpatrywanego obiektu i opierając się przy tym na wycuciu bądź znajomości zachowań dynamicznych układów podobnych lub o prostszej strukturze. Z tego względu, metody te są wykorzystywane zazwyczaj do wstępnych oszacowań zgrubnych albo do badań jakościowych, a obserwowany szybki rozwój algorytmów i oprogramowania w przypadku wymienionych powyżej metod komputerowych, tzn. MES, MECz, MEB i MMP, przyczynia się do stopniowej utraty popularności metod przybliżonych. Należy jednak podkreślić, że założenia i sposób rozwiązania połączonej metody Rayleigh'a-Ritz'a stanowią podstawę do sformułowania matematycznego metody elementów skończonych, [113].

Z przedstawionego możliwie skrótowo porównania różnych sposobów modelowania dynamicznego układów mechanicznych wynika, że każde wspomniane podejście ma swoje zalety i wady. Jak nadmieniono powyżej, największą popularnością cieszy się obecnie metoda elementów skończonych, która w przypadku analizy drgań elementów o skomplikowanym kształcie geometrycznym, na przykład korpusów maszyn, karoserii pojazdów, kadłubów samolotów i innych, jest metodą praktycznie niezastąpioną mimo cechujących ją wymienionych wcześniej mankamentów. Inaczej natomiast wygląda problem modelowania dynamicznego układów napędowych maszyn i pojazdów, maszyn wirnikowych, wybranych typów robotów przemysłowych itp., w których podstawowe elementy drgające takie jak wały, osie, belki, prowadnice, wirniki, czy tarcze kół, charakteryzują się stosunkowo prostymi kształtami geometrycznymi, a typowe i najbardziej dla nich niebezpieczne drgania giętne, skrętne i osiowe można w interesujących z punktu widzenia zastosowań technicznych przedziałach częstości z powodzeniem analizować za pomocą modeli jednowymiarowych. W tych przypadkach metoda elementów skończonych również wydaje się być jak dotąd najbardziej odpowiednią w porównaniu z innymi, lecz charakteryzując ją mankamenty wykazują potrzebę opracowania innej metody do analizy dynamicznej wymienionych układów mechanicznych, która z jednej strony zapewniłaby taką samą lub nawet większą dokładność otrzymywanych wyników obliczeń, a z drugiej strony pozwoliłaby na uniknięcie wad

typowych dla MES. Wyszczególniony zakres jej ewentualnych zastosowań jest na tyle szeroki, że opracowanie specjalnej do niego alternatywnej metodyki wydaje się być racjonalnie uzasadnione. Stanowi to przedmiot i cel niniejszej pracy.

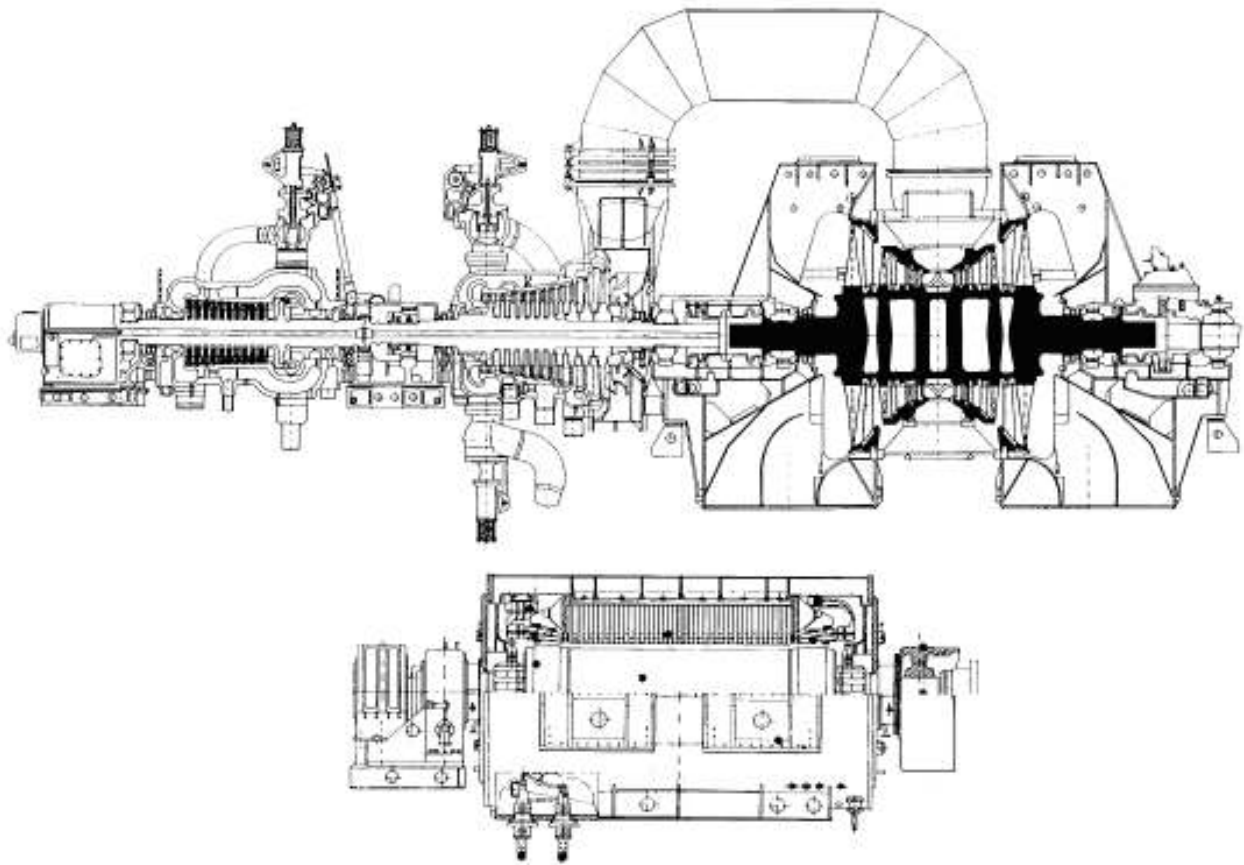
**W związku z powyższym, cel i zakres pracy przedstawiają się następująco:**

1. Opracowanie metodyki modelowania i analizy dynamicznej wybranych układów mechanicznych opartej na dykretno-ciągłych strukturalnych modelach fizycznych. Modele te mają następujące cechy:
  - Składają się z lepko-sprężystych makroelementów ciągłych oraz lepko-bezwładnościowo-sprężystych oscylatorów o parametrach dyskretnych połączonych wzajemnie zgodnie ze strukturą badanego obiektu.
  - Ruch tych modeli jest opisany analitycznymi związkami matematycznymi, gdzie operacje typowo numeryczne sprowadzają się jedynie do bezpośredniego całkowania liniowych, nieliniowych bądź parametrycznych równań różniczkowych zwyczajnych otrzymanych w wyniku zastosowania analitycznych rozwiązań cząstkowych różniczkowych równań ruchu.
  - W porównaniu z modelami dyskretno-ciągłymi układów mechanicznych i konstrukcji wspomnianymi powyżej, metoda proponowana w pracy ma pozwolić na budowanie modeli strukturalnych o dużym stopniu złożoności z możliwie dokładnym uwzględnianiem kształtu geometrycznego ich elementów odkształcalnych wraz szeroką klasą warunków podparcia tych elementów, dostatecznie realistycznym z punktu widzenia zastosowań technicznych opisem ich połączeń z innymi elementami i oddziaływania z otoczeniem.
  - W przeciwieństwie do większości modeli dyskretno-ciągłych stosowanych dotychczas przez innych autorów, modele przyjmowane w niniejszej pracy umożliwiają badanie drgań nieliniowych i parametrycznych. Dlatego, mogą być one wykorzystywane nie tylko do studiowania problemów akademickich, ale przede wszystkim do celów technicznych w środowiskach inżynierskich jako wygodne narzędzia obliczeniowe o wiarygodności nie mniejszej niż na przykład analogiczne jednowymiarowe modele zbudowane metodą elementów skończonych, lecz o większej lub nawet znacznie większej efektywności numerycznej.
2. Dokonanie przy wykorzystaniu zaproponowanej metodyki analizy dynamicznej wybranych układów mechanicznych, takich jak:
  - układy napędu maszyn i pojazdów,
  - układy strunowe i belkowe poddane obciążeniom ruchomym,
  - układy wałów maszyn wirnikowych,
  - układy jezdne pojazdów szynowych.

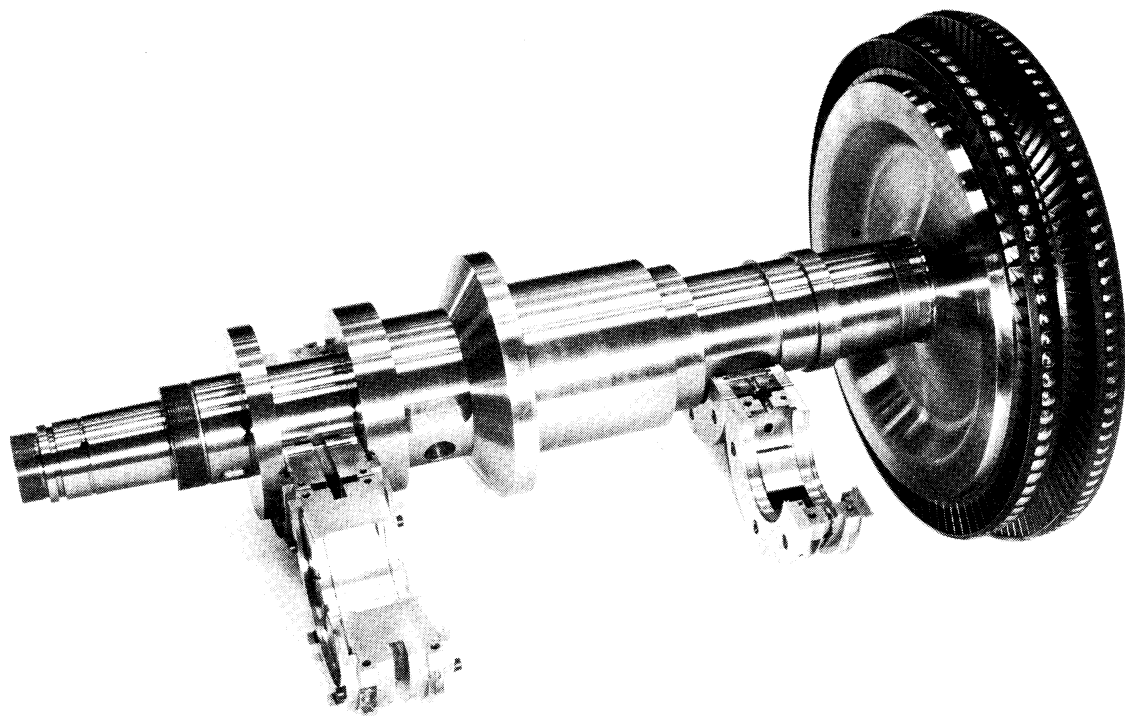
Otrzymane wyniki dotyczyć będą zarówno problemów badanych już przez innych autorów oraz problemów zupełnie nowych lub będących przedmiotem aktualnych badań w kraju i na świecie.
3. Weryfikacja wiarygodności otrzymanych wyników przez porównanie z wynikami uzyskanymi za pomocą innych metod oraz, co najważniejsze, przez porównanie z wynikami uzyskanymi drogą pomiarów dokonanych na stanowisku laboratoryjnym i na obiekcie rzeczywistym.
4. Podsumowanie pracy w formie uwag końcowych dotyczących osiągniętych rezultatów oraz nakreślenia możliwości dalszego rozwoju zaproponowanej metodyki.

## 2. Założenia modelowania dynamicznego z wykorzystaniem lepko-sprężystych makroelementów ciągłych

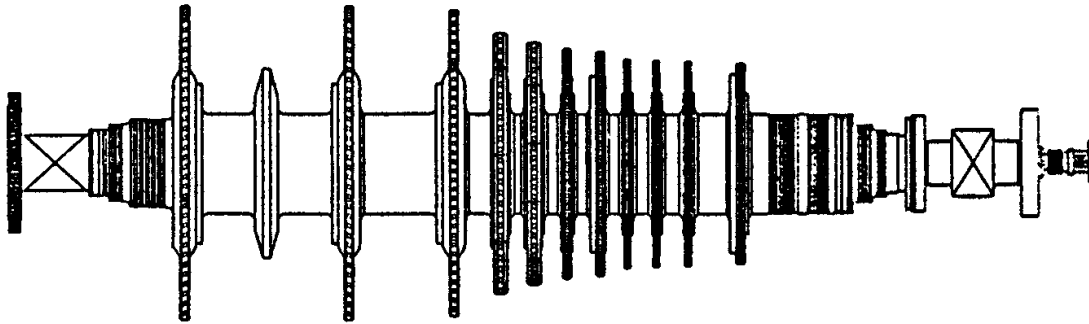
Celem pracy jest próba opracowania metodyki modelowania do analizy dynamicznej wybranych układów mechanicznych, takich jak układy napędowe maszyn i pojazdów, układy jezdne pojazdów, maszyny wirnikowe, prowadnice ruchomych narzędzi robotów i innych, gdzie głównymi elementami drgającymi są wały, osie, belki, wsporniki itp. Modele te miałyby służyć do analizy drgań giętnych, skrętnych i osiowych, które w zależności od rozwiązań konstrukcyjnych bądź proporcji wymiarowych badanego obiektu mogą być w mniejszym lub większym stopniu ze sobą sprzężone, a także sprzężone z drganiami translacyjnymi lub rotacyjnymi innych elementów, takich jak na przykład obudowy łożysk, fragmenty korpusów, ramy nośne itp. Na rysunkach 2.1, 2.2, 2.3 i 2.4 przedstawione są typowe przykłady wymienionych powyżej układów mechanicznych, gdzie rys. 2.1 pokazuje układ napędu generatora prądu elektrycznego turbiną parową, rys. 2.2 – wał turbosprężarki przemysłowej, rys. 2.3 – wał turbiny parowej małej mocy, a rys. 2.4 przedstawia szczególny element układu jezdnego pojazdu szynowego – tj. zestaw kołowy wagonu kolejowego. Na podstawie wymienionych rysunków można zauważyć, że podstawowe elementy tych układów wykonujące drgania, jak wały i osie charakteryzują się stosunkowo mało skomplikowanymi kształtami geometrycznymi w formie tzw. wałów stopniowych składających się ze skończonej liczby odcinków cylindrycznych o stałym przekroju poprzecznym. Jest to podyktowane zarówno względami konstrukcyjnymi oraz łatwością i możliwie niskimi kosztami wykonania. Stosunkowo proste kształty geometryczne osi i wałów oraz belek i prowadnic w maszynach i układach jezdnych pojazdów, jak również interesujący z punktu widzenia zastosowań technicznych zakres częstości drgań i odpowiadające tym częstościom formy własne, pozwalają na przeprowadzanie analiz dynamicznych za pomocą modeli jednowymiarowych, tzn. takich, których parametry, obciążenia oraz odpowiedź dynamiczna w postaci na przykład przemieszczeń lub odkształceń rozpatrywana jest wzdłuż jednego kierunku, – przykładowo osi obrotu wału, względnie linii wałów, lub osi symetrii belki czy układu belek. Zaletą takiego podejścia jest prostota otrzymywanych modeli strukturalnych, łatwość przeprowadzania identyfikacji wielu parametrów i efektywność obliczeń przy uzyskiwaniu wystarczającej dokładności wyników otrzymywanych do celów technicznych. Należy w tym miejscu zaznaczyć, że wśród szerokiej grupy układów mechanicznych będących przedmiotem rozważań niniejszej pracy istnieją takie, których możliwie dokładne modelowanie za pomocą modeli jednowymiarowych jest prawie niemożliwe, bądź zbyt zgrubne. Należą do nich m. in. drażone wały turbin gazowych o skomplikowanych kształtach geometrycznych i prawie cienkościennych przekrojach poprzecznych, niektóre konstrukcje prowadnicowe, belkowe i inne. Podobnie, za pomocą modeli jednowymiarowych nie mogą być reprezentowane korpusy maszyn, silników oraz karoserie pojazdów. Dlatego takie układy mechaniczne nie będą rozpatrywane w pracy. W praktyce jednak elementy te muszą charakteryzować się dużą sztywnością, tak by miały widma amplitud drgań leżące poza zakresem badanych drgań elementów ruchomych, lub też być dynamicznie odizolowane od elementów ruchomych na przykład łożyskami czy resorowaniem o stosunkowo dużej podatności, co daje efekt tzw. słabych sprzężeń dynamicznych. Dzięki temu, przy analizie drgań, na przykład układów napędu maszyn i pojazdów czy maszyn wirnikowych, można rozpatrywać wpływ odkształceń korpusów, fundamentów, ram nośnych i karoserii w sposób przybliżony uwzględniając ich bezwładność postaci brył sztywnych o skończonej bądź nieskończonej masie a podatność w postaci odpowiednich połączeń z badanym układem drgającym o na przykład zidentyfikowanych doświadczalnie charakterystykach lepko-sprężystych. Takie podejście czyni uzyskiwane w rezultacie modele mechaniczne przejrzyste i efektywne obliczeniowo przy zachowaniu dostatecznej dokładności otrzymywanych wyników do celów inżynierskich.



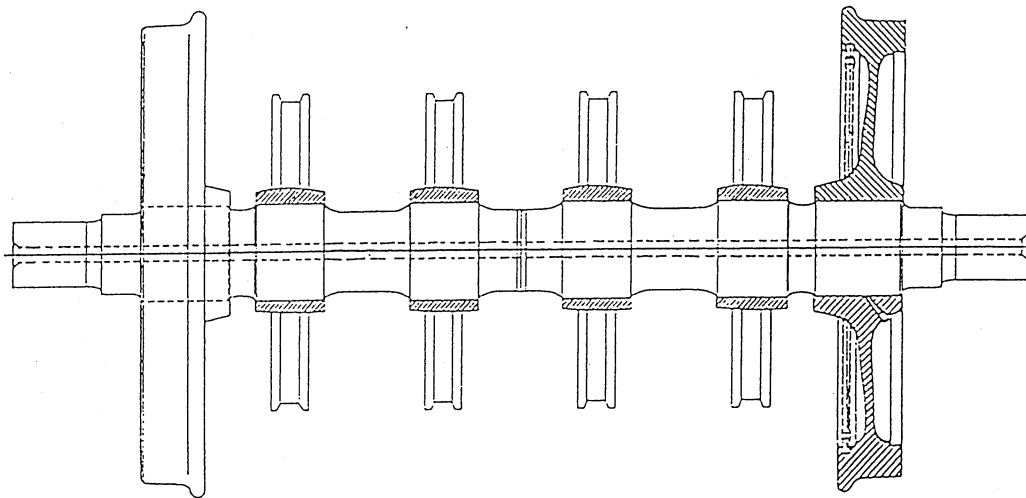
Rys. 2.1 Układ napędu generatora prądu elektrycznego turbiną parową, [199]



Rys. 2.2 Wał turbosprężarki przemysłowej firmy KKK (RFN)



Rys. 2.3 Wał wirnikowy turbiny parowej małej mocy, [69]



Rys. 2.4 Zestaw kołowy nowoczesnego pasażerskiego wagonu kolejowego

Obecnie, do analizy dynamicznej układów mechanicznych będących przedmiotem rozważań niniejszej pracy najbardziej odpowiednią wydaje się być z całą pewnością metoda elementów skończonych. Przy wykorzystaniu jednowymiarowych elementów prętowych i belkowych, [92], można budować stosunkowo łatwo identyfikowalne modele strukturalne układów napędu maszyn i pojazdów, maszyn wirnikowych, zestawów kołowych pojazdów szynowych, prowadnic ruchomych narzędzi robotów przemysłowych, układów napowietrzna sieć trakcyjna – pantograf lokomotywy elektrycznej i wielu innych. Oddziaływanie podpór, łożysk, tarcz wirnikowych, kół zębatych, kół zamachowych, sprzęgieł podatnych i sztywnych jest reprezentowane w modelach MES za pomocą elementów o parametrach dyskretnych w formie brył sztywnych oraz bezmasowych elementów sprężysto-tłumiących o liniowych bądź nieliniowych charakterystykach, [50, 60, 92, 98]. Takie modele mechaniczne pozwalają na uzyskiwanie wymaganej dokładności otrzymywanych wyników symulacji komputerowej drgań oraz na przeprowadzanie badań jakościowych rozpatrywanych układów mechanicznych w postaci analiz drgań własnych, wyznaczania funkcji odpowiedzi częstotliwościowej i ocen stateczności zachowań dynamicznych. Niemniej jednak, przy stosowaniu jednowymiarowych modeli MES do będących przedmiotem rozważań układów mechanicznych napotykamy na istotne mankamenty i uciążliwości. Jak już wspomniano we Wprowadzeniu, do najważniejszych należy stosunkowo duża liczba stopni swobody przyjmowanych modeli, co w przypadku symulacji drgań z uwzględnieniem nieliniowości typu lokalnego wymaga stosowania kłopotliwych i często zawodnych metod redukcji, [92, 126]. Oprócz niebezpieczeństwa znaczącej utraty dokładności wyników obliczeń, otrzymywane tą drogą równania ruchu układu zredukowanego często charakteryzują się złym uwarunkowaniem macierzy, czyli problemom tzw. sztywności numerycznej, prowadzącym do niestabilności ich numerycznego całkowania, [45].



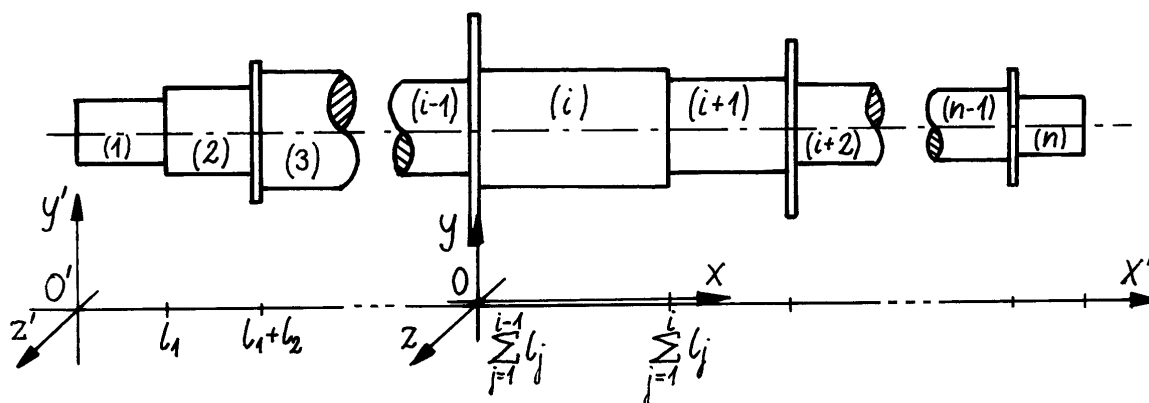
W związku z powyższym, podstawowym zadaniem proponowanej w pracy metodyki modelowania dyskretno-ciągłego wybranych układów mechanicznych jest uniknięcie wspomnianych mankamentów metody elementów skończonych przy jednoczesnym zachowaniu jej zalet, bądź nawet dalszemu podniesieniu ich znaczenia. Dlatego zostanie przyjęta taka sama jak w przypadku MES technika modelowania strukturalnego polegająca na zastępowaniu poszczególnych fragmentów rozpatrywanego układu rzeczywistego prostymi elementami składowymi pełniącymi określone funkcje i charakteryzującymi się przy tym stosunkowo dużą łatwością identyfikowania ich parametrów.

## 2.1 Podstawowe założenia koncepcji lepko-sprężystych makroelementów ciągłych

Rozpatrzmy typową belkę, oś lub wał o skokowo-zmiennym przekroju poprzecznym spotykany powszechnie w rzeczywistej maszynie lub układzie jezdnym pojazdu i przedstawiony schematycznie na rysunku 2.5. Ze wspomnianych powyżej względów konstrukcyjnych i technologicznych można w nim wyróżnić  $n$  segmentów o stałym bądź w przybliżeniu stałym przekroju poprzecznym. Wprowadźmy ponadto inercjalny, ortokartezjański, prawoskrętny układ współrzędnych  $O'x'y'z'$ , którego oś  $O'x'$  jest równoległa do nieodkształconej osi wału z rys. 2.5, a jej początek odpowiada położeniu lewego przekroju skrajnego pierwszego segmentu wału. Ponieważ w tym układzie współrzędnych można opisać ruch całego wału wraz z ewentualnymi elementami bezpośrednio z nim współpracującymi, na przykład tarczami, wirnikami, podporami, łożyskami i innymi, ten układ współrzędnych będziemy nazywali układem globalnym. Niezależnie, z każdym  $i$ -tym segmentem wału związujemy nowy ortokartezjański prawoskrętny układ współrzędnych  $Oxyz$ , którego oś  $Ox$  pokrywa się z odcinkiem osi  $O'x'$ , a jej początek odpowiada położeniu lewego przekroju skrajnego tego segmentu, jak pokazano na rys. 2.5. Można przyjąć, że osie  $Oy$  i  $Oz$  są odpowiednio równoległe do osi  $O'y'$  i  $O'z'$  układu  $O'x'y'z'$ . Wówczas współrzędne obu układów spełniają następujące wzajemne zależności:

$$x = x' - \sum_{j=1}^{i-1} l_j \quad \text{i} \quad y = y', \quad z = z',$$

gdzie  $l_i$  jest długością danego segmentu wału,  $i=1,2,\dots,n$ . W układzie współrzędnych  $Oxyz$ , można opisać ruch jedynie  $i$ -tego segmentu wału. Dlatego układ ten będzie dalej nazywany układem lokalnym.



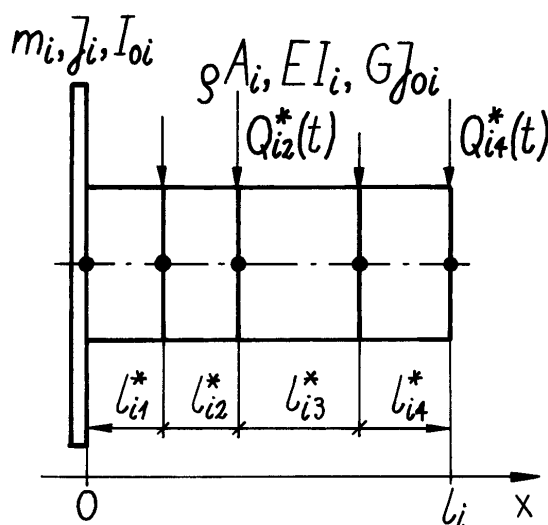
Rys. 2.5 Schematyczne przedstawienie stopniowego wału maszynowego z tarczami wirnikowymi

Stosując do analizy drgań giętych, skrętnych czy osiowych wału pokazanego na rys. 2.5 metodę elementów skończonych, zgodnie z [60, 92] każdy  $i$ -ty jego segment zastępujemy w modelu mechanicznym jednym bądź kilkoma jednowymiarowymi elementami prętowymi (do analizy drgań tylko skrętnych albo osiowych) lub elementami belkowymi (do analizy drgań giętych albo giętno-skrętnych). Rysunek 2.6 przedstawia  $i$ -ty cylindryczny segment wału maszynowego z rys. 2.5 o

długości  $l_i$  i polu powierzchni przekroju poprzecznego  $A_i$  wraz z przyległą sztywną tarczą reprezentowany przez 4 belkowe elementy skończone o tym samym polu powierzchni przekroju poprzecznego  $A_i$  i długościach  $l_{ij}$ ,  $i=1,2,\dots,n$ ,  $j=1,2,3,4$ , takich, że

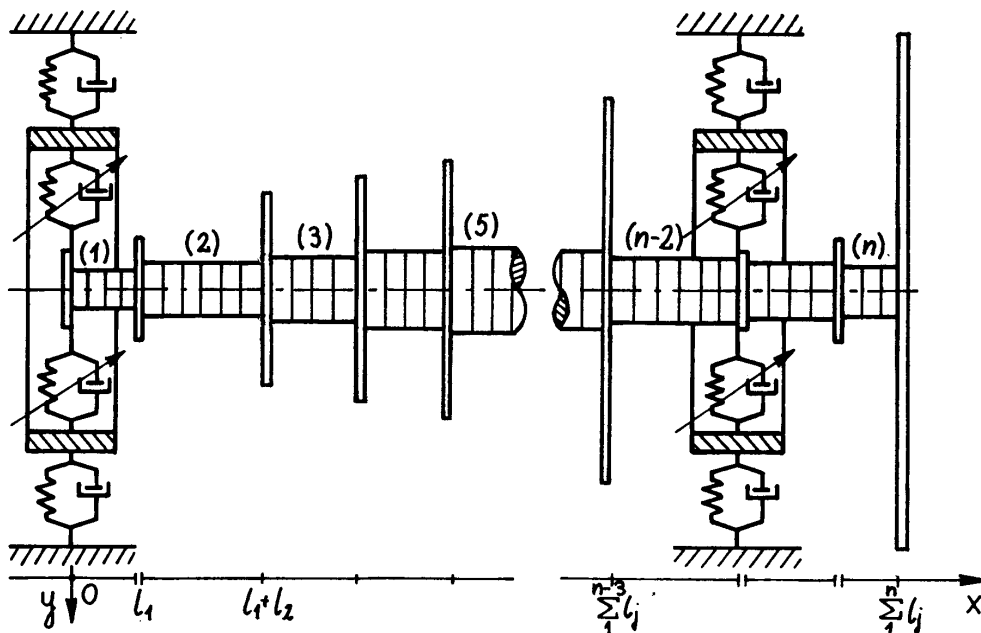
$$\sum_{j=1}^4 l_{ij} = l_i.$$

Elementy te mają ponadto taką samą sztywność na zginanie  $EI_i$  oraz na skręcanie  $GJ_{oi}$ . Tarczę sztywną przylegającą do pierwszego elementu, rys. 2.6, charakteryzują masa  $m_i$  oraz średnicowy i biegunowy masowy moment bezwładności - odpowiednio  $J_i$  i  $I_{oi}$ . Stosując MES  $i$ -ty segment wału można zastąpić jednym bądź kilkoma belkowymi elementami skończonymi w zależności od jego długości  $l_i$  oraz od wymaganej dokładności, tzn. zagęszczenia siatki dyskretyzacji. Na przykład w przypadku tylko jednego elementu, tj.  $j=1$ , ruch giętno-skrętny  $i$ -tego segmentu wału jest opisany za pomocą 10 stopni swobody, [92]. Natomiast przy podziale  $i$ -tego segmentu wału na 4 elementy belkowe, tj.  $j=4$ , otrzymujemy podukład drgający o 25 stopniach swobody. Tak więc ruch modelu dyskretnego otrzymanego metodą elementów skończonych całego wału maszynowego pokazanego na rys. 2.5 o  $n$  cylindrycznych segmentach o stałych przekrojach poprzecznych  $A_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , mógłby być opisany przynajmniej  $(n+1)\times 5$  stopniami swobody przy zastąpieniu każdego segmentu tylko jednym elementem skończonym. W przypadku bardziej dokładnego modelowania, tzn. przy podziale segmentu na  $j$  elementów skończonych, liczba stopni swobody wzrosłaby odpowiednio do wartości  $(n\times j+1)\times 5$ . Typowy jednowymiarowy model mechaniczny układu wirującego maszyny do analizy drgań giętnych, skrętnych i osiowych jego wału otrzymany metodą belkowych elementów skończonych przedstawiono na rysunku 2.7. Należy zauważyć, iż w tym modelu uwzględniono podparcia wału za pomocą oscylatorów lepko-bezwładnościowo-sprężystych o dwóch stopniach swobody każdy.



Rys. 2.6 Cylindryczny segment wału maszynowego zdyskretyzowany metodą elementów skończonych

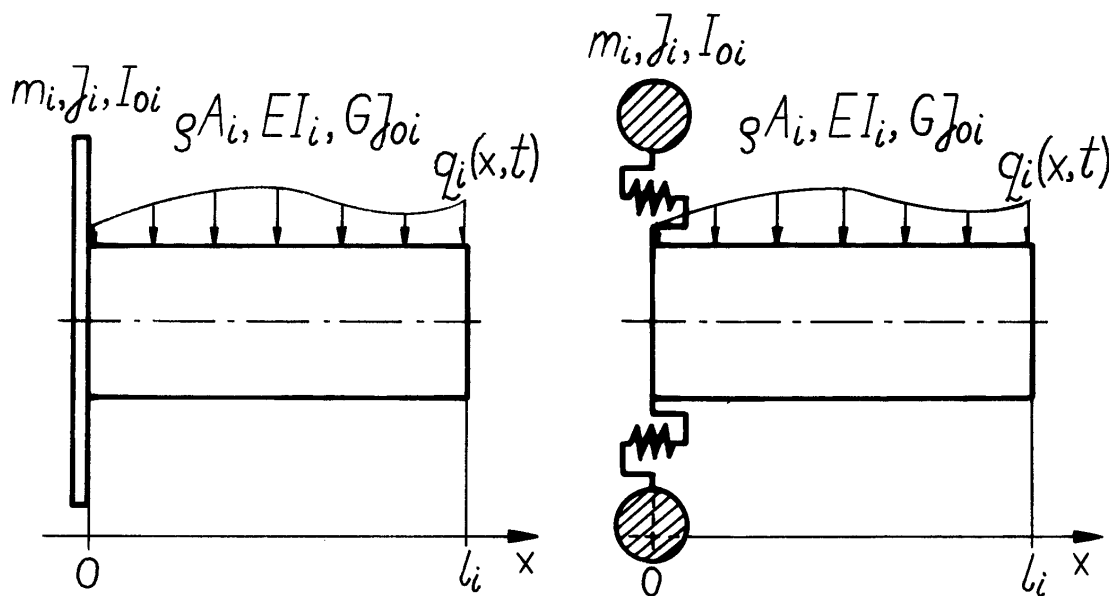
Zastąpmy więc  $i$ -ty segment wału maszynowego pokazany na rys. 2.5 cylindrycznym elementem lepko-sprężystym o parametrach rozłożonych w sposób ciągły o tej samej długości  $l_i$  i polu powierzchni przekroju poprzecznego  $A_i$  oraz o takich samych sztywnościach na zginanie  $EI_i$  i na skręcanie  $GJ_{oi}$  jak elementy skończone pokazane na rys. 2.6. Do lewego przekroju skrajnego tego elementu niech przylega taka sama tarcza sztywna o masie  $m_i$  oraz średnicowym i biegunowym masowym momencie bezwładności odpowiednio  $J_i$  i  $I_{oi}$ , jak przedstawiono na rysunku 2.8a. Ze względu na ciągłe rozłożenie masy oraz własności sprężystych i dyssypatywnych wzdłuż osi  $Ox$  takiego makroelementu nie ma potrzeby dzielenia go na krótsze podelementy, tak jak to miało miejsce w przypadku zastosowania MES w celu uzyskania większej dokładności modelowania. Dlatego więc w odróżnieniu od klasycznych elementów skończonych, element ciągły pokazany na



Rys. 2.7 Jednowymiarowy model układu wirującego maszyny otrzymany metodą elementów skończonych

rys. 2.8a będziemy nazywali dalej makroelementem. Ponadto, ponieważ w tym makroelemente obok rozłożonych w sposób ciągły własności sprężystych uwzględniono również zdolność dyssypowania energii drgań, zaproponowano jego pełną nazwę „lepko-sprężysty makroelement ciągły” (L-SMC).

(a) (b)



Rys. 2.8 Reprezentacja cylindrycznego segmentu wału w postaci „lepko-sprężystego makroelementu ciągłego” (L-SMC) z tarczą wirnikową zamocowaną w sposób sztywny (a) i podatny (b)

Jak widać, w przypadku modelowania metodą elementów skończonych i lepko-sprężystych makroelementów ciągłych (L-SMC),  $i$ -ty segment rzeczywistego wału maszynowego, osi lub belki charakteryzuje się identycznymi parametrami geometrycznymi, tj. długością  $l_i$  i polem powierzchni przekroju poprzecznego  $A_i$ , parametrami sprężystymi, tzn. sztywnościami na zginanie  $EI_i$  i na skręcanie  $GJ_{oi}$ , oraz parametrami bezwładnościowymi, tj. rozkładem masy wału, osi lub belki  $\rho A_i$ ,

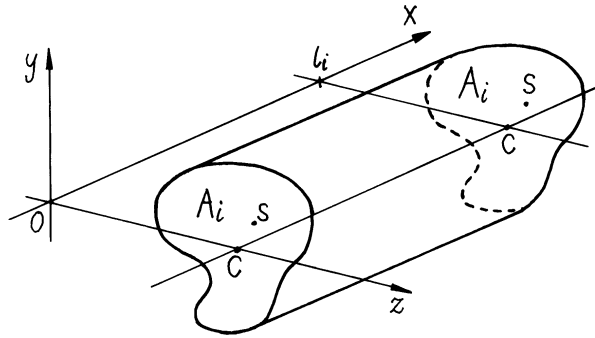
jak również wspomnianymi powyżej parametrami bezwładnościowymi tarczy sztywnej  $m_i$ ,  $J_i$  i  $I_{0i}$ , gdzie  $\rho$  oznacza gęstość materiału wału, osi, względnie belki z rys. 2.5. Jeżeli na  $i$ -ty segment działa obciążenie zewnętrzne opisane wzdłuż jego długości zadaną funkcją rozkładu  $q_i(x,t)$ , to w przypadku L-SMC zostaje ono przyłożone w sposób naturalny jako obciążenie zewnętrzne rozłożone w sposób ciągły. Natomiast w przypadku zastosowania MES obciążenie to najczęściej zostaje sprowadzone do węzłów w postaci sił lub momentów skupionych  $Q_{ij}(t)$ , rys. 2.5, otrzymywanych z funkcji rozkładu  $q_i(x,t)$  za pomocą odpowiednich metod opisanych w [60, 92]. Ponadto, dodatkową różnicą między klasycznym podejściem MES a proponowanym L-SMC może być pewna modyfikacja modelowania osadzenia tarczy, która jest zazwyczaj mocowana w skrajnym przekroju poprzecznym segmentu w sposób sztywny, tak jak pokazano na rysunkach 2.6 i 2.8a. Tarczę tą można również zamocować lepko-sprężysto za pomocą nieważkiej membrany o zadanej sztywności średnicowej i osiowej, rys. 2.8b.

Reasumując można stwierdzić, że w myśl przyjętych powyżej założeń model MES i L-SMC  $i$ -tego segmentu wału maszynowego z rysunku 2.5 są równoważne pod względem parametrów, tzn. wymiarów geometrycznych, tj. długości  $l_i$ , pola powierzchni przekroju poprzecznego  $A_i$ , i geometrycznych momentów bezwładności przekroju  $I_i$ ,  $J_{0i}$ , stałych materiałowych  $\rho$ ,  $E$  i  $G$  oraz parametrów bezwładnościowych tarczy sztywnej, tj. masy  $m_i$  i jej masowych momentów bezwładności  $J_i$  i  $I_{0i}$ . Parametry te ustalamy na przykład na podstawie dokumentacji technicznej badanego rzeczywistego obiektu. Należy w tym miejscu podkreślić, iż stosując obie wymienione powyżej metody modelowania w przypadku każdego  $i$ -tego segmentu wału popełniamy takie same błędy identyfikacji jego parametrów. Uzyskiwane w dalszym toku postępowania różnice otrzymywanych wyników będą konsekwencją zastosowanych opisów i rozwiązań matematycznych odpowiadających obu metodom, przyjętym dalej uproszczeniom, przybliżeniom oraz technikom symulacji drgań.

Nieco inaczej przedstawia się problem opisu zjawiska dyssypacji energii drgań przez tłumienie materiałowe w obydwu rozpatrywanych modelach. W przypadku modelowania  $i$ -tego segmentu wału za pomocą MES najczęściej stosowany jest liniowy model tłumienia Kelvina-Voigta. Ponadto, używany jest również model, w którym zakłada się, że opór tłumienia przejawia się w postaci sił tarcia wewnętrznego proporcjonalnych do prędkości przemieszczeń poszczególnych punktów elementu skończonego, [92, 202]. Wówczas, opis matematyczny obu jednocześnie działających modeli tłumienia przyjmuje wygodną do obliczeń formę tzw. tłumienia proporcjonalnego, gdzie macierz współczynników tego tłumienia jest kombinacją liniową macierzy bezwładności i sztywności elementu skończonego, [92]. Z kolei w przypadku modelowania  $i$ -tego segmentu wału, osi czy belki za pomocą L-SMC przyjmowany jest także model Kelvina-Voigta jako tłumienia materiałowego, [74], a siły tłumienia proporcjonalne do prędkości przemieszczeń przekrojów poprzecznych makroelementu mają tu charakter tłumienia zewnętrznego. Ustalenie, który z wymienionych opisów tłumienia materiałowego jest bliższy rzeczywistości, wymaga weryfikacji doświadczalnej.

## 2.2 Klasyfikacja lepko-sprężystych makroelementów ciągłych

W zależności od rodzaju rozpatrywanych drgań lub charakteru zakładanych odkształceń można wyszczególnić następujące typy lepko-sprężystych makroelementów ciągłych zdefiniowanych w poprzednim punkcie. Wymienione poniżej L-SMC przedstawiono na wspólnym rysunku 2.9.



Rys. 2.9 Jednowymiarowy lepko-sprężysty makroelement ciągły

### a). Lepko-sprężysty ciągły makroelement prętowy

Za pomocą tego makroelementu można badać drgania podłużne (osiowe) prętów, drgania poprzeczne strun oraz w przypadku kołowsymetrycznego przekroju poprzecznego także drgania skrętne wałów i osi. Przyjmuje się tu, że zaznaczone na rys. 2.9 środki ciężkości  $C$  i ścinania  $S$  przekroju poprzecznego o polu powierzchni  $A_i$  pokrywają się. Przy założeniu płaskości przekrojów poprzecznych oraz w przypadku drgań skrętnych założeniu tzw. zasady prostoliniowego elementu, [74], równaniem opisującym ruch tych przekrojów jest znane hiperboliczne równanie różniczkowe cząstkowe typu falowego mające dodatkowy człon wpływu tłumienia materiałowego według wspomnianego powyżej modelu Kelvina-Voigta

$$\Gamma \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial t^2} = q_i(x,t), \quad (2.1)$$

gdzie w  $i$ -tym makroelemencie  $\theta_i(x,t)$  oznacza przemieszczenie podłużne (drgań osiowych pręta), przemieszczenie poprzeczne (drgań poprzecznych struny) lub przemieszczenie kątowe (drgań skrętnych wału czy osi) przekroju poprzecznego o współrzędnej przestrzennej  $x$  w chwili czasu  $t$ . Symbol  $\Gamma$  jest parametrem określającym sztywność makroelementu równym modułowi Younga  $E$  w przypadku drgań osiowych, modułowi Kirchhoffa  $G$  dla drgań skrętnych lub naciągowi  $T$  struny drgającej poprzecznie. Stała  $\mu$  oznacza gęstość materiału makroelementu  $\rho$  - w przypadku drgań osiowych pręta i drgań skrętnych wału lub odniesioną do długości masę jednostkową struny drgającej poprzecznie. Symbol  $\tau$  jest czasem retardacji tłumienia materiałowego, a  $q_i(x,t)$  oznacza funkcję rozkładu (intensywność) obciążenia zewnętrznego wzdłuż osi makroelementu. Wspólna nazwa „prętowy” tego makroelementu w trzech wymienionych przypadkach rodzajów odkształceń, tj. podłużnych, poprzecznych i skrętnych, jest pewną analogią do dwuwęzłowego prętowego elementu skończonego stosowanego do analizy omawianych trzech rodzajów drgań przy wykorzystaniu MES, [92].

### b). Lepko-sprężysty ciągły makroelement belkowy

Za pomocą tego makroelementu można badać drgania giętne belek, osi i wałów. Podobnie jak w przypadku makroelementu prętowego przyjmuje się, iż zaznaczone na rys. 2.9 środki ciężkości  $C$  i ścinania  $S$  przekroju poprzecznego o polu powierzchni  $A_i$  pokrywają się. Charakter odkształceń makroelementu belkowego zależy od przyjętej teorii zginania. Równanie ruchu przekrojów poprzecznych obciążonego stałą siłą osiową  $P_i$  makroelementu belkowego według elementarnej teorii zginania Bernoulliego-Eulera ma następującą postać

$$EI_i \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 v_i(x,t)}{\partial x^4} + P_i \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial x^2} + \rho A_i \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial t^2} = q_i(x,t), \quad (2.2)$$

gdzie  $v_i(x,t)$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , jest przemieszczeniem poprzecznym przekroju o współrzędnej przestrzennej  $x$ , a  $e$  oznacza czas retardacji tłumienia materiałowego opisanego modelem Kelvina-Voigta przy zginaniu, [74]. W przypadku drgań przestrzennych belki, tj. w kierunku osi  $Oy$  i  $Oz$  układu współrzędnych  $Oxyz$ ,  $v_i(x,t)=u_i(x,t)+jw_i(x,t)$ , gdzie  $u_i(x,t)$  jest przemieszczeniem poprzecznym przekroju w kierunku osi  $Oy$ ,  $w_i(x,t)$  oznacza przemieszczenie przekroju w kierunku osi  $Oz$ , a  $j$  jest liczbą urojona. Z postaci wzoru (2.2) wynika, że drgania gięte w płaszczyźnie  $Oxy$  nie są sprzężone z drganiami w płaszczyźnie  $Oxz$  równaniem ruchu. Mogą być one sprzężone warunkami brzegowymi opisującymi na przykład oddziaływanie podpór o niesymetrycznych charakterystykach, [60, 81, 199]. Geometryczny średnicowy moment bezwładności przekroju poprzecznego  $I_i$  w równaniu (2.2) jest taki sam jak w przypadku drgań w obu płaszczyznach, co odpowiada na przykład przekrojowi kołowym symetrycznemu typowemu dla belek wirujących, tj. osi lub wałów. Dodatni znak siły osiowej  $P_i$  oznacza ściskanie belki, a znak ujemny jej rozciąganie. Z porównania równań (2.1) i (2.2) przy ujemnej sile  $P_i$  wynika, iż makroelement prętowy oraz belkowy według teorii zginania Bernoulliego-Eulera można by zastąpić jednym wspólnym makroelementem. Niemniej jednak, przyjęty podział uzasadniają zastosowania obu makroelementów do oddzielnych problemów analizy drgań, co będzie przedmiotem rozważań w następnych rozdziałach pracy.

W przypadku belek wirujących stosuje się bardzo często teorię zginania Rayleigha uwzględniającą bezwładność obrotową przekrojów poprzecznych, efekty żyroskopowe oraz równomiernie rozłożone na długości makroelementu lepko-sprężyste izotropowe podparcie reprezentujące na przykład oddziaływanie uszczelnień wałów maszyn wirnikowych, [60, 100, 101, 193]. Wówczas, równanie ruchu kołowym symetrycznych przekrojów poprzecznych makroelementu ma postać następującą:

$$EI_i \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^4 v_i(x,t)}{\partial x^4} - \rho I_i \left( \frac{\partial^4 v_i(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - 2j\Omega \frac{\partial^3 v_i(x,t)}{\partial x^2 \partial t} \right) + \rho A_i \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial t^2} + c_{si} \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} + k_{si} v_i(x,t) = q_i(x,t) \quad (2.3)$$

gdzie  $\Omega$  jest prędkością kątową wirowania wału,  $c_{si}$  i  $k_{si}$  oznaczają odpowiednio współczynniki tłumienia i sztywności podparcia, a pozostałe oznaczenia są identyczne jak w równaniu (2.2). Należy zauważyć, że w przypadku wirującego makroelementu belkowego o równaniu ruchu (2.3) siły żyroskopowe sprzęgają wzajemnie drgania w płaszczyznach  $Oxy$  i  $Oxz$ .

Jak wiadomo, wymienione powyżej teorie zginania są dostatecznie dokładne do celów technicznych dla tzw. belek smukłych, tj. w których stosunek długości do średniej grubości (wysokości) belki jest większy od 10, [60, 74], lub w przypadku rozpatrywanych postaci drgań o węzłach na tyle od siebie oddalonych, by efekty ścinania przekrojów poprzecznych były pomijalne. Dotyczy to całej belki, a nie pojedynczego makroelementu reprezentującego jedynie jej fragment w postaci  $i$ -tego segmentu o stałym przekroju poprzecznym. W przypadku belek mniej smukłych należy stosować bardziej dokładną teorię zginania Timoshenki. Wówczas równanie ruchu kołowym symetrycznych przekrojów poprzecznych  $i$ -tego makroelementu wirującego z prędkością kątową  $\Omega$  przyjmuje postać

$$\begin{aligned}
& EI_i \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \frac{\partial^4 v_i(x,t)}{\partial x^4} + \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ \rho A_i \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial t^2} + c_{si} \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} + k_{si} v_i(x,t) - \right. \\
& \left. - \rho I_i \left(1 + \frac{E}{\kappa G}\right) \frac{\partial^4 v_i(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{EI_i}{\kappa G A_i} \left( c_{si} \frac{\partial^3 v_i(x,t)}{\partial x^2 \partial t} + k_{si} \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\rho^2 I_i}{\kappa G} \frac{\partial^4 v_i(x,t)}{\partial t^4} + \\
& + \frac{\rho I_i}{\kappa G A_i} \left( c_{si} \frac{\partial^3 v_i(x,t)}{\partial t^3} + k_{si} \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial t^2} \right) + 2j\Omega \rho I_i \left[ \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 v_i(x,t)}{\partial x^2 \partial t} - \frac{\rho}{\kappa G} \frac{\partial^3 v_i(x,t)}{\partial t^3} - \right. \\
& \left. - \frac{1}{\kappa G A_i} \left( c_{si} \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial t^2} + k_{si} \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right) \right] = \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \left( q_i(x,t) - \frac{EI_i}{\kappa G A_i} \frac{\partial^2 q_i(x,t)}{\partial x^2} \right) + \\
& + \frac{\rho I_i}{\kappa G A_i} \left( \frac{\partial^2 q_i(x,t)}{\partial t^2} - 2j\Omega \frac{\partial q_i(x,t)}{\partial t} \right), \quad (2.4)
\end{aligned}$$

gdzie  $\kappa$  oznacza współczynnik ścinania przekroju poprzecznego belki, który w przypadku kołowsymetrycznego jest równy 0.75, [60, 74]. Powyższe równanie wyprowadzono przy założonym takim samym czasie retardacji  $e$  tłumienia materiałowego towarzyszącemu zginaniu i ścinaniu belki. Założenie to można przyjmować wówczas, gdy współczynniki tłumienia materiałowego przy zginaniu  $\eta_B$  i ścinaniu  $\eta_S$  spełniają następujący warunek:

$$\frac{\eta_S}{G} = \frac{\eta_B}{E} = e$$

traktowany jako dopuszczalne przybliżenie w zastosowaniach technicznych wg [73, 169].

### c). Lepko-sprężysty ciągły makroelement giętno-skrętny

Według teorii zginania i skręcania prętów prostych Kirchhoffa-Clebscha małe drgania giętne i skrętne rozsprzegają się wzajemnie przy kołowsymetrycznym przekroju poprzecznym belki, osi lub wału. Dlatego, za pomocą ciągłych makroelementów belkowych zdefiniowanych w punkcie b) można budować strukturalne modele mechaniczne do analizy drgań giętno-skrętnych opisując ruch obrotowy kołowsymetrycznych przekrojów poprzecznych równaniem (2.1) dla  $\Gamma=G$  i  $\mu=\rho$ , gdzie sprzężenie obu rodzajów drgań może być opisane równaniami warunków brzegowych, na przykład w przypadku układów napędowych z przekładniami zębatymi reprezentowanymi przez odpowiednie bryły sztywne i bezmasowe elementy sprężysto-tłumiące, lub w przypadku układów wirujących z niewyrównoważonymi statycznie bądź dynamicznie sztywnymi tarczami wirników, kół zębatych, jezdnych, zamachowych i innych.

Sprężenie drgań skrętnych z giętnymi belki, osi lub wału następuje również w przypadku kiedy środek ciężkości  $C$  przekroju poprzecznego nie pokrywa się ze środkiem ścinania  $S$ , rys. 2.9, [66, 67], oraz na skutek deplanacji przekrojów poprzecznych o nieregularnych kształtach geometrycznych bądź tzw. prętów silnie zwiniętych, [191], nawet gdy wspomniane środki ciężkości  $C$  i ścinania  $S$  pokrywają się. Pierwszy przypadek dotyczy przekrojów ceowych, teowych itp., czy tzw. długich łopatek maszyn przepływowych. Przypadek drugi obejmuje długie silnie zwinięte łopatki wylotowe ostatnich stopni turbin niskiego ciśnienia parowych turbogeneratorów energetycznych, [3, 109]. W związku z powyższym, do analizy drgań giętno-skrętnych poza wyżej

zdefiniowanymi ciągłymi makroelementami belkowymi wprowadzamy również lepko-sprężysty ciągły makroelement giętno-skrętny w formie odcinka prostego pręta zwiniętego w sensie podanym w [191] o stałym przekroju poprzecznym i o dowolnym kształcie geometrycznym oraz o stałym kącie zwinięcia. Z obydwu wymienionych powyżej przyczyn sprzężenia drgań giętnych ze skrętnymi ruch przekrojów poprzecznych  $i$ -tego ciągłego makroelementu giętno-skrętnego wygodnie jest opisać układem trzech równań różniczkowych cząstkowych, gdzie zginanie opisano stosując teorię belki Rayleigha

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ EI_{zi} \frac{\partial^4 u_i(x,t)}{\partial x^4} + EI_{yzi} \frac{\partial^4 w_i(x,t)}{\partial x^4} \right] - E\psi_{0i} I_{pzi} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 \theta_i(x,t)}{\partial x^3} - \\
& - \rho \left[ I_{zi} \frac{\partial^4 u_i(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + I_{yzi} \frac{\partial^3 w_i(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right] + \rho A_i \left[ \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} + c_{yi} \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial t^2} \right] = q_{yi}(x,t), \\
& \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ EI_{yzi} \frac{\partial^4 u_i(x,t)}{\partial x^4} + EI_{yi} \frac{\partial^4 w_i(x,t)}{\partial x^4} \right] - E\psi_{0i} I_{pyi} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 \theta_i(x,t)}{\partial x^3} - \\
& - \rho \left[ I_{yzi} \frac{\partial^4 u_i(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + I_{yi} \frac{\partial^3 w_i(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} \right] + \rho A_i \left[ \frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial t^2} - c_{zi} \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial t^2} \right] = q_{zi}(x,t), \quad (2.5) \\
& \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ EI_{\theta i} \frac{\partial^4 \theta_i(x,t)}{\partial x^4} - EH_{0i} \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial x^2} \right] + \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \left[ E\psi_{0i} I_{pzi} \frac{\partial^3 u_i(x,t)}{\partial x^3} + \right. \\
& \left. + E\psi_{0i} I_{pyi} \frac{\partial^3 w_i(x,t)}{\partial x^3} \right] + \rho F_{0i} \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial t^2} + \rho A_i \left[ c_{yi} \frac{\partial^2 u_i(x,t)}{\partial t^2} - c_{zi} \frac{\partial^2 w_i(x,t)}{\partial t^2} \right] = \\
& = q_{xi}(x,t) + c_{yi} q_{yi}(x,t) + c_{zi} q_{zi}(x,t),
\end{aligned}$$

$$H_{0i} = \frac{G}{E} J_{0i} + \psi_{0i}^2 \int_{A_i} (\eta^2 + \varsigma^2)^2 dA_i, \quad F_{0i} = I_{pi} + (c_{yi}^2 + c_{zi}^2) A_i,$$

gdzie  $I_{yi}$ ,  $I_{zi}$  oznaczają geometryczne momenty bezwładności przekroju poprzecznego makroelementu względem osi  $Oy$  i  $Oz$ , odpowiednio,  $I_{yzi}$  jest geometrycznym momentem dewiacji (lub dewiatorowym),  $I_{pyi}$ ,  $I_{pzi}$  są geometrycznymi momentami biegunowo-osiovymi odpowiednio względem osi  $Oy$  i  $Oz$ ,  $\psi_{0i}$  jest średnim kątem zwinięcia makroelementu przypadającym na jednostkę jego długości,  $c_{yi}$ ,  $c_{zi}$  są współrzędnymi środka ścinania przekroju,  $I_{\theta i}$  oznacza główny wycinkowy geometryczny moment bezwładności przekroju, [60, 74],  $J_{0i}$  jest geometrycznym momentem bezwładności przekroju wyznaczającym jego sztywność skrętną według Saint-Venenta  $GJ_{0i}$ ,  $\eta$ ,  $\varsigma$  są współrzędnymi w układzie głównych osi bezwładności przekroju  $i$ -tego makroelementu,  $I_{pi}$  oznacza biegunowy geometryczny moment bezwładności przekroju względem



jego środka ciężkości,  $\varepsilon$ ,  $\tau$  są odpowiednio czasami retardacji tłumienia materiałowego w modelu Kelvina-Voigta przy zginaniu i skręcaniu, a  $q_{xi}(x,t)$ ,  $q_{yi}(x,t)$ ,  $q_{zi}(x,t)$  oznaczają odpowiednio funkcje rozkładu wzdłuż długości makroelementu (intensywność) zewnętrznego momentu skręcającego oraz sił poprzecznych w kierunku osi  $Oy$  i  $Oz$ .

Poza analizą drgań giętno-skrętnych na przykład prowadnic robotów przemysłowych, pręseł i innych o różnych kształtach przekrojów poprzecznych belek, lepko-sprężyste makroelementy giętno-skrętne, których ruch opisany jest układem równań (2.5), mogą być wykorzystane do modelowania tzw. długich łopatek wylotowych ostatnich stopni turbin parowych, do analizy drgań układów wirujących z mikropeknięciami powodującymi anizotropię parametrów przekrojów poprzecznych uszkodzonych fragmentów wałów i w efekcie sprzężenie drgań giętnych ze skrętnymi, a także do analizy drgań układów wirujących mających odcinki wałów bez kołowej symetrii ich przekrojów poprzecznych. Należy przy tym zauważyć, iż w przypadku badania drgań giętno-skrętnych łopatek turbinowych przy wykorzystaniu giętno-skrętnych L-SMC należy do równań (2.5) wprowadzić człony opisujące działanie odśrodkowej siły bezwładności rozciągającej wirującą łopatkę, [3, 109].

#### **d). Uwagi ogólne dotyczące lepko-sprężystych makroelementów ciągłych**

Zdefiniowane powyżej lepko-sprężyste makroelementy ciągłe (L-SMC) charakteryzują się stałym przekrojem poprzecznym, podobnie jak klasyczne prętowe i belkowe elementy skończone, oraz stosunkowo prostymi cząstkowymi równaniami różniczkowymi ruchu ich przekrojów poprzecznych. Każdemu  $i$ -temu makroelementowi badanej struktury drgającej, na przykład belki lub wału,  $i=1,2,\dots,n$ , odpowiada takie równanie zapisane w lokalnym układzie współrzędnych  $Oxyz$ . Dlatego taki opis ruchu pojedynczego makroelementu ciągłego można nazwać opisem lokalnym, analogicznie jak w przypadku MES, gdzie dla każdego elementu skończonego budowane są lokalne macierze sztywności, tłumienia i bezwładności, [92]. Lokalny opis ruchu każdego  $i$ -tego L-SMC za pomocą oddzielnego prostego równania jest więc odmienny od powszechnie stosowanych dotychczas opisów globalnych, na przykład w [60, 76, 77, 100, 101, 129, 193], tj. za pomocą jednego cząstkowego równania różniczkowego ruchu całej drgającej struktury modelowanej w sposób ciągły, gdzie uwzględnienie zmienności parametrów jej przekroju poprzecznego, skupionych podparć, występowania nieciągłości strukturalnych w postaci brył sztywnych reprezentujących na przykład wirniki, koła zębate, zamachowe i inne, prowadzą do złożonej postaci takiego równania, a w konsekwencji do trudności bądź nawet niemożliwości jego rozwiązania.

Należy przy tym podkreślić, że długość makroelementu ciągłego, szczególnie belkowego lub giętno-skrętnego, nie ma związku z przyjmowaną teorią zginania ze względu na jego smukłość. Pojedynczy makroelement jest tylko komponentem modelowanej struktury drgającej, a o wyborze danej teorii zginania, tj. Bernoulliego-Eulera, Rayleigha czy Timoshenki, decyduje przede wszystkim smukłość całej belki, osi lub wału oraz zakres badanych częstości drgań, gdzie wzajemne odległości kolejnych węzłów postaci drgań własnych odpowiadającej największej rozpatrywanej częstości własnej określa potrzebę uwzględnienia na przykład efektów ścinania przekrojów.

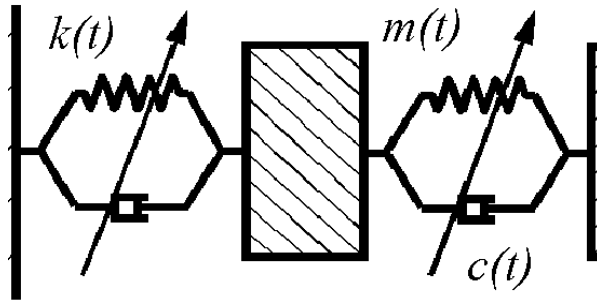
Ważnym aspektem jednowymiarowego modelowania struktur ciągłych przy wykorzystaniu L-SMC jest zachowanie właściwych proporcji zmian wartości pól powierzchni przekrojów poprzecznych sąsiadujących ze sobą kolejnych makroelementów. W przypadku dużych nagłych zmian pola przekroju poprzecznego struktury, na przykład kolejnych segmentów wału stopniowego, charakter jej odkształceń w okolicach skoku wartości pola przekroju szczególnie przy wyższych postaciach drgań powodujący deplanację przekrojów poprzecznych może nie pozwalać na przyjęcie założenia płaskich przekrojów dla L-SMC. Wówczas, analizowany dynamicznie układ należałoby modelować trójwymiarowo. Jednak tego typu przypadki występują w praktyce rzadko ze względu na uwarunkowania konstrukcyjne i technologiczne rzeczywistych części maszyn i urządzeń,

których zbyt duże skokowe zmiany pól przekrojów poprzecznych prowadziłyby do trudności wykonawczych oraz towarzyszyłyby im nadmierne spiętrzenia naprężeń. Mimo to, w zakończeniu pracy zostanie przeprowadzona analiza wpływu skokowej zmiany wartości pola przekroju poprzecznego dwóch sąsiadujących makroelementów ciągłych na dokładność uzyskiwanych wyników otrzymywanych przy wykorzystaniu jednowymiarowego modelu ciągłego oraz trójwymiarowego modelu MES.

Oprócz przyjętego w zdefiniowanych powyżej lepko-sprężystych makroelementach ciągłych modelu tłumienia materiałowego Kelvina-Voigta do analizy drgań stosowane są również inne, w tym bardziej złożone, modele reologiczne materiału, na przykład model Maxwella, Boltzmanna, Biota, Zenera i inne oraz kombinacje modelu Kelvina-Voigta i Maxwella m. in. w postaci tzw. modelu standardowego, [74, 92]. Na przykład w [60] uzależniono intensywność tłumienia w materiale wirującego ciągłego wału od jego prędkości kątowej. Prowadzi to do znacznego skomplikowania wyprowadzonego w efekcie różniczkowego cząstkowego równania ruchu, w którym pojawiają się dodatkowe człony zawierające cząstkowe pochodne mieszane oraz pochodne wyższych rzędów względem czasu. Jednak jak wynika z licznych weryfikacji doświadczalnych, nawet złożone i oparte na racjonalnych podstawach teoretycznych modele tłumienia często zawodzą. W związku z tym, zastosowanie stosunkowo prostego modelu tłumienia materiałowego w zdefiniowanych powyżej lepko-sprężystych makroelementach ciągłych wydaje się uzasadnione, szczególnie w pierwszym etapie formułowania proponowanej w pracy metodyki modelowania i analizy drgań omawianych układów mechanicznych.

### **2.3 Zastosowanie elementów o parametrach dyskretnych**

W proponowanych w pracy modelach mechanicznych do analizy drgań giętnych, skrętnych i osiowych układów napędowych, maszyn wirnikowych, układów jezdnych pojazdów, prowadnic robotów przemysłowych i innych podstawowe elementy doznające odkształceń, tj. wały, osie, belki, prowadnice itp., są reprezentowane przez odpowiednie kombinacje lepko-sprężystych makroelementów ciągłych (L-SMC) zdefiniowanych w poprzednich podpunktach. W zależności od konkretnego przypadku badanego obiektu, wymienione powyżej wały, osie, belki itp. oddziałują z otoczeniem, czyli z pozostałymi elementami maszyny czy pojazdu, poprzez różnego rodzaju podpory, łożyska, przeguby, sprzęgła, przekładnie, kontakt toczny i inne. Elementy te przylegają bądź są zamocowane do osi belek lub wałów w sposób lokalny, tzn. na stosunkowo lub znikomo małej długości w porównaniu z całkowitą długością poszczególnych ich segmentów o stałym przekroju poprzecznym. Dzięki temu w modelach mechanicznych można wymienione powyżej podparcia, połączenia i zamocowania potraktować jako skupione w odróżnieniu na przykład od uszczelnień wałów maszyn wirnikowych, których własności lepko-sprężyste należy modelować jako rozłożone w sposób ciągły na pewnej skończonej długości wału, belki czy osi. Ponieważ masy elementów omawianych podparć, połączeń i zamocowań, tj. przegubów, filmów łożyskowych, wkładek sprzęgieł podatnych, resorów, poduszek powietrznych, ząbów przekładni zębatych itp. są zazwyczaj małe lub bardzo małe w porównaniu z masami belek, osi czy wałów ich własności lepko-sprężyste można reprezentować w modelu za pomocą bezmasowych elementów sprężysto-tłumiących o liniowych lub nieliniowych charakterystykach. Ponadto, często sztywności omawianych podparć, połączeń i zamocowań są znacznie mniejsze od sztywności belek, osi czy wałów powodując efekty tzw. słabych sprzężeń dynamicznych z ruchami pozostałych części maszyny czy pojazdu, tj. na przykład fundamentów, karoserii, korpusów, ram nośnych, obudów łożysk i innych, dzięki czemu jedynie własności bezwładnościowe tych części mogą mieć istotny wpływ na badane procesy drgań giętnych, skrętnych i osiowych. Dlatego w proponowanych w pracy modelach mechanicznych mogą one być reprezentowane jako bryły sztywne o skończonych bądź nieskończonych stałych lub zmiennych masach i masowych momentach bezwładności.



Rys. 2.10 Model mechaniczny o parametrach dyskretnych

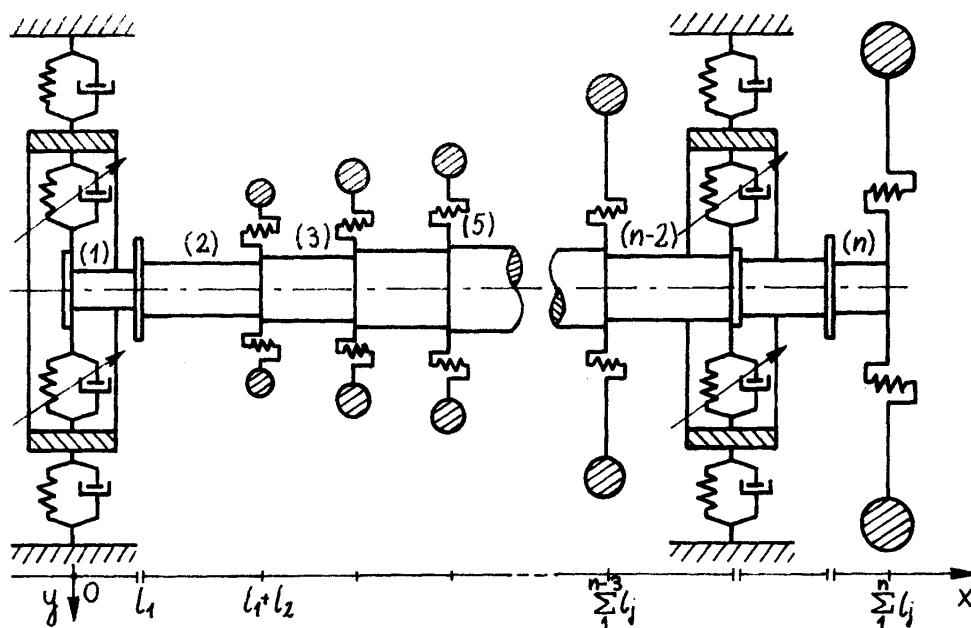
W związku z powyższym, bryły sztywne wraz ze wspomnianymi powyżej bezmasowymi elementami sprężysto-tłumiącymi tworzą klasyczne oscylatory lepko-bezwładnościowo-sprężyste o parametrach dyskretnych oddziaływujące z belkami, osiami i wałami reprezentowanymi z kolei przez L-SMC. Taki przykładowy oscylator jest pokazany na rysunku 2.10. Ruch oscylatorów opisany jest znanymi liniowymi, nieliniowymi bądź parametrycznymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi drugiego rzędu

$$\mathbf{M}_T(t, s(t)) \ddot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{C}_T(t, s(t), \dot{\mathbf{s}}(t)) \dot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{K}_T(t, s(t)) \mathbf{s}(t) = \mathbf{F}_T\left(t, s(t), \dot{\mathbf{s}}(t), v(l_i, t), \omega(l_i, t), \theta(l_i, t), \dot{\theta}(l_i, t)\right), \quad (2.6)$$

gdzie  $\mathbf{s}(t)$  oznacza wektor współrzędnych uogólnionych  $s(t)$ ,  $\mathbf{M}_T$ ,  $\mathbf{C}_T$ ,  $\mathbf{K}_T$  są macierzami odpowiednio bezwładności, tłumienia i sztywności, a  $\mathbf{F}_T$  jest wektorem wymuszeń zewnętrznych zawierającym również człony sprzęgające ruch oscylatora z ruchami L-SMC.

## 2.4 Budowanie dyskretno-ciągłego modelu mechanicznego całego badanego obiektu

Przy wykorzystaniu zdefiniowanych w powyższych punktach lepko-sprężystych makroelementów ciągłych i elementów o parametrach dyskretnych można budować strukturalne modele fizyczne do analizy drgań giętnych, skrętnych i osiowych rozpatrywanych układów mechanicznych. Budowanie tych modeli do analizy rozpatrywanego rodzaju drgań polega na wzajemnym łączeniu odpowiednich L-SMC i oscylatorów dynamicznych o parametrach dyskretnych zgodnie ze strukturą badanych obiektów rzeczywistych. Takie postępowanie jest podobne do tworzenia modeli strukturalnych za pomocą MES drogą łączenia, czyli syntezy, poszczególnych elementów skończonych. Przykładowy, równoważny pokazanemu na rys. 2.7 modelowi otrzymanemu metodą elementów skończonych w sensie przyjętych powyżej założeń dyskretno-ciągły model mechaniczny układu wirującego maszyny do analizy drgań giętnych, skrętnych i osiowych wału zbudowany z L-SMC i oscylatorów dynamicznych o parametrach dyskretnych przedstawiono na rysunku 2.11. Natomiast zupełnie różne są sposoby budowania modeli matematycznych przy wykorzystaniu obu omawianych metod. W przypadku metody elementów skończonych opis matematycznej syntezy pojedynczych elementów sprowadza się do łączenia odpowiadających tym elementom lokalnych macierzy sztywności, tłumienia i bezwładności do postaci odpowiednich macierzy globalnych występujących w równaniach różniczkowych zwyczajnych ruchu całego rozpatrywanego układu mechanicznego, na przykład modelu układu pokazanego na rys. 2.7. Liczba tych równań odpowiada wtedy całkowitej liczbie stopni swobody globalnego modelu MES. Rozwiązując te równania przy wykorzystaniu znanych metod prowadzi się ilościową i jakościową analizę dynamiczną.



Rys. 2.11 Jednowymiarowy dyskretno-ciągły model układu wirującej maszyny otrzymany przy wykorzystaniu L-SMC i oscylatorów dynamicznych o parametrach dyskretnych

W przypadku metodyki proponowanej w pracy tworzenie modelu matematycznego opisującego ruch całego badanego obiektu przebiega w odmienny sposób. Małe drgania przekrojów poprzecznych L-SMC opisane są stosunkowo prostymi liniowymi równaniami różniczkowymi (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) i (2.5), które należy rozwiązywać przy zadanych warunkach brzegowych i początkowych. Łączenie poszczególnych L-SMC sprowadza się do wyprowadzania odpowiednich kinematycznych i dynamicznych warunków zgodności ruchu przekrojów skrajnych spajanych ze sobą makroelementów. Ponieważ do przekrojów tych można również dołączać odpowiednie oscylatory dynamiczne o parametrach dyskretnych, równania ich ruchu zostają sprzęgane z wymienionymi powyżej warunkami zgodności. W ten sposób do równań ruchu przekrojów poprzecznych L-SMC dokonuje się formułowania warunków brzegowych, spośród których w przypadku przekrojów skrajnych bezpośrednio do siebie przylegających makroelementów można wyróżnić:

- warunki brzegowe geometryczne, czyli warunki zgodności przemieszczeń translacyjnych i kątowych,
- warunki brzegowe dynamiczne (zwane również naturalnymi, na przykład w [113]), a więc równania równowagi sił i momentów bezwładnościowych, sprężystych, dyssypatywnych, żyroskopowych, niewyrównoważeń statycznych i dynamicznych, reakcji podparć, kontaktu z otoczeniem lub innymi elementami rozpatrywanego układu mechanicznego, wymuszenia zewnętrznego i innych.

W przypadku ogólnym, oznaczając poszczególne ww. człony odpowiednimi indeksami można w przekroju połączenia  $i$ -szego L-SMC z  $i$ -tym równania dynamicznych warunków brzegowych zapisać następująco:

- warunek zgodności sił poprzecznych lub podłużnych (na przykład przy zginaniu belek lub ścisłaniu/rozciąganiu prętów)

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{R}_{ELi} \left( v_i(x,t), v_{i-1}(x,t) \right) + \mathfrak{R}_{INi} \left( v_i(x,t) \right) + \mathfrak{R}_{UNBi} \left( \theta_i(x,t), \Omega(t) \right) + \\
& + \mathfrak{R}_{SUPi} \left( v_i(x,t), s_k(t) \right) + \mathfrak{R}_{CNTi} \left( v_i(x,t), \theta_i(x,t), s_k(t) \right) + \mathfrak{R}_{GYRi} \left( v_i(x,t), v_{i-1}(x,t), \Omega(t) \right) + \\
& + \mathfrak{R}_{DISi} \left( \mathfrak{R}_i(x,t), \mathfrak{R}_i(x,t), \mathfrak{R}_k(t) \right) = \mathfrak{T}_{EXTi} \left( t, \Omega^2(t), v_i(x,t), \theta_i(x,t), s_k(t) \right),
\end{aligned} \quad (2.7)$$

- warunek zgodności momentów zginających (przy zginaniu belek)

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{N}_{ELi} \left( v_i(x,t), v_{i-1}(x,t), s_m(t) \right) + \mathfrak{N}_{INi} \left( s_m(t) \right) + \mathfrak{N}_{UNBi} \left( \theta_i(x,t), s_m(t), \Omega(t) \right) + \\
& + \mathfrak{N}_{DISi} \left( \mathfrak{R}_i(x,t), \mathfrak{R}_m(t) \right) + \mathfrak{N}_{CNTi} \left( s_m(t), \theta_i(x,t) \right) + \mathfrak{N}_{GYRi} \left( s_m(t), \Omega(t) \right) = \\
& = \mathfrak{T}_{EXTi} \left( t, \Omega^2(t), s_m(t), \theta_i(x,t) \right),
\end{aligned} \quad (2.8)$$

- warunek zgodności momentów skręcających (przy skręcaniu wałów lub łopatek turbinowych)

$$\begin{aligned}
& \mathfrak{N}_{ELi} \left( \theta_i(x,t), \theta_{i-1}(x,t) \right) + \mathfrak{N}_{INi} \left( \theta_i(x,t) \right) + \mathfrak{N}_{UNBi} \left( \theta_i(x,t), v_i(x,t), s_m(t), \Omega(t) \right) + \\
& + \mathfrak{N}_{DISi} \left( \mathfrak{R}_i(x,t) \right) + \mathfrak{N}_{CNTi} \left( v_i(x,t), \theta_i(x,t) \right) = \mathfrak{T}_{EXTi} \left( t, v_i(x,t), \theta_i(x,t) \right),
\end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\text{dla } x = \sum_{j=1}^{i-1} l_j, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

gdzie  $s_k(t)$  i  $s_m(t)$  są współrzędnymi uogólnionymi opisującymi ruch odpowiednich oscylatorów, a indeksy poszczególnych członów oznaczają siły lub momenty: EL – sprężyste, IN – bezwładnościowe, UNB – niewyrównowazenia, SUP – reakcji podparcia, CNT – kontaktowe, GYR – żyroskopowe, DIS – dyssypatywne oraz EXT – wymuszenia zewnętrznego. Pozostałe oznaczenia są identyczne jak w równaniach poprzednich. Równania te są równaniami różniczkowymi cząstkowymi lub cząstkowo-zwyczajnymi ze względu na możliwość ich sprzężenia z równaniami ruchu oscylatorów. Mogą one mieć człony liniowe, nieliniowe i parametryczne. Za pomocą tych związków wyrażone są wspomniane we „Wstępie” źródła nieliniowości bądź silnych nieliniowości typu lokalnego występujące zazwyczaj w maszynach i pojazdach. Ponadto, równania równowagi sił (2.7), momentów zginających (2.8) i momentów skręcających (2.9) mogą być ze sobą sprzężone, co zaznaczono za pomocą odpowiednich argumentów występujących w poszczególnych członach.

## 2.5 Uwagi dotyczące warunków początkowych ruchu opisanego dyskretno-ciągłymi modelami mechanicznymi

Zarówno równania różniczkowe zwyczajne opisujące ruch elementów modelu dyskretno-ciągłego o parametrach dyskretnych oraz równania różniczkowe cząstkowe opisujące ruch przekrojów poprzecznych lepko-sprężystych makroelementów ciągłych są rozwiązywane przy zadanych warunkach początkowych. Dobór konkretnej postaci warunków początkowych jest uzależniony od specyfiki badanego obiektu rzeczywistego, na przykład czy jest on konstrukcją lub układem mechanicznym, cech modelu mechanicznego, tj. liniowego, parametrycznego bądź nieliniowego, oraz od oczekiwanego charakteru drgań, tzn. czy przewidywany jest proces ustalony lub przejściowy. Najprostszą formą warunków początkowych są tzw. warunki zerowe na przemieszczenia i prędkości zakładające całkowity bezruch układu w chwili na przykład rozpoczynania symulacji drgań. Są one zadawane w wielu przypadkach konstrukcji i układów mechanicznych. Do symulacji ustalonych drgań liniowych i parametrycznych modeli dyskretnych

można wyznaczać warunki początkowe w sposób ścisły. Przykładowo, jedną ze znanych metod stosowanych w modelach liniowych jest rozwinięcie wymuszeń zewnętrznych w szereg Fouriera i wykorzystując zasadę superpozycji założenie ruchu układu w formie odpowiednich przebiegów harmonicznym, [92]. Rozwiązując otrzymywany w wyniku układ równań algebraicznych można wyznaczyć warunki początkowe ruchu ustalonego w zadanej chwili. Do wyznaczania warunków początkowych drgań ustalonych dyskretnych modeli parametrycznych można stosować metody badania stabilności układów periodycznych oparte na teorii Floqueta-Lapunowa i sprowadzające się do obliczania tzw. macierzy przejścia ich równań ruchu we współrzędnych stanu, [53]. Implementacja takich metod wyznaczania warunków początkowych ruchu modeli dyskretno-ciągłych wydaje się kłopotliwa ze względu na pracochłonność oraz na ścisłość otrzymywanych warunków tylko w przypadku ruchu ustalonego modeli liniowych lub parametrycznych. Dlatego do potrzeb symulacji drgań wymuszonych modeli dyskretno-ciągłych, szczególnie nieliniowych, korzystniejszym wydaje się stosowanie prostych warunków początkowych, konsekwencją czego jest powstawanie stanów przejściowych we wstępnym okresie symulacji, przechodzenie przez które staje się coraz mniej czasochłonne dzięki stale rosnącym mocom obliczeniowym współczesnych komputerów. Uzyskany w następstwie stan ustalony badanego procesu drgań może stanowić naturalną formę warunków początkowych drgań przejściowych będących w zadanym przypadku celem przeprowadzanych badań.

W związku z powyższym, oprócz wspomnianych powyżej warunków zerowych do mało złożonych warunków początkowych można zaliczyć warunki statyczne, kinetyczne oraz quasi-statyczne, które dają się sformułować za pomocą jednolitego zapisu

$$r_i(x,t) = r_{0i}(x), \quad \frac{\partial r_i(x,t)}{\partial t} = v_{0ri}(x), \quad s_k(t) = s_{0k}, \quad \frac{ds_k(t)}{dt} = v_{0sk} \quad \text{dla } t = 0, \quad (2.10)$$

gdzie  $r_i(x,t)$  oznacza przemieszczenie przekroju poprzecznego o współrzędnej przestrzennej  $x$  dla  $i$ -tego L-SMC, a  $s_k(t)$  jest współrzędną uogólnioną opisującą ruch  $k$ -tego elementu modelu o parametrach dyskretnych. Opierając się o zależności (2.10) można zdefiniować wymienione powyżej rodzaje warunków początkowych:

- W przypadku warunków statycznych zakładamy, że  $v_{0ri}(x)=0$  i  $v_{0sk}=0$ , tzn. układ jest w stanie bezruchu lecz pod wpływem obciążenia statycznego, na przykład grawitacyjnego w przypadku konstrukcji bądź wynikającego ze znamionowych warunków pracy układu mechanicznego w ruchu podstawowym. Wówczas funkcje  $r_{0i}(x)$  i stałe  $s_{0k}$  wyznaczamy za pomocą znanych metod statyki układów liniowych lub nieliniowych w zależności od konkretnego przypadku badanego obiektu.
- W przypadku warunków kinetycznych zakładamy, że  $r_{0i}(x)=0$  i  $s_{0k}=0$ , tzn. układ nie jest obciążony ani statycznie ani dynamicznie, lecz jego nieodkształcone elementy poruszają się jedynie z zadanymi prędkościami wynikającymi z warunków ruchu podstawowego, na przykład w przypadku układu drgającego skrętnie można założyć, że  $v_{0ri}(x)=\Omega_i=\text{const}$ , gdzie  $\Omega_i$  jest stałą początkową prędkością wirowania nieodkształconego skrętnie wału.
- W przypadku warunków quasistatycznych zakładamy, że  $r_{0i}(x)$ ,  $s_{0k}$ ,  $v_{0ri}(x)$ ,  $v_{0sk} \neq 0$ , tzn. układowi zadano zarówno wstępne obciążenia statyczne oraz początkowe prędkości jego elementów. W związku z powyższym, początkowe warunki quasistatyczne są połączeniem warunków statycznych i kinetycznych.

Tytułem podsumowania należy stwierdzić, że proponowane w pracy modele mechaniczne będące kombinacją elementów o parametrach rozłożonych w sposób ciągłych, tj. L-SMC, oraz elementów o parametrach dyskretnych, tzn. dyskretnych lepko-bezwładnościowo-sprężystych oscylatorów dynamicznych, dają w efekcie modele dyskretno-ciągłe zwane również modelami

hybrydowymi całymi badanymi obiektami rzeczywistymi. Przy zadanych warunkach początkowych liniowe równania różniczkowe cząstkowe (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) i (2.5) rozwiązywane z liniowymi geometrycznymi warunkami brzegowymi oraz z zazwyczaj nieliniowymi dynamicznymi warunkami brzegowymi (2.7), (2.8) i (2.9) sprzężonymi często z liniowymi bądź nieliniowymi równaniami ruchu oscylatorów (2.6) stanowią sformułowanie modelu matematycznego opisującego ruch dyskretno-ciągłych modeli mechanicznych.

### 3. Metodyka rozwiązywania problemu

W proponowanej w pracy metodyce modelowania i analizy dynamicznej wybranych układów mechanicznych i konstrukcji wykorzystywane są analityczne rozwiązania cząstkowych równań różniczkowych ruchu przekrojów poprzecznych lepko-sprężystych makroelementów ciągłych (L-SMC) przy zadanych, najczęściej złożonych geometrycznych i dynamicznych warunkach brzegowych. Wybór rozwiązania jest uzależniony od typu równania.

#### 3.1 Rozwiązanie falowe typu d'Alemberta

Falowe rozwiązanie analityczne typu d'Alemberta może być zastosowane do L-SMC prętowego, którego ruch przekrojów poprzecznych jest opisany hiperbolicznym równaniem ruchu (2.1) przy pominięciu tłumienia materiałowego, tj. przy  $\tau=0$ . Takie uproszczenie można uzasadnić niskim zazwyczaj poziomem tłumienia wielu materiałów konstrukcyjnych, w szczególności stali, oraz możliwością wprowadzenia materiałowego tłumienia zastępczego sprowadzonego do brzegów makroelementów, czyli do ich obydwu skrajnych przekrojów poprzecznych o współrzędnych  $x=0$  oraz  $x=l_i$  w lokalnym układzie  $Oxyz$ . Wówczas rozwiązań równań (2.1) dla  $\tau=0$  oraz przy warunkach początkowych (2.10) i zadanych warunkach brzegowych poszukujemy w postaci, [24, 26, 27, 31, 33, 34, 108, 118-122, 139-141, 173, 176, 177]:

$$\theta_i(x,t) = f_i(a(t-t_{0i}) - x + x_{0i}) + g_i(a(t-t_{0i}) + x - x_{0i}) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-x_{0i}-a(t-t_{0i}-\tau)}^{x-x_{0i}+a(t-t_{0i}-\tau)} q_i(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (3.1)$$

gdzie  $i=1,2,\dots,n$ ,  $a = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$  jest prędkością sprężystej fali podłużnej, poprzecznej lub skrętnej w zależności od typu makroelementu prętowego, funkcja  $f_i$  reprezentuje zaburzenie, odpowiednio podłużne, poprzeczne lub skrętne, przemieszczające się z prędkością  $a$  w kierunku zgodnym z osią  $Ox$  lokalnego układu współrzędnych lub z osią  $O'x'$  globalnego układu współrzędnych, rys. 2.5, a funkcja  $g_i$  reprezentuje falę przemieszczającą się z tą samą prędkością  $a$  w kierunku przeciwnym do osi  $Ox$  i  $O'x'$ . Stałe  $t_{0i}$  i  $x_{0i}$  występujące w argumentach tych funkcji oznaczają odpowiednio chwile czasu i położenie przekroju poprzecznego  $i$ -tego makroelementu prętowego, w których można zaobserwować dojście czoła fali pierwszego zaburzenia w tym makroelemencie. W przypadku argumentów ujemnych wartości funkcji wynikają z przyjętych warunków początkowych badanego procesu.

Ponieważ rozwiązania (3.1) spełniają równania ruchu (2.1) tożsamościowo, muszą one również spełniać geometryczne i dynamiczne warunki brzegowe przy zadanych warunkach początkowych by stanowiły ściśle rozwiązanie problemu. W związku z powyższym, zgodnie z pracami [118-122, 139-141, 171] należy podstawić (3.1) do równań warunków brzegowych przyjętego modelu dyskretno-ciągłego w celu wyprowadzenia odpowiednich zależności matematycznych będących najczęściej równaniami różniczkowymi zwyczajnymi i równaniami algebraicznymi z tzw. przesuniętym argumentem, na podstawie których można wyznaczać nieznane funkcje  $f_i$  i  $g_i$ . Wówczas, zgodnie z postacią rozwiązania falowego typu d'Alemberta (3.1) można otrzymywać odpowiedzi dynamiczne badanego obiektu wywołane przyjętymi źródłami zaburzeń. Jednak postać wspomnianych powyżej związków z przesuniętym argumentem, tj. równań różniczkowych zwyczajnych i równań algebraicznych, zależy od konkretnego przypadku modelu mechanicznego oraz od charakteru rozpatrywanego problemu, przez co wyprowadzenie ogólnej formuły dla tych równań wydaje się być niezwykle kłopotliwym ze względu na małą przejrzystość otrzymanego wyniku. Dlatego w celu lepszego zilustrowania specyfiki i konsekwencji stosowania rozwiązania falowego typu d'Alemberta równań ruchu (2.1) można przedstawić postać równań różniczkowych zwyczajnych i równań algebraicznych z przesuniętym argumentem przy typowych



najprostszych warunkach brzegowych opisujących przedstawione na rys. 2.5 lub 2.11 połączenie  $i-1$ -szego i  $i$ -tego L-SMC w następującej postaci:

- warunek geometrycznej zgodności przemieszczeń  $\theta_{i-1}(x,t) = \theta_i(x,t), \quad (3.2a)$

- warunek dynamicznej równowagi sił lub momentów

$$m_i \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial t^2} + \Gamma F_{0,i-1} \frac{\partial \theta_{i-1}(x,t)}{\partial x} - \Gamma F_{0i} \frac{\partial \theta_i(x,t)}{\partial x} + C_{i-1} \frac{\partial^2 \theta_{i-1}(x,t)}{\partial x \partial t} - C_i \frac{\partial^2 \theta_i(x,t)}{\partial x \partial t} + D_i \frac{\partial \theta_i(x,t)}{\partial t} = P_i(t, \theta_i(x,t)) \quad (3.2b)$$

$$\text{dla } x = \lambda_i = \sum_{j=1}^{i-1} l_j, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

gdzie  $m_i$  oznacza parametr masowy bryły sztywnej zamocowanej na połączeniu  $i-1$  szego i  $i$ -tego L-SMC, tj. masę lub biegunowy masowy moment bezwładności względem osi  $Ox$ ,  $F_{0,i-1}$ ,  $F_{0i}$  są parametrami geometrycznymi przekrojów poprzecznych tych makroelementów, tzn. polami powierzchni lub biegunowymi momentami bezwładności,  $C_{i-1}$ ,  $C_i$  oznaczają współczynniki opisanego modelem Kelvina-Voigta tłumienia materiałowego sprowadzonego do zastępczych momentów lub sił przyłożonych do przekrojów skrajnych  $i-1$  szego i  $i$ -tego makroelementu, [25, 26, 31, 33, 120-122, 176, 177],  $D_i$  jest współczynnikiem tłumienia zewnętrznego przyłożonego w formie skupionej w omawianym przekroju połączenia o współrzędnej  $x = \lambda_i$ , a  $P_i(t, \theta_i(x,t))$  oznacza działające w tym przekroju obciążenie zewnętrzne.

Przykładając w każdym przekroju poprzecznym o współrzędnej  $x = \lambda_i$  łączącym  $i-1$  szy i  $i$ -ty makroelement,  $i = 1, 2, \dots, n$ , obciążenie zewnętrzne mogące być źródłem zaburzeń, można założyć, że  $t_{0i} = 0$  i  $x_{0i} = \lambda_i$ . Wówczas, rozwiązania (3.1) jednorodnego równania (2.1), tj. dla  $q_i(x,t) = 0$ , przyjmują postać

$$\theta_i(x,t) = f_i(at - x + \sum_{j=1}^{i-1} l_j) + g_i(at + x - \sum_{j=1}^{i-1} l_j), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

Po podstawieniu (3.3) do warunków brzegowych (3.2) i po oznaczeniu w każdej równości największego argumentu przez  $z$ , otrzymujemy następujące równanie algebraiczne oraz równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu z przesuniętym argumentem

$$g_{i-1}(z) = -f_{i-1}(z - 2l_{i-1}) + f_i(z - l_{i-1}) + g_i(z - l_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (3.4a)$$

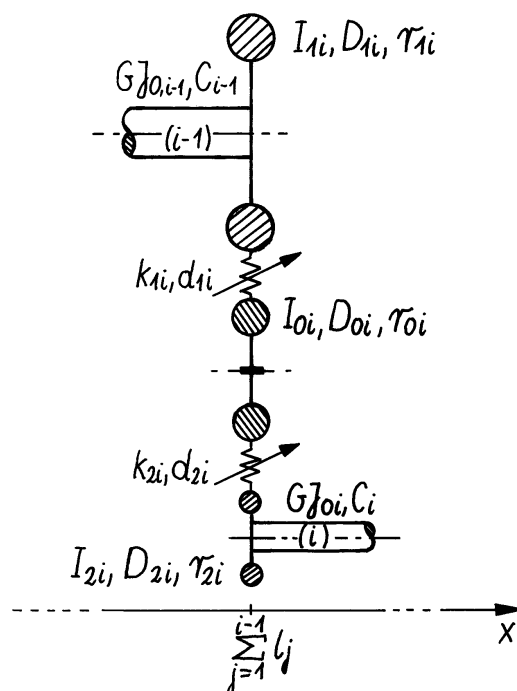
$$q_{2i} f_i''(z) + q_{1i} f_i'(z) = P_i(z) + s_{2i} g_i''(z) + s_{1i} g_i'(z) + t_{2i} f_{i-1}''(z - l_{i-1}) + t_{1i} f_{i-1}'(z - l_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.4b)$$

gdzie:  $q_{2i} = C_i + C_{i-1} + am_i$ ,  $q_{1i} = l_s [\Gamma F_{0i} + \Gamma F_{0,i-1} + aD_i] a^{-1}$ ,  $t_{2i} = 2C_{i-1}$ ,

$$s_{2i} = C_i - C_{i-1} - am_i, \quad s_{1i} = l_s [\Gamma F_{0i} - \Gamma F_{0,i-1} - aD_i] a^{-1}, \quad t_{1i} = 2l_s \Gamma F_{0,i-1} a^{-1},$$

a  $l_s$  [m] jest dowolną liczbą. Symbole „ $'$ ” i „ $''$ ” oznaczają odpowiednio pierwsze i drugie pochodne względem argumentu  $z$ . Układ równań (3.4) ma rozwiązanie analityczne w postaci wzorów rekurencyjnych, które uzyskano w pracach [118, 139, 171]. Rozwiązania te są rozwiązaniami ścisłymi, jednakże wykorzystanie ich do celów praktycznych jest kłopotliwe, zwłaszcza w przypadkach modeli mających większą całkowitą liczbę  $n$  makroelementów oraz przy dłuższych czasach symulacji. Wówczas, przy dokonywaniu obliczeń komputerowych następuje ogromne

wydłużenie czasu pracy maszyny cyfrowej przy konieczności wykorzystywania bardzo dużych obszarów jej pamięci. W związku z tym, wygodniej jest rozwiązywać równania różniczkowe (3.4b) numerycznie stosując do tego celu jedną ze znanych metod bezpośredniego całkowania, na przykład metodę Newmarka, Houboldta czy metodę różnic skończonych. Przesunięty argument będący konsekwencją przyjętej rozwiązaniem (3.3) falowej interpretacji zjawiska drgań występujący w członach stojących po prawych stronach równań (3.4) czyni te strony zawsze znanymi w kolejnych krokach numerycznego całkowania. Dzięki temu równania różniczkowe (3.4b) wraz z równaniami algebraicznymi (3.4a) można rozwiązywać sekwencyjnie, czyli jedno po drugim, każde z osobna w odpowiedniej kolejności, co bardzo istotnie ułatwia proces obliczeniowy, w przeciwieństwie do numerycznego całkowania układów sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych opisujących ruch analogicznych modeli dyskretnych. W efekcie uzyskuje się wielokrotne skrócenie czasu pracy komputera oraz większą stabilność numeryczną proponowanego algorytmu obliczeniowego, co zostanie zilustrowane w przykładach w dalszej części pracy.



Rys. 3.1 Dyskretno-ciągły model dwustopniowej przekładni zębatej do analizy drgań skrętnych

Jak wspomniano powyżej, przypadek warunków brzegowych (3.3) i otrzymanych w wyniku równań z przesuniętym argumentem (3.4) należy do najprostszych, gdzie opisując połączenie  $i-1$ -szego makroelementu z makroelementem  $i$ -tym jednym warunkiem geometrycznym (3.3a) i jednym warunkiem dynamicznym (3.3b) dostajemy jedno równanie algebraiczne z przesuniętym argumentem (3.4a) i jedno równanie różniczkowe zwyczajne drugiego rzędu z przesuniętym argumentem (3.4b). W praktyce inżynierskiej zachodzi zazwyczaj potrzeba modelowania układów złożonych wymagających przyjmowania bardziej skomplikowanych warunków brzegowych. Typowym przykładem może być dwustopniowa przekładnia zębata wchodząca w skład układu napędowego maszyny traktowanego jako drgający skrętnie. Dyskretno-ciągły model mechaniczny takiej przekładni przedstawia rys. 3.1. W tym modelu koła zębate potraktowano jako bryły sztywne o biegunowych masowych momentach bezwładności  $I_{1i}$ ,  $I_{0i}$ ,  $I_{2i}$ , odpowiednio koła napędzającego, pośredniego i napędzanego. Połączenie  $i-1$ -szego makroelementu z makroelementem  $i$ -tym jest realizowane przez bezmasowe elementy sprężysto-tłumiące reprezentujące obydwie zazębienia przekładni o nieliniowych charakterystykach wyrażonych zmiennymi sztywnościami  $k_{1i}$ ,  $k_{2i}$  i współczynnikami tłumienia  $d_{1i}$ ,  $d_{2i}$ . Wówczas, równaniem ruchu przekrojów poprzecznych L-SMC

reprezentujących wały jest równanie (2.1) dla  $\Gamma=G$ ,  $\mu=\rho$  i  $\tau=0$ , a połączenie tych makroelementów opisano za pomocą trzech dynamicznych warunków brzegowych:

$$\begin{aligned}
& I_{1i} \frac{\partial^2 \theta_{i-1}}{\partial t^2} + GJ_{0,i-1} \frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial x} + C_{i-1} \frac{\partial^2 \theta_{i-1}}{\partial t \partial x} + D_{1i} \frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial t} + r_{1i} k_{1i} (\Delta \theta_{1i}) [r_{1i} \theta_{i-1} - r_{0i} \theta_{0i}] + \\
& \quad + r_{1i} d_{1i} (\Delta \theta_{1i}) \left[ r_{1i} \frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial t} - r_{0i} \frac{d\theta_{0i}}{dt} \right] = M_i(t, \theta_{i-1}(x, t)), \\
& I_{0i} \frac{d^2 \theta_{0i}}{dt^2} + D_{0i} \frac{d\theta_{0i}}{dt} + r_{0i} k_{1i} (\Delta \theta_{1i}) [r_{0i} \theta_{0i} - r_{1i} \theta_{i-1}] + r_{0i} d_{1i} (\Delta \theta_{1i}) \left[ r_{0i} \frac{d\theta_{0i}}{dt} - r_{1i} \frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial t} \right] + \\
& \quad + r_{0i} k_{2i} (\Delta \theta_{2i}) [r_{0i} \theta_{0i} - r_{2i} \theta_i] + r_{0i} d_{2i} (\Delta \theta_{2i}) \left[ r_{0i} \frac{d\theta_{0i}}{dt} - r_{2i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right] = 0, \quad (3.5) \\
& I_{2i} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - GJ_{0i} \frac{\partial \theta_i}{\partial x} - C_i \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t \partial x} + D_{2i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + r_{2i} k_{2i} (\Delta \theta_{2i}) [r_{2i} \theta_i - r_{0i} \theta_{0i}] + \\
& \quad + r_{2i} d_{2i} (\Delta \theta_{2i}) \left[ r_{2i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} - r_{0i} \frac{d\theta_{0i}}{dt} \right] = 0 \quad \text{dla } x = \sum_{j=1}^{i-1} l_j,
\end{aligned}$$

gdzie:  $\Delta \theta_{1i} = \theta_{i-1}(x, t) - \theta_{0i}(t)$  i  $\Delta \theta_{2i} = \theta_{0i}(t) - \theta_i(x, t)$ .

W równaniach (3.5)  $\theta_{0i} = \theta_{0i}(t)$  oznacza współrzędną uogólnioną opisującą przemieszczenie kątowe pośredniego koła zębatego przekładni,  $M_i$  jest momentem sił zewnętrznych,  $r_{1i}$ ,  $r_{0i}$  i  $r_{2i}$  są promieniami kół podziałowych odpowiednio koła napędzającego, pośredniego i napędzanego,  $D_{1i}$ ,  $D_{0i}$  i  $D_{2i}$  oznaczają współczynniki momentów tłumienia bezwzględnych przyłożonych do tych kół, a  $J_{0,i-1}$  i  $J_{0i}$  są biegunowymi geometrycznymi momentami bezwładności przekrojów poprzecznych odpowiednio  $i-1$ -szego i  $i$ -tego makroelementu. Przyjmując rozwiązania równań ruchu w postaci (3.3) i podstawiając je do warunków brzegowych (3.5) oraz po oznaczeniu w każdej równości największego argumentu przez  $z$  otrzymujemy następujący układ trzech sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych z przesuniętym argumentem:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} p_{2i} & 0 & 0 \\ 0 & aI_{0i} & 0 \\ 0 & 0 & s_{2i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{i-1}''(z + l_{l-1}) \\ \theta_{0i}''\left(\frac{z}{a}\right) \\ f_i''(z) \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} p_{1i}(\Delta z_{1i}) & -r_{1i}r_{0i}d_{1i}(\Delta z_{1i}) & 0 \\ -r_{1i}r_{0i}d_{1i}(\Delta z_{1i}) & D_{0i} + r_{0i}^2(d_{1i}(\Delta z_{1i}) + d_{2i}(\Delta z_{2i})) & -r_{2i}r_{0i}d_{2i}(\Delta z_{2i}) \\ 0 & -r_{2i}r_{0i}d_{2i}(\Delta z_{2i}) & s_{1i}(\Delta z_{2i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{i-1}'(z + l_{l-1}) \\ \theta_{0i}'\left(\frac{z}{a}\right) \\ f_i'(z) \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} r_{1i}^2 \tilde{k}_{1i}(\Delta z_{1i}) & -r_{1i}r_{0i} \tilde{k}_{1i}(\Delta z_{1i}) & 0 \\ -r_{1i}r_{0i} \tilde{k}_{1i}(\Delta z_{1i}) & r_{0i}^2(\tilde{k}_{1i}(\Delta z_{1i}) + \tilde{k}_{2i}(\Delta z_{2i})) & -r_{2i}r_{0i} \tilde{k}_{2i}(\Delta z_{2i}) \\ 0 & -r_{2i}r_{0i} \tilde{k}_{2i}(\Delta z_{2i}) & r_{2i}^2 \tilde{k}_{2i}(\Delta z_{2i}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{i-1}(z + l_{l-1}) \\ \theta_{0i}\left(\frac{z}{a}\right) \\ f_i(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_0 \\ R_2 \end{bmatrix}, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

gdzie  $R_1 = \tilde{M}_1\left(\frac{z}{a}\right) - q_{2i}f''_{i-1}(z-l_{i-1}) + q_{1i}f'_{i-1}(z-l_{i-1}) - r_{1i}^2\tilde{k}_{1i}(\Delta z_{1i})$ ,

$$R_0 = r_{0i}r_{1i}\left(d_{1i}(\Delta z_{1i})f'_{i-1}(z-l_{i-1}) + \tilde{k}_{1i}(\Delta z_{1i})f_{i-1}(z-l_{i-1})\right) + r_{0i}r_{2i}\left(d_{2i}(\Delta z_{2i})g'_i(z) + \tilde{k}_{2i}(\Delta z_{2i})g'_i(z)\right)$$

$$R_2 = -u_{2i}g''_i(z) + u_{1i}g'_i(z) - r_{2i}^2\tilde{k}_{2i}(\Delta z_{2i})g_i(z), \quad \tilde{M}_i\left(\frac{z}{a}\right) = M_i\left(t, \theta_{i-1}(x, t)\right)a^{-1},$$

$$p_{2i} = aI_{1i} + C_{i-1}, \quad p_{1i}(\Delta z_{1i}) = GJ_{0,i-1}a^{-1} + D_{1i} + r_{1i}^2d_{1i}(\Delta z_{1i}),$$

$$q_{2i} = aI_{1i} - C_{i-1}, \quad q_{1i}(\Delta z_{1i}) = GJ_{0,i-1}a^{-1} - D_{1i} - r_{1i}^2d_{1i}(\Delta z_{1i}),$$

$$s_{2i} = aI_{2i} + C_i, \quad s_{1i}(\Delta z_{2i}) = GJ_{0i}a^{-1} + D_{2i} + r_{2i}^2d_{2i}(\Delta z_{2i}), \quad \tilde{k}_{1i}(\Delta z_{1i}) = k_{1i}(\Delta\theta_{1i})a^{-1},$$

$$u_{2i} = aI_{2i} - C_i, \quad u_{1i}(\Delta z_{2i}) = GJ_{0i}a^{-1} - D_{2i} - r_{2i}^2d_{2i}(\Delta z_{2i}), \quad \tilde{k}_{2i}(\Delta z_{2i}) = k_{2i}(\Delta\theta_{2i})a^{-1},$$

$$\Delta z_{1i} = f_{i-1}(z-l_{i-1}) + g_{i-1}(z+l_{i-1}) - \theta_{0i}\left(\frac{z}{a}\right), \quad \Delta z_{2i} = \theta_{0i}\left(\frac{z}{a}\right) - f_i(z) - g_i(z),$$

W trakcie wykonywania obliczeń numerycznych wykorzystując znane w każdym kroku całkowania wartości prawych stron równań (3.6), rozwiązuje się je wprawdzie jako sprzężone, lecz w odpowiedniej kolejności z pozostałymi równaniami z przesuniętym argumentem opisującymi ruch rozpatrywanego modelu mechanicznego, na przykład równaniami typu (3.4).

Rozwiązując sekwencyjnie w zadanym przedziale argumentu z równania z przesuniętym argumentem typu (3.4) lub (3.6) dla  $i=1,2,\dots,n$ , tzn. dotyczące całego modelu, oraz wykorzystując następnie rozwiązania (3.3) otrzymujemy przebiegi w czasie odpowiedzi dynamicznej badanego układu w dowolnych przekrojach poprzecznych L-SMC lub innych elementów modelu dyskretno-ciągłego, na przykład oscylatorów o parametrach dyskretnych. Za pomocą rozwiązania falowego typu d'Alemberta można efektywnie dokonywać symulacji drgań wymuszonych, w tym również drgań nieliniowych i parametrycznych, kiedy rozpatrywane w badanym układzie nieliniowości typu lokalnego opisano warunkami brzegowymi na przykład typu (3.5), czego konsekwencję w modelu matematycznym stanowią równania z przesuniętym argumentem typu (3.6). Jednak stosunkowo niski stopień poznania cech jakościowych równań różniczkowych zwyczajnych z przesuniętym argumentem nie pozwala na badanie drgań własnych czy analizę stateczności. Własności te proponowanych w pracy modeli dyskretno-ciągłych można wyznaczać przy wykorzystaniu metody rozdzielania zmiennych i rozwiązania Fouriera.

### 3.2 Rozwiązanie metodą rozdzielania zmiennych oraz metodą Fouriera

Rozwiązanie metodą rozdzielania zmiennych cząstkowych jednorodnych równań różniczkowych ruchu przekrojów poprzecznych wszystkich wymienionych w punkcie 2.2 typów lepko-sprężystych makroelementów ciągłych ma postać

$$r_i(x, t) = R_i(x) \cdot T(t) \quad \text{dla} \quad \sum_{k=1}^{i-1} l_k \leq x \leq \sum_{k=1}^i l_k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.7)$$

gdzie  $r_i(x, t)$  oznacza przemieszczenie przekroju poprzecznego o współrzędnej przestrzennej  $x$  w globalnym układzie współrzędnych,  $R_i(x)$  oznacza funkcję własną  $i$ -tego makroelementu, a  $T(t)$  jest funkcją czasu L-SMC i oscylatorów o parametrach dyskretnych wchodzących w skład modelu dyskretno-ciągłego. Postać analityczna funkcji własnej  $R_i(x)$  jak i metoda jej wyprowadzenia zależą od typu makroelementu.

**a). Funkcja własna lepko-sprężystego makroelementu prętowego**

Otrzymane w wyniku zastosowania metody rozdzielania zmiennych do jednorodnego równania (2.1), tj. przy  $q_i(x,t)=0$ , funkcja własna  $R_i(x)=\Theta_i(x)$  oraz funkcja czasu  $T(t)$  lepko-sprężystego makroelementu prętowego spełniają zależności:

$$\Theta_i''(x) + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \Theta_i(x) = 0 \quad \text{ i } \quad \cancel{R}(t) + \tau\omega^2 \cancel{R}(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad (3.8)$$

$\omega$  jest częstością drgań własnych badanego modelu, a  $a = \sqrt{\Gamma/\mu}$ . Stąd, funkcję własną równania (2.1) poszukujemy w następującej postaci

$$\Theta_i(x) = B_{1i} \sin\left(\frac{\omega}{a}x\right) + B_{2i} \cos\left(\frac{\omega}{a}x\right) \quad \text{ dla } \quad \sum_{k=1}^{i-1} l_k \leq x \leq \sum_{k=1}^i l_k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.9)$$

gdzie stałe  $B_{1i}, B_{2i}$  wyznaczane są zlinearyzowanymi warunkami brzegowymi typu (2.7) lub (2.9) opisującymi połączenia poszczególnych komponentów tworzących model dyskretno-ciągły rozpatrywanego obiektu.

**b). Funkcja własna lepko-sprężystego makroelementu belkowego**

Otrzymane w wyniku zastosowania metody rozdzielania zmiennych funkcje własne  $R_i(x)=V_i(x)$  makroelementów belkowych są w ogólnym przypadku funkcjami zespolonymi opisującymi drgania własne w dwóch płaszczyznach, tj. w płaszczyźnie  $Oxy$  i  $Oxz$ . Natomiast sposób wyznaczania funkcji własnej danego lepko-sprężystego makroelementu belkowego zależy od jego typu, a tym samym od postaci cząstkowego równania różniczkowego ruchu jego przekrojów poprzecznych.

W przypadku poddanego działaniu stałej siły osiowej  $P_i$  lepko-sprężystego makroelementu belkowego, którego ruch jest opisany jednorodnym równaniem Bernoulli'ego-Eulera (2.2), funkcja własna  $V_i(x)$  i funkcja czasu  $T(t)$  spełniają zależności:

$$V_i^{(IV)}(x) + \frac{P_i}{EI_i} V_i''(x) - (\varepsilon_i k)^4 V_i(x) = 0, \quad \cancel{R}(t) + e\omega^2 \cancel{R}(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad (3.10)$$

gdzie  $V_i(x) = U_i(x) + jW_i(x)$  i  $\varepsilon_i = 4\sqrt{\frac{A_i}{I_i}}$ ,  $k = 4\sqrt{\omega^2 \frac{\rho}{E}}$ , a  $U_i(x)$  i  $W_i(x)$  są składowymi funkcji

$V_i(x)$  odpowiednio w płaszczyźnie  $Oxy$  i  $Oxz$  globalnego układu współrzędnych  $Oxyz$ . Wykorzystując (3.10), funkcję własną równania (2.2) poszukujemy w następującej postaci

$$V_i(x) = A_{1i} \sin(k\kappa_i x) + A_{2i} \cos(k\kappa_i x) + A_{3i} \sinh(k\chi_i x) + A_{4i} \cosh(k\chi_i x) \quad (3.11)$$

dla  $\sum_{k=1}^{i-1} l_k \leq x \leq \sum_{k=1}^i l_k$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , gdzie  $A_{mi} = A_{mi}^{\text{Re}} + jA_{mi}^{\text{Im}}$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$ , oraz

$$\kappa_i = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{p_i^2 + 4(k\varepsilon_i)^4} + p_i \right]} \quad \text{ i } \quad \chi_i = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{p_i^2 + 4(k\varepsilon_i)^4} - p_i \right]}, \quad p_i = \frac{P_i}{EI_i}.$$

W przypadku wirującego makroelementu belkowego, którego przemieszczenia przekrojów poprzecznych są opisane równaniem (2.3) wynikającym z teorii zginania belki Rayleigha, stosując rozwiązanie metodą rozdzielania zmiennych do analizy sprężystych drgań własnych pomijamy tłumienie oraz obciążenie zewnętrzne zakładając:  $e=0$ ,  $c_{si}=0$  i  $q_i(x,t)=0$ . Wówczas, funkcja własna  $V_i(x)$  i funkcja czasu  $T(t)$  spełniają zależności:

$$V_i^{(IV)}(x) + k^2 \left[ k^2 - 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \right] V_i''(x) - \left( k^4 \varepsilon_i^4 - \frac{k_{si}}{EI_i} \right) V_i(x) = 0 \quad \text{ i } \quad \cancel{P}(t) + \omega^2 T(t) = 0, \quad (3.12)$$

przy pozostałych oznaczeniach jak w (3.10). Wykorzystując (3.12), funkcję własną w przypadku równania ruchu (2.3) poszukujemy w postaci (3.11), przy czym

$$\kappa_i = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left( k^2 - 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \right)^2 + 4 \left( \varepsilon_i^4 - \frac{k_{si}}{k^4 EI_i} \right)} + \left( k^2 - 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \right) \right]}$$

$$\text{ i } \quad \chi_i = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \sqrt{\left( k^2 - 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \right)^2 + 4 \left( \varepsilon_i^4 - \frac{k_{si}}{k^4 EI_i} \right)} - \left( k^2 - 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \right) \right]}.$$

Tłumienie jest uwzględniane przy analizie drgań wymuszonych, do której należy wyznaczyć bazę ortogonalnych funkcji własnych, co zostanie omówione w dalszej części rozdziału. Wówczas, rozwiązując (2.3) przy  $e \neq 0$ ,  $c_{si} = 0$  i  $q_i(x,t) = 0$  oraz pomijając siły żyroskopowe funkcja własna  $V_i(x)$  spełnia zależność (3.12) dla  $\Omega = 0$ , a funkcja czasu  $T(t)$  spełnia zależność (3.10).

Stosując metodę rozdzielania zmiennych do analizy sprężystych drgań własnych w przypadku wirującego makroelementu belkowego opisanego równaniem belki Timoshenki (2.4) postępujemy podobnie jak w przypadku makroelementu spełniającego teorię belki Rayleigha, tj. pomijając tłumienie oraz obciążenie zewnętrzne kładąc  $e = 0$ ,  $c_{si} = 0$  i  $q_i(x,t) = 0$ . Wówczas, funkcja czasu  $T(t)$  i funkcja własna  $V_i(x)$  spełniają zależności:

$$\cancel{P}(t) + \omega^2 T(t) = 0 \quad \text{ i } \quad V_i^{(IV)}(x) + k^2 \left[ k^2 \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) - 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} - \frac{k_{si}}{k^2 \kappa G A_i} \right] V_i''(x) - \left[ k^4 \left( \varepsilon_i^4 + \frac{k_{si}}{\kappa G A_i} \right) - k^6 \frac{E}{\kappa G} \left( k^2 - 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \right) - \frac{k_{si}}{EI_i} - k^2 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{k_{si}}{\kappa G A_i} \right] V_i(x) = 0. \quad (3.13)$$

W równaniu belki Timoshenki funkcja własna ma postać identyczną z (3.11), kiedy odpowiada częstościom należącym do tzw. pierwszego pasma drgań, [42, 170]. Wówczas

$$\kappa_i = \sqrt{\frac{1}{2} K_i} \quad \text{ i } \quad \chi_i = \sqrt{\frac{1}{2} X_i}, \quad (3.13a)$$

gdzie:

$$K_i = \sqrt{\Delta_i} + \left[ k^2 \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) - 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} - \frac{k_{si}}{k^2 \kappa G A_i} \right] \quad \text{ i } \quad X_i = \sqrt{\Delta_i} - \left[ k^2 \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) - 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} - \frac{k_{si}}{k^2 \kappa G A_i} \right],$$

$$\Delta_i = \left[ k^2 \left( 1 + \frac{E}{\kappa G} \right) - 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} - \frac{k_{si}}{k^2 \kappa G A_i} \right]^2 + 4 \left[ \varepsilon_i^4 - \frac{k_{si}}{k^4 EI_i} - k^2 \frac{E}{\kappa G} \left( k^2 - 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \right) + \frac{k_{si}}{\kappa G A_i} \left( 1 - 2\Omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} \frac{1}{k^2} \right) \right],$$

przy czym musi być spełniony warunek:  $X_i \geq 0$ . Natomiast w przypadku  $X_i < 0$  w (3.13a) zamiast pierwiastków rzeczywistych otrzymywane są dodatkowe urojone pierwiastki równania charakterystycznego równania ruchu belki Timoshenki (2.4), w konsekwencji czego wyznaczone zostają częstości drgań własnych należące do tzw. drugiego pasma drgań, [42, 170]. Wtedy funkcja własna przyjmuje następującą postać

$$V_i(x) = A_{1i} \sin(k\kappa_i x) + A_{2i} \cos(k\kappa_i x) + A_{3i} \sin(k\chi_i x) + A_{4i} \cos(k\chi_i x)$$

dla  $\sum_{k=1}^{i-1} l_k \leq x \leq \sum_{k=1}^i l_k$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , gdzie  $A_{mi} = A_{mi}^{\text{Re}} + jA_{mi}^{\text{Im}}$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$ .

### c). Funkcja własna lepko-sprężystego makroelementu giętno-skrętnego

Rozwiązanie metodą rozdzielenia zmiennych jednorodnych równań ruchu (2.5) przekrojów poprzecznych lepko-sprężystego makroelementu giętno-skrętnego wygodnie jest przedstawić w formie rzeczywistej

$$u_i(x, t) = U_i(x) \cdot T(t), \quad w_i(x, t) = W_i(x) \cdot T(t) \quad \text{i} \quad \theta_i(x, t) = \Theta_i(x) \cdot T(t) \quad \text{dla} \quad \sum_{k=1}^{i-1} l_k \leq x \leq \sum_{k=1}^i l_k, \\ i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.14)$$

gdzie składowe funkcji własnej, odpowiednio  $U_i(x)$  opisującej zginanie w płaszczyźnie  $Oxy$ ,  $W_i(x)$  opisującej zginanie w płaszczyźnie  $Oxz$  i  $\Theta_i(x)$  opisującej skręcanie, oraz funkcja czasu  $T(t)$  spełniają zależności:

$$\begin{aligned} I_{zi} U_i^{(IV)}(x) + I_{yzi} W_i^{(IV)}(x) - \psi_{0i} I_{pzi} \Theta_i'''(x) + k^4 I_{zi} U_i''(x) + k^4 I_{yzi} W_i''(x) - \\ - k^4 A_i U_i(x) - k^4 c_{yi} A_i \Theta_i(x) = 0, \\ I_{yzi} U_i^{(IV)}(x) + I_{yi} W_i^{(IV)}(x) - \psi_{0i} I_{pyi} \Theta_i'''(x) + k^4 I_{yzi} U_i''(x) + k^4 I_{yi} W_i''(x) - \\ - k^4 A_i W_i(x) + k^4 c_{zi} A_i \Theta_i(x) = 0, \\ I_{\omega i} \Theta_i^{(IV)}(x) + \psi_{0i} I_{pzi} U_i'''(x) + \psi_{0i} I_{pyi} W_i'''(x) - H_i^* \Theta_i''(x) - k^4 F_i \Theta_i(x) - \\ - k^4 c_{yi} A_i U_i(x) + k^4 c_{zi} A_i W_i(x) = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

i  $\ddot{T}(t) + e\omega^2 \dot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0$ , gdzie  $k = 4\sqrt{\omega^2 \frac{\rho}{E}}$ .

Rozwiązania układu równań (3.15) poszukujemy w postaci:

$$U_i(x) = \alpha_i e^{kr_i x}, \quad W_i(x) = \beta_i e^{kr_i x}, \quad \Theta_i(x) = \gamma_i e^{kr_i x}, \quad (3.16)$$

gdzie  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$ , są dowolnymi stałymi,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Po podstawieniu rozwiązań (3.16) do równań (3.15) otrzymujemy następujący układ równań

$$\begin{bmatrix} k(r_i^2 I_{zi}(r_i^2 + k^2) - A_i) & kr_i^2 I_{yzi}(r_i^2 + k^2) & -(\psi_{0i} I_{pzi} r_i^3 + kc_{yi} A_i) \\ kr_i^2 I_{yzi}(r_i^2 + k^2) & k(r_i^2 I_{yi}(r_i^2 + k^2) - A_i) & -(\psi_{0i} I_{pyi} r_i^3 - kc_{zi} A_i) \\ -(\psi_{0i} I_{pzi} r_i^3 - kc_{yi} A_i) & -(\psi_{0i} I_{pyi} r_i^3 + kc_{zi} A_i) & k^{-1} H_i^* r_i^2 + k(F_i - r_i^4 I_{\omega i}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \\ \gamma_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Warunkiem koniecznym rozwiązania równania (3.17) jest zerowanie się jego wyznacznika charakterystycznego. Otrzymujemy wówczas wielomian 12 rzędu ze względu na niewiadome  $r_i$ . Pierwiastki tego wielomianu wyznaczamy numerycznie za pomocą znanych procedur bibliotecznych, na przykład z [148], z zadaną dokładnością. Następnie, dla każdego pierwiastka  $r_i$  obliczane są współczynniki  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  przyjmując jednostkowe wartości jednego z tych współczynników. Wtedy, poszukujemy składowych funkcji własnej lepko-sprężystego makroelementu giętno-skrętnego w postaci:

$$U_i(x) = \sum_{j=1}^{12} \alpha_{ij} C_{ij} f_{ij}(x), \quad W_i(x) = \sum_{j=1}^{12} \beta_{ij} C_{ij} f_{ij}(x), \quad \Theta_i(x) = \sum_{j=1}^{12} \gamma_{ij} C_{ij} f_{ij}(x). \quad (3.18)$$

Funkcje  $f_{ij}(x)$  są elementarnymi funkcjami analitycznymi: wykładniczymi, harmonicznymi oraz iloczynami funkcji wykładniczej lub harmonicznej z funkcją potęgową zmiennej  $x$ , w zależności od krotności pierwiastków równania charakterystycznego i ich rodzaju, tzn. czy są one rzeczywiste lub zespolone. Postaci tych funkcji dobieramy według elementarnej teorii rozwiązywania równań różniczkowych zwyczajnych wyższych rzędów, [134]. Nieznane stałe  $C_{ij}$ ,  $j=1,2,\dots,12$ , wyznaczamy z ogólnie 12 warunków brzegowych dla  $i$ -tego lepko-sprężystego makroelementu giętno-skrętnego.

#### d). Uwagi dotyczące zastosowania metody rozdzielania zmiennych

Przedstawione w punktach 3.2 a, b i c funkcje własne poszczególnych L-SMC są funkcjami lokalnymi przyporządkowanymi każdemu  $i$ -temu makroelementowi modelu dyskretno-ciągłego. Wyznaczanie globalnych funkcji własnych całego modelu następuje po wzajemnym łączeniu ze sobą odpowiednich L-SMC wraz z elementami o parametrach dyskretnych, tzn. oscylatorów lepko-bezwładnościowo sprężystych, zgodnie ze strukturą badanego obiektu. Należy w tym miejscu podkreślić, że w przeciwieństwie do rozwiązania falowego typu d'Alemberta, za pomocą którego można dokonywać analizy drgań wymuszonych drogą symulacji komputerowej, zastosowanie metody rozdzielania zmiennych wraz z wyznaczaniem funkcji własnych pozwala na przeprowadzanie analizy drgań własnych, swobodnych, wymuszonych oraz innych badań jakościowych, o których będzie mowa w dalszej części pracy.

### 3.2.1 Zastosowanie metody rozdzielania zmiennych do analizy drgań własnych

Analiza drgań własnych tłumionych i nietłumionych jest podstawowym rodzajem jakościowych badań dynamicznych układu mechanicznego i konstrukcji, pozwalającym na ocenę możliwości powstawania rezonansów oraz na określenie stref rzeczywistego obiektu, gdzie mogą występować największe towarzyszące tym rezonansom amplitudy przemieszczeń i odkształceń. Jak zostanie następnie pokazane, wyniki tej analizy mogą stanowić podstawę do symulacji drgań wymuszonych oraz dalszych badań jakościowych. Analizę drgań własnych przeprowadza się zazwyczaj dla układu zlinearyzowanego, uwolnionego od obciążeń zewnętrznych oraz od sił dyssypatywnych w przypadku badania drgań nietłumionych.

Ponieważ w modelu matematycznym przyjętego modelu dyskretno-ciągłego cząstkowe równania różniczkowe ruchu przekrojów poprzecznych L-SMC (2.1)÷(2.5) są równaniami liniowymi, w celu dokonania analizy drgań własnych należy zlinearyzować równania dynamicznych warunków brzegowych (2.7), (2.8), (2.9) oraz sprzężone z nimi równania różniczkowe zwyczajne (2.6) opisujące ruch elementów o parametrach dyskretnych. W tym celu pomijamy występujące w tych związkach człony wymuszenia zewnętrznego oraz w przypadku drgań nietłumionych pomijamy również wszelkie człony dyssypatywne. Ponadto, wszystkie człony nieliniowe i parametryczne rozbijamy na dwie składowe przykładowo w następujący sposób

$$F(\Delta v(x,t), t) \cdot \Xi(\Delta v(x,t)) = F_{av}(\Delta v(x,t)) + F_{var}(\Delta v(x,t), t), \quad (3.19)$$



gdzie :

$$\begin{aligned} F_{av}(\Delta v(x,t)) &= f_{av} \cdot \Xi(\Delta v(x,t)), \\ F_{var}(\Delta v(x,t),t) &= f_{var}(\Delta v(x,t),t) \cdot \Xi(\Delta v(x,t)). \end{aligned} \quad (3.20)$$

W związkach (3.19), (3.20) symbol  $F(\Delta v(x,t),t)$  jest nieliniową bądź parametryczną charakterystyką sprężystą, dyssypatywną lub bezwładnościową wyrażoną jako funkcja czasu i odpowiedzi dynamicznej układu otrzymaną w wyniku stosowanego powszechnie podejścia przyrostowego,  $\Delta v(x,t)$  oznacza różnicę odpowiednich współrzędnych uogólnionych badanego modelu mechanicznego,  $\Xi$  jest operatorem różniczkowym względem czasu i współrzędnej przestrzennej, którego rząd nie przekracza na ogół rzędu cząstkowego równania ruchu makroelementu, a  $f_{av} = \text{const.}$  i  $f_{var}(\Delta v(x,t),t)$  są odpowiednio stałą i zmienną charakterystyką sprężystą, dyssypatywną lub bezwładnościową wyznaczoną w wyniku przeprowadzonego rozbicia. Uzyskane wskutek rozdzielenia (3.19) części nieliniowe i parametryczne  $F_{var}(\Delta v(x,t),t)$  pomijamy w analizie drgań własnych, natomiast pozostawiamy je w niezminionej postaci do analizy drgań wymuszonych, co zostanie opisane w następnym punkcie. Do otrzymanych w ten sposób zlinearyzowanych równań dynamicznych warunków brzegowych (2.7), (2.8), (2.9) oraz do zazwyczaj liniowych równań geometrycznych warunków brzegowych podstawiamy rozwiązania (3.7), a w następnym kroku postacię rozwiązań odpowiednich funkcji własnych (3.9), (3.11) lub (3.18). Z kolei do zlinearyzowanych równań ruchu (2.6) elementów o parametrach dyskretnych stosujemy rozwiązania problemów własnych opisanych równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. W wyniku otrzymujemy następujący układ równań algebraicznych

$$\mathbf{A}(\omega) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}, \quad (3.21)$$

gdzie  $\mathbf{A}(\omega)$  oznacza macierz charakterystyczną będącą ogólnie funkcją częstości drgań własnych badanego obiektu, a  $\mathbf{B}$  jest wektorem, którego składowymi są nieznanne stałe współczynniki w wyrażeniach na funkcje własne (3.9), (3.11) i (3.18) oraz elementy wektorów własnych zlinearyzowanych równań różniczkowych zwyczajnych (2.6). Kolejne częstości drgań własnych badanego obiektu  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$  są pierwiastkami równania charakterystycznego otrzymywanego z warunku zerowania się wyznacznika macierzy  $\mathbf{A}(\omega)$ . Odpowiadające tym częstościom globalne funkcje własne wyznaczamy obliczając nieznanne składowe wektora  $\mathbf{B}$  drogą rozwiązywania układu równań (3.21).

Za pomocą jednego równania macierzowego (3.21) sformułowano ogólnie problem własny modelu dyskretno-ciągłego badanego układu mechanicznego bądź konstrukcji, gdzie wszystkie rozpatrywane w nim rodzaje drgań są ze sobą sprzężone. Jednak w wyniku przeprowadzonej linearyzacji równań dynamicznych warunków brzegowych (2.7), (2.8), (2.9), równań różniczkowych zwyczajnych (2.6) oraz na przykład pominięcia członów dyssypatywnych poszczególne rodzaje drgań mogą ulec wzajemnemu rozsprzężeniu. Wówczas, problem własny sformułowany równaniem (3.21) zostaje podzielony na kilka problemów własnych opisanych odpowiednio osobnymi układami równań algebraicznych przyporządkowanymi, na przykład:

$$\begin{aligned} - \text{drganiami giętnym} & \quad \mathbf{C}(\omega) \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}, \\ - \text{drganiami skrętnym} & \quad \mathbf{E}(\omega) \cdot \mathbf{F} = \mathbf{0}, \\ - \text{drganiami translacyjnym oscylatorów dyskretnych, ruch których opisany jest zlinearyzowanymi} \\ & \quad \text{równaniami różniczkowymi (2.6)} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$(\mathbf{K}_T - \omega^2 \mathbf{M}_T) \cdot \mathbf{H} = \mathbf{0}. \quad (3.22a)$$

W związkach (3.22)  $\mathbf{C}(\omega)$ ,  $\mathbf{E}(\omega)$  są macierzami charakterystycznymi, składowymi wektora  $\mathbf{D}$  są nieznanne stałe współczynniki występujące w wyrażeniu opisującym lokalne funkcje własne makroelementów belkowych (3.11), a składowymi wektora  $\mathbf{F}$  są nieznanne stałe współczynniki występujące w wyrażeniu (3.9) opisującym lokalną funkcję własną makroelementu prętowego. W równaniu (3.22a)  $\mathbf{M}_T$  i  $\mathbf{K}_T$  są odpowiednio macierzami bezwładności i sztywności

zlinearyzowanego równania (2.6), a  $\mathbf{H}$  jest klasycznym wektorem własnym standardowego zagadnienia własnego układu dyskretnego.

### 3.2.2 Zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera do analizy drgań wymuszonych

Zastosowanie metody rozdzielenia zmiennych do analizy drgań wymuszonych sprowadza się do wykorzystywania rozwiązań Fouriera do równań ruchu (2.1)-(2.5) przekrojów poprzecznych lekko-sprężystych makroelementów ciągłych. Rozwiązania te mają postać nieskończonych szeregów rozwinięć względem ortogonalnych funkcji własnych otrzymanych za pomocą analizy drgań własnych nietłumionych układu zlinearyzowanego i pozbawionego członów niesymetrycznych, na przykład opisujących efekty żyroskopowe. Rozwiązania Fouriera dla przemieszczeń  $r_i(x,t)$   $i$ -tego L-SMC mają następującą postać:

$$r_i(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} R_{im}(x) \xi_m(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.23)$$

gdzie  $R_{im}(x)$  oznaczają ortogonalne funkcje własne, a  $\xi_m(t)$  są nieznanymi funkcjami czasu. Rozwiązania równań ruchu (2.6) we współrzędnych uogólnionych  $s_k(t)$  elementów o parametrach dyskretnych przyjmujemy również w postaci szeregów rozwinięć względem ortogonalnych wektorów własnych  $S_{km}$

$$s_k(t) = \sum_{m=1}^{\infty} S_{km} \xi_m(t), \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (3.24)$$

co sprowadza się do przetransformowania zlinearyzowanej i ortogonalnej części (2.6) do współrzędnych głównych.

W następnym kroku analizy drgań wymuszonych wszystkie chwilowo pominięte równaniach ruchu (2.1)-(2.6) oraz w warunkach brzegowych (2.7)-(2.9) człony nieliniowe, parametryczne typu  $F_{\text{var}}(\Delta v(x,t), t)$  w (3.20), człony tłumienia zewnętrznego i niesymetryczne zostają potraktowane jako obciążenia zewnętrzne będące funkcjami odpowiedzi układu przyłożone w formie skupionych  $P_k(t, s_k(t))$  bądź rozłożonych w sposób ciągły  $p_i(x, t, v_i(x, t))$  sił lub momentów, gdzie  $i=1, 2, \dots, n$  i  $k=1, 2, \dots, K$  są numerami odpowiedniego makroelementu i współrzędnej uogólnionej. Obciążenia te transformowane są do wspomnianej ortogonalnej bazy funkcji lub wektorów własnych przy wykorzystaniu znanych formuł:

$$H_m(t, r(x, t)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} p_i(x, t, r_i(x, t)) R_{im}(x) dx$$

$$\text{lub } H_m(t, s(t)) = \sum_{k=1}^K \frac{G_{km}}{\gamma_m^2} P_k(t, s_k(t)), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (3.25)$$

gdzie  $H_m$  jest otrzymanym uogólnionym obciążeniem zewnętrznym przyporządkowanym  $m$ -tej postaci drgań,  $R_{im}(x)$  oznacza funkcję własną  $i$ -tego makroelementu, wzdłuż którego rozłożone jest obciążenie  $p_i(x, t, v_i(x, t))$ ,  $G_{km}$  jest elementem wektora własnego  $S_{km}$  lub wartością funkcji własnej  $R_{im}(x)$  odpowiadającymi współrzędnej uogólnionej, do której przyłożono obciążenie skupione  $P_k(t, s_k(t))$ , a  $\gamma_m^2$  oznacza masę modalną wyznaczoną z warunku ortogonalności funkcji i wektorów własnych badanego układu dyskretno-ciągłego.

Wyprowadzone w kolejnym kroku postępowania wyrażenia na energię potencjalną, kinetyczną i dyssypacji układu zlinearyzowanego oraz pozbawionego członów niesymetrycznych, dzięki ortogonalności funkcji i wektorów własnych stają się formami kwadratowymi nieznanymi funkcji czasu  $\xi_m(t)$  w szeregach (3.23) i (3.24). Wykorzystując następnie równania Lagrange'a

drugiego rodzaju i wprowadzając do nich uogólnione obciążenia zewnętrzne (3.25) dostajemy układ nieliniowych i parametrycznych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu:

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{C}(\Omega, t, \mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}(t, r(t))\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t, \Omega^2, \mathbf{r}(t)), \quad (3.26)$$

gdzie:  $\mathbf{M}(t) = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_p(t)$ ,  $\mathbf{C}(\Omega, t, \mathbf{r}(t)) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_g(\Omega) + \mathbf{C}_p(t) + \mathbf{C}_r(\mathbf{r}(t), r(t))$

i  $\mathbf{K}(t, r(t)) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_p(t) + \mathbf{K}_r(r(t))$ .

W układzie równań (3.26) symbole  $\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{K}_0$  oznaczają odpowiednio stałe diagonalne modalne macierze bezwładności i sztywności,  $\mathbf{C}_0$  jest stałą symetryczną macierzą tłumienia, a  $\mathbf{C}_g(\Omega)$  oznacza antysymetryczną macierz efektów żyroskopowych. Efekty parametryczne w równaniach (3.26) są wyrażone składowymi macierzami  $\mathbf{M}_p(t)$ ,  $\mathbf{C}_p(t)$  i  $\mathbf{K}_p(t)$ . Składowe macierze  $\mathbf{C}_r(v_0 t, \mathbf{r}(t), Q(t))$  i  $\mathbf{K}_r(r(t))$  opisują własności nieliniowe i antysymetryczne,  $\mathbf{F}(t, \Omega^2, \mathbf{r}(t))$  oznacza wektor wymuszenia zewnętrznego pochodzącego od sił i momentów będących zadanymi funkcjami czasu, funkcjami odśrodkowych sił bezwładności oraz funkcjami odpowiedzi badanego układu, a składowymi wektora  $\mathbf{r}(t)$  są nieznanne funkcje czasu  $\xi_m(t)$  występujące w szeregach (3.23) i (3.24). Należy przypomnieć, iż w efekcie stosowania przy dostatecznie małych przemieszczeniach podejścia przyrostowego do członów nieliniowych w związkach (2.7), (2.8), (2.9) oraz przy ich rozbiciu zgodnie z (3.19), członki te wyrażają się jako funkcje odpowiedzi dynamicznej badanego układu w postaci (3.20). Wówczas zostają one umieszczane po lewej stronie równań (3.26), tzn. w odpowiednich macierzach  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{K}$ . W analogiczny zostają traktowane członki parametryczne, tłumienia zewnętrznego, czy niesymetryczne, jeżeli one również wyrażają się jako funkcje odpowiedzi dynamicznej badanego układu. Teoretycznie, liczba równań (3.26) jest nieskończona, lecz udowodniona szybka zbieżność szeregów (3.23) i (3.24) uzyskiwana dzięki analitycznym funkcjom własnym tworzącym ortogonalną bazę, do której transformujemy wszelkie obciążenia zewnętrzne, członki nieliniowe, antysymetryczne, tłumienia zewnętrznego i inne, pozwala na otrzymywanie dostatecznie dokładnego do celów technicznych rozwiązania przy ograniczeniu do skończonej liczby  $N$  równań. W praktyce liczba ta wynosi od kilkunastu, dwudziestu kilku, lub w przypadkach modeli bardziej złożonych - do kilkudziesięciu. W celu uzyskania odpowiedzi dynamicznej badanego układu mechanicznego równania (3.26) rozwiązujemy numerycznie stosując znane metody bezpośredniego całkowania nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych dobierając je w zależności od specyfiki rozpatrywanego przypadku.

Przedstawiony układ równań (3.26) ma charakter dość przykładowy, ponieważ trudno byłoby go zapisać w sposób ogólny, biorąc pod uwagę wszystkie własności szerokiej klasy układów mechanicznych mogących być obiektem badań przy wykorzystaniu proponowanego podejścia. Istotna jest tu przede wszystkim ogólna zasada rozwiązania, a każda rozpatrywana własność, tzn. rodzaj wymuszenia, zadany typ lub źródło nieliniowości, rodzaj tłumienia itp., może znaleźć swoją reprezentację w równaniach (3.26) w formie odpowiednich podmacierzy macierzy  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  i  $\mathbf{K}$  oraz wektora  $\mathbf{F}$ .

### 3.2.3 Wyznaczanie funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF) rozważanych układów

Metoda rozdzielenia zmiennych i rozwiązanie Fouriera zastosowane w przedstawionym dotychczas podejściu pozwalają na przeprowadzenie analizy jakościowej w postaci badania drgań własnych układu zlinearyzowanego oraz analizy ilościowej za pomocą symulacji nieliniowych drgań wymuszonych. Bardziej wnikliwym sposobem poznawania cech jakościowych badanego obiektu, szczególnie jego wrażliwości na możliwość wzbudzenia poszczególnych rezonansów z uwzględnieniem tłumienia, jest wyznaczanie funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (ang. frequency response function (FRF)) na podstawie równań (3.26). W tym celu należy dokonać

właściwej linearyzacji równań (3.26) poprzez uśrednienie odpowiednich charakterystyk nieliniowych i parametrycznych, na przykład zgodnie z (3.19), oraz wprowadzając harmoniczne wymuszenia zewnętrzne o jednostkowych amplitudach. Wówczas układ równań (3.26) upraszcza się do następującej postaci:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(\omega t), \quad (3.27)$$

gdzie macierz tłumieniowo-żyroskopowa  $\mathbf{C}$  i macierz sztywności  $\mathbf{K}$  są macierzami stałymi o wymiarze  $N \times N$ , a macierz bezwładności  $\mathbf{M}$  również o wymiarze  $N \times N$ , staje się macierzą stałą i diagonalną. Wtedy w przypadku działania harmonicznego wymuszenia zewnętrznego o częstotliwości  $\omega$  można założyć następującą postać rozwiązania:

$$r_i(t) = C_i \cos(\omega t) + S_i \sin(\omega t) \quad \text{i} \quad F_i(\omega t) = \sum_j V_{ji} (f_{Cj} \cos(\omega t) + f_{Sj} \sin(\omega t)), \quad (3.28)$$

gdzie:  $\sqrt{f_{Cj}^2 + f_{Sj}^2} = 1, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $C_j, S_j$  są nieznanymi współczynnikami, a  $V_{ji}$  oznaczają wartości odpowiednich funkcji własnych, względem których w proponowanej metodzie rozwinięto wszystkie człony wymuszające. Wprowadzenie rozwiązań (3.28) do równań (3.27) prowadzi do układu  $2N$  liniowych równań algebraicznych

$$\mathbf{H}(\omega) \cdot \mathbf{A} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (3.29)$$

gdzie  $\mathbf{H}(\omega)$  jest tzw. odwrotną macierzą funkcji odpowiedzi częstotliwościowej o wymiarze  $2N \times 2N$ , a

$$\mathbf{A} = \text{col}[C_1, C_2, \dots, C_N, S_1, S_2, \dots, S_N], \quad \tilde{\mathbf{F}} = \text{col}[f_{C1}, f_{C2}, \dots, f_{CN}, f_{S1}, f_{S2}, \dots, f_{SN}].$$

Zgodnie z zastosowanym w proponowanym podejściu rozwiązaniem Fouriera w formie szeregów względem ortogonalnych funkcji i wektorów własnych, wartości odpowiednich funkcji odpowiedzi częstotliwościowej są poszukiwane w następującej postaci:

$$h_j(\omega) = \sum_i V_{ij} \sqrt{C_i^2(\omega) + S_i^2(\omega)}, \quad (3.30)$$

gdzie współczynniki  $C_i(\omega)$  i  $S_i(\omega)$  otrzymujemy rozwiązując układ równań (3.29) w zadanym zakresie częstotliwości  $\omega$ .

### 3.2.4 Uwagi dotyczące analizy stateczności badanego układu mechanicznego

Zastosowanie rozwiązania Fouriera prowadzące do układu równań różniczkowych zwyczajnych (3.26) daje również możliwość przeprowadzenia analizy jakościowej w formie badania stateczności rozpatrywanego obiektu. Wówczas, analizy stateczności można dokonywać przy wykorzystaniu opisanych w literaturze, na przykład w [92, 164], metod stosowanych do liniowych, parametrycznych i nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych. Szczególnie istotnym kryterium oceny stateczności modelu dyskretno-ciągłego jest badanie części rzeczywistych wartości własnych zlinearyzowanego układu równań (3.26), na przykład sprowadzonego do postaci jednorodnego układu (3.27).

## 4. Zastosowanie rozwiązania falowego typu d'Alemberta

Rozwiązanie falowe typu d'Alemberta (3.1) można wykorzystywać jedynie do prętowych lepko-sprężystych makroelementów ciągłych (L-SMC), których ruch przekrojów poprzecznych opisuje równanie (2.1) przy  $\tau=0$ . Jak wspomniano powyżej, ten rodzaj makroelementu może być zastosowany do układów mechanicznych drgających skrętnie, tj. dla  $\Gamma=G$  i  $\mu=\rho$ , podłużnie, tzn. dla  $\Gamma=E$  i  $\mu=\rho$ , oraz do układów strunowych drgających poprzecznie, gdy (2.1) przybiera postać równania ruchu struny, gdzie  $\Gamma$  oznacza wtedy naciąg struny  $T$ , a  $\mu$  jest masą jednostkową struny. Spośród wymienionych trzech rodzajów drgań w praktyce inżynierskiej do najczęstszych przypadków analiz należą układy wirujące, które wykonują drgania skrętne, oraz układy strunowe drgające poprzecznie. Dlatego więc te dwa rodzaje drgań będą przedmiotem rozważań nad modelami dyskretno-ciągłymi przy wykorzystaniu rozwiązania falowego typu d'Alemberta. Natomiast układy mechaniczne drgające podłużnie, na przykład układy napędu statków lub zestawy kołowe pojazdów szynowych wykonujące także ruchy w kierunku prostopadłym do kierunku jazdy, charakteryzuje stosunkowo duża sztywność osiowa poszczególnych odcinków wałów i osi. Dlatego w badanych zazwyczaj pasmach częstości drgań elementy te z zadowalającą do celów technicznych dokładnością są traktowane przeważnie jako osiowo sztywne, a uwzględniana jest wtedy jedynie podatność w kierunku osiowym łożysk oporowych, wszelkiego rodzaju prowadnic, wahaczy i innych elementów konstrukcyjnych łączących wały i osie z odpowiednimi obudowami, korpusami, ramami itp. Wówczas, sztywność osiowa tych składowych konstrukcyjnych reprezentowana jest zazwyczaj za pomocą nieważkich elementów sprężysto-tłumiących. Powstałe w ten sposób modele dyskretno-ciągłe układów mechanicznych drgających podłużnie nie są przedmiotem rozważań pracy.

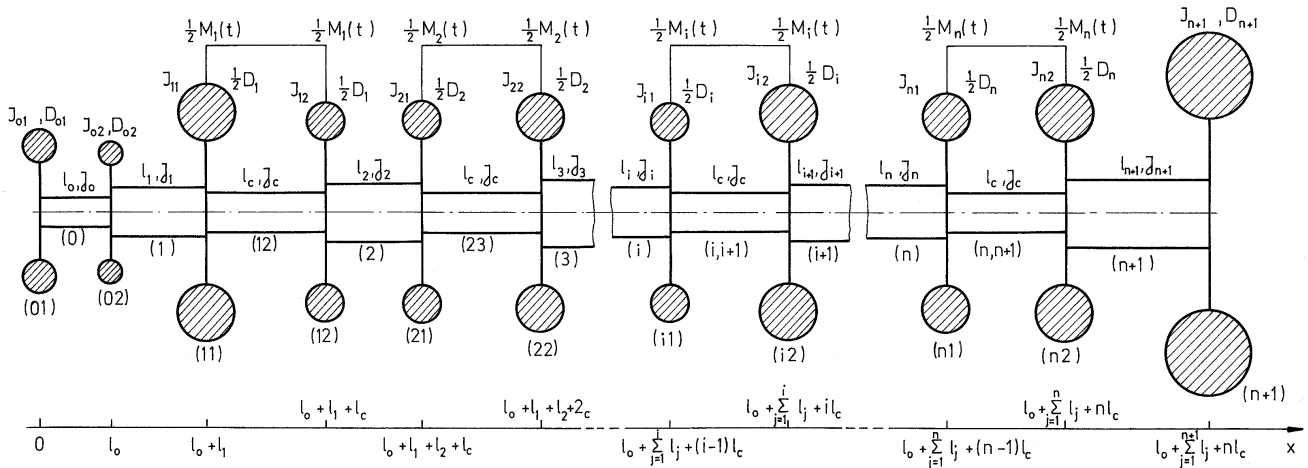
### 4.1 Zastosowanie rozwiązania falowego typu d'Alemberta do układów drgających skrętnie

Typowym przykładem przeprowadzanych rutynowych analiz dynamicznych układów mechanicznych drgających skrętnie są wały korbowe spalinowych silników tłokowych. Przedmiotem badań mogą być same wały korbowe z kołem zamachowym, zaprzęgami korbowymi i układami napędów pomocniczych, na przykład rozrządu, tworzące tzw. układy korbowe, jak również układy korbowe wraz z całym układem przeniesienia napędu do maszyny roboczej lub do układu jezdnego pojazdu. Innymi równie ważnymi z punktu widzenia zastosowań praktycznych przykładami układów mechanicznych drgających skrętnie są układy napędu maszyn roboczych i pojazdów poruszanych nie tylko spalinowymi silnikami tłokowymi, lecz również różnymi rodzajami silników elektrycznych oraz silników przepływowych, tj. turbin parowych lub gazowych.

#### 4.1.1 Analiza dynamiczna układów korbowych spalinowych silników tłokowych

Odpowiednie kształty geometryczne wałów korbowych nowoczesnych spalinowych silników tłokowych oraz ich podparcie między każdym kolejnym wykorbieniem w łożyskach ślizgowych lub tocznych powodują odsunięcie w kierunku większych wartości widma giętnych częstości drgań własnych w stosunku do częstości własnych drgań skrętnych. Dzięki temu w znakomitej większości przypadków zakładamy, że z dostateczną do potrzeb technicznych dokładnością drgania skrętne układów korbowych można analizować bez jednoczesnego uwzględniania drgań giętnych. Powyższe założenie wykorzystano w pracach [22, 25, 31, 118, 119, 171-173], w których rozpatrywano dyskretno-ciągłe modele mechaniczne układów korbowych różnych typów spalinowych silników tłokowych. W tych modelach każdy element wału korbowego odkształcalny skrętnie, na przykład czop główny i korbowy, jest zastępowany oddzielnym prętowym L-SMC. Natomiast bezwładność ramion wykorbień, przeciwcieżarów, zaprzęgów korbowych, koła zamachowego oraz elementów napędów pomocniczych silnika jest reprezentowana przez bryły sztywne o stałych bądź zmiennych masowych momentach bezwładności względem osi obrotu wału. Należy podkreślić, że pojedynczemu wykorbieniu wału odpowiadają dwie bryły sztywne połączone L-SMC reprezentującym podatność skrętną czopa korbowego. Masowe momenty bezwładności tych brył obejmują masy ramion danego wykorbiecia,

jego przeciwciężarów oraz masę współpracującego z tym wykorbieniem zaprzęgu korbowego lub zaprzęgów korbowych wraz z bezwładnością czopa korbowego wynikającą z jego naturalnej mimośrodowości. Do każdej z tych brył jest przyłożony moment zewnętrzny równy połowie momentu wymuszającego  $M_i(t)$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , pochodzącego od sił ciśnienia gazu i sił bezwładności masy zaprzęgu, względnie zaprzęgów korbowych, współpracujących z tym wykorbieniem, gdzie  $n$  oznacza liczbę wykorbień wału. Ogólny dyskretno-ciągły model mechaniczny układu korbowego silnika wielocylindrowego rzędownego lub widlastego rozpatrywany w pracach [119, 171] przedstawia rysunek 4.1.

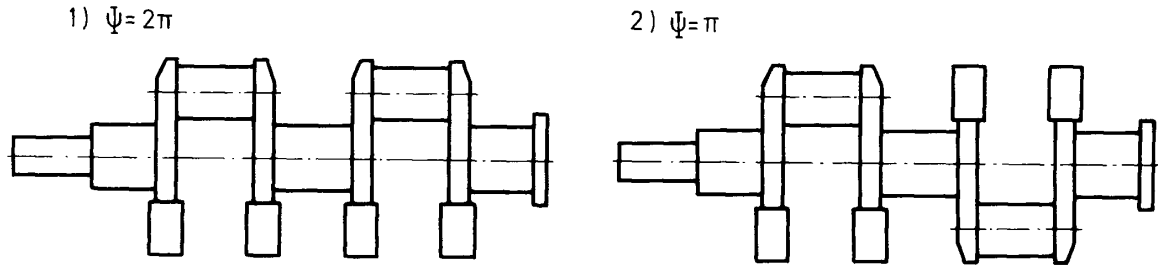


Rys. 4.1 Dyskretno-ciągły model mechaniczny układu korbowego silnika wielocylindrowego

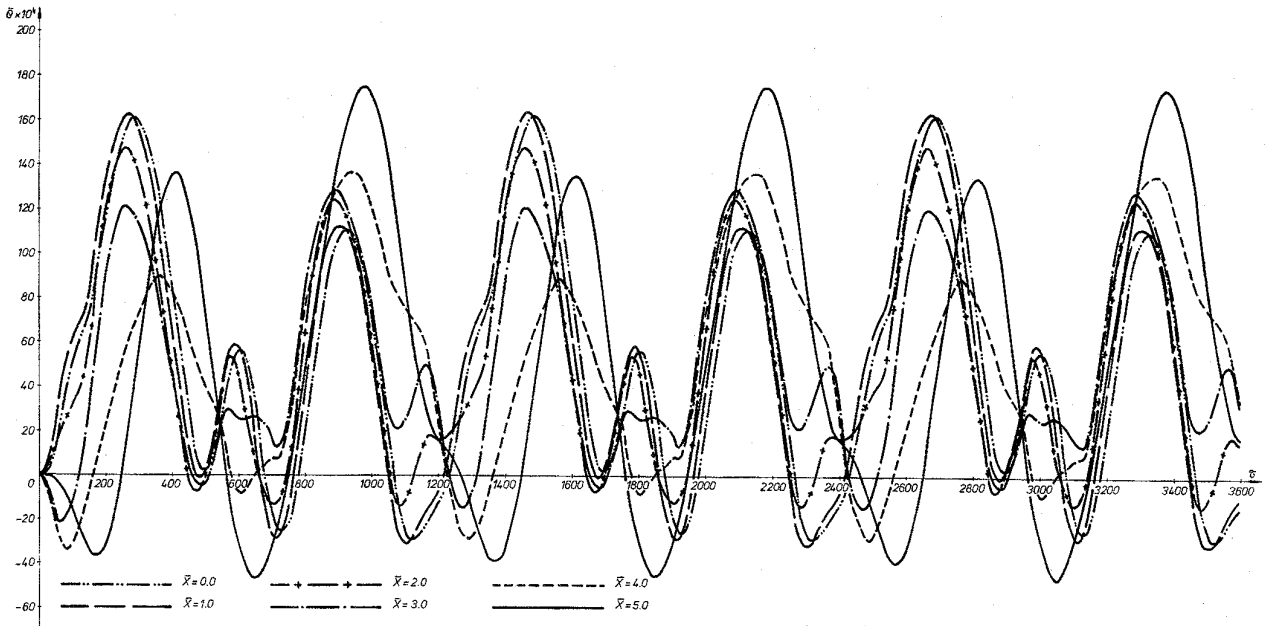
Należy zauważyć, że model ten składa się najczęściej z  $2n+2$  prętowych L-SMC oraz  $2n+3$  brył sztywnych połączonych wzajemnie zgodnie ze strukturą rzeczywistego obiektu. Równaniami ruchu przekrojów poprzecznych L-SMC są jednorodne równania (2.1) dla  $\tau=0$  i  $\Gamma=G$  i  $\mu=\rho$ . Równania te rozwiązywano przy zerowych warunkach początkowych oraz przy  $2n+3$  dynamicznych warunkach brzegowych typu (3.2b) i  $2n+1$  geometrycznych warunkach zgodności przemieszczeń kątowych (3.2a) przekrojów skrajnych sąsiadujących ze sobą makroelementów. Wykorzystanie falowego rozwiązania równań ruchu (2.1) typu d'Alemberta w postaci (3.3) prowadzi zgodnie z opisaną w rozdziale 3, punkt 3.1, procedurą do układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego i drugiego rzędu z tzw. przesuniętym argumentem, tj. do  $2n+1$  równań typu (3.4a) i  $2n+3$  równań typu (3.4b). Szczegółowe postaci tych układów równań odpowiadające poszczególnym modelom mechanicznym układów korbowych zamieszczone są w pracach [119, 171-173].

W pracy [171] za pomocą najprostszego modelu układu korbowego silnika 1-cylindrowego dokonano analitycznego rozwiązania układu czterech równań różniczkowych zwyczajnych z przesuniętym argumentem otrzymując zależności w postaci wzorów rekurencyjnych. Jednak niezwykle złożona postać tych wzorów staje się coraz bardziej skomplikowana w miarę wzrostu tego argumentu, gdzie liczba wyrazów odpowiednich szeregów zwiększa się rekurencyjnie w kolejnych przedziałach argumentu rozwiązania. W przypadku większej liczby równań rozwiązanie analityczne byłoby jeszcze znacznie złożone. W związku z powyższym, rozwiązanie analityczne nawet przy małej liczbie równań różniczkowych z przesuniętym argumentem okazuje się mało przydatne do celów praktycznych nawet przy wykorzystaniu komputerów o bardzo dużej mocy obliczeniowej. Dlatego więc, równania te trzeba rozwiązywać numerycznie stosując do tego celu znane metody bezpośredniego całkowania równań różniczkowych zwyczajnych. W pracach [119, 171-173] wykorzystano metodę wstecznych różnic skończonych.

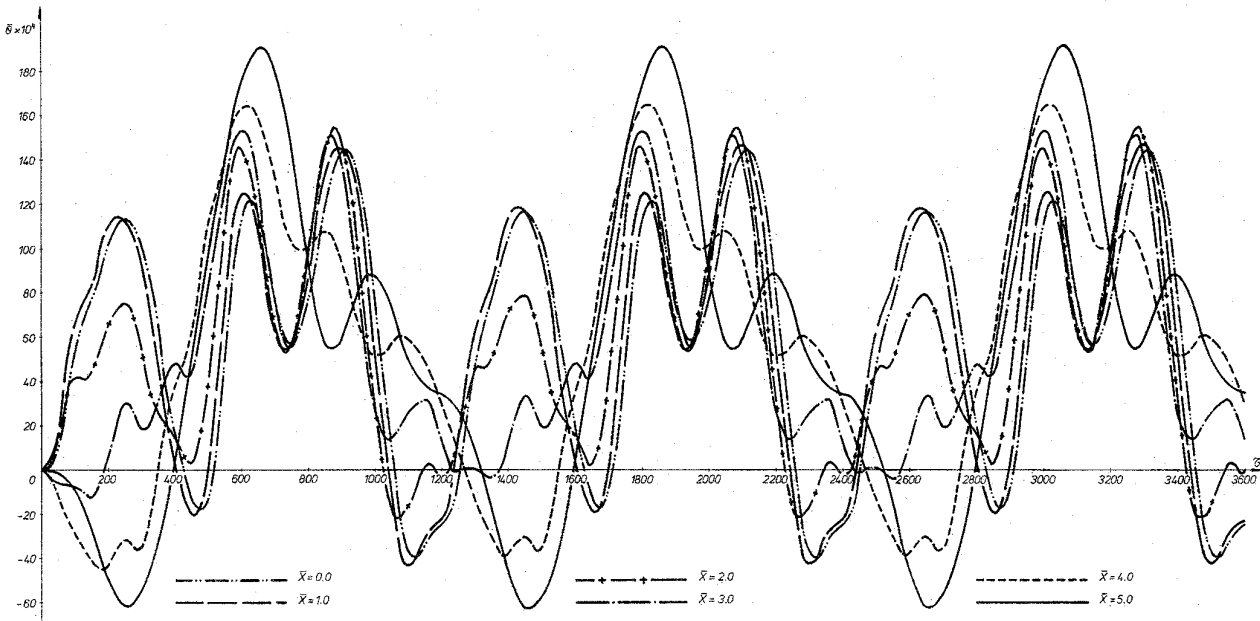
Nadrzędnym celem prowadzonych w tych pracach obliczeń była adaptacja do potrzeb symulacji komputerowej proponowanej metody opartej na rozwiązaniu d'Alemberta i tym samym na falowej interpretacji zjawiska drgań. Badano więc wpływ poszczególnych parametrów modelu



Rys. 4.2 Wzajemne położenia wykorbień wału silnika 2-cylindrowego rzędownego:  
1) „współbieżne” i 2) „przeciwbieżne”



Rys. 4.3 Dynamiczne przemieszczenia kątowne przekrojów skrajnych czopów głównych i korbowych układu korbowego silnika 2-cylindrowego o wykorbieniach „współbieżnych”



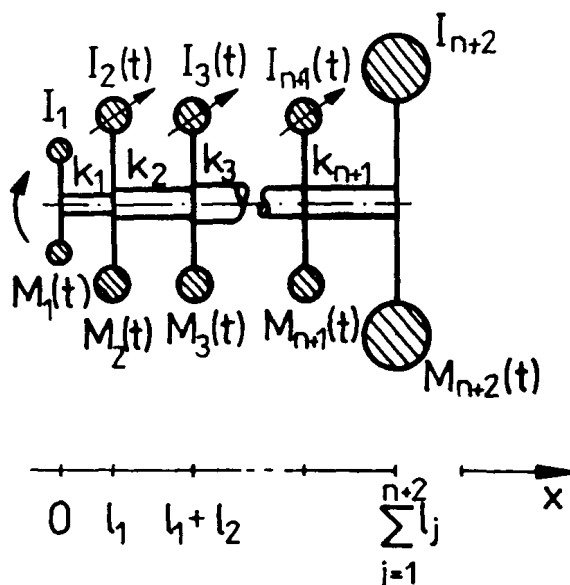
Rys. 4.4 Dynamiczne przemieszczenia kątowne przekrojów skrajnych czopów głównych i korbowych układu korbowego silnika 2-cylindrowego o wykorbieniach „przeciwbieżnych”

oraz długości kroku całkowania na własności rozwiązania numerycznego. Istotnym przedmiotem analizy było badanie wpływu tłumienia typu wiskotycznego w układzie korbowym na stabilność rozwiązania numerycznego, a w przede wszystkim na jego okresowość przy okresowym wymuszeniu zewnętrznym. Ponadto, analizowano wpływ różnych rozwiązań konstrukcyjnych układu korbowego silnika, na przykład wzajemnego położenia wykorbień wału i kolejności zapłonów w poszczególnych cylindrach, na przebiegi czasowe i wartości ekstremalne odpowiedzi dynamicznej. Przykładowo, w pracach [171, 173] rozpatrywano m.in. model układu korbowego 4-suwowego silnika 2-cylindrowego rzędowego charakteryzującego się wzajemnym położeniem wykorbień wału przesuniętym o kąt obrotu  $2\pi$ , tj. gdy obydwie zaprzęgi korbowe pracują „w fazie”, oraz o kąt  $\pi$ , tj. gdy obydwie zaprzęgi korbowe pracują „w przeciw-fazie”, co pokazano schematycznie na rysunku 4.2. Odpowiadające tym położeniom wykorbień przebiegi dynamicznych przemieszczeń kątowych przekrojów skrajnych kolejnych L-SMC modelu dyskretno-ciągłego w funkcji bieżącego kąta obrotu wału przedstawiają kolejno rysunki 4.3 i 4.4. Na tych rysunkach symbolami „0”, „1”, „2”,..., „5” oznaczono przebiegi odpowiadające przekrojom skrajnym makroelementów od pierwszego do piątego. Porównując odpowiadające sobie krzywe należy zauważyć, że w przypadku przesunięcia wykorbień o kąt  $2\pi$  otrzymano mniejsze amplitudy przemieszczeń kątowych oraz ich bardziej regularny przebieg wynikający z równomierniejszego charakteru pracy tego typu silnika.

Jak zaznaczono powyżej, w przedstawionych modelach układów korbowych spalinowych silników tłokowych każdemu czopowi głównemu i korbowemu odpowiada oddzielny prętowy L-SMC, a bezwładność ramion danego wykorbień, jego przeciwciężarów oraz współpracującego z tym wykorbień zaprzęgu korbowego lub zaprzęgów korbowych jest reprezentowana przez dwie bryły sztywne, jak pokazano na rysunku 4.1. Mimo, iż taki sposób modelowania do analizy drgań skrętnych lepiej odzwierciedla strukturę rzeczywistego obiektu, w praktyce inżynierskiej stosowane są prostsze modele układów korbowych, w których każdemu pojedynczemu wykorbień wraz z jego zaprzęgiem lub zaprzęgami korbowymi odpowiada jedna bryła sztywna o zadanym stałym bądź okresowo zmiennym masowym momencie bezwładności. Do tej bryły jest wtedy przyłożony zewnętrzny moment wymuszający  $M_i(t)$ ,  $i=2,3,\dots,n+1$ , pochodzący od sił ciśnienia gazu i sił bezwładności. Poszczególne bryły sztywne takiego modelu są wzajemnie połączone za pomocą elementów odkształcalnych reprezentujących podatność skrętną kolejnych odcinków wału korbowego obejmujących całe wykorbień, tj. zarówno czopy główne jak i korbowe, oraz pozostałe fragmenty tworzące tzw. przednią i tylną końcówkę wału. W przypadku spotykanych najczęściej dyskretnych modeli układów korbowych elementy te są bezmasowymi elementami sprężysto-tłumiącymi. Ze względu na niezwykle ważność praktyczną zagadnienia drgań skrętnych układów korbowych spalinowych silników tłokowych, przez wiele lat wypracowano do tego typu modeli dużą liczbę formuł obliczeniowych pozwalających wyznaczać masowe momenty bezwładności, sztywności skrętne oraz współczynniki tłumienia zewnętrznego i materiałowego dla pojedynczego wykorbień. Formuły te wyprowadzono w dużej mierze opierając się o wyniki badań eksperymentalnych, a ich poszczególne postaci do różnych typów silników i rozwiązań konstrukcyjnych wału korbowego zamieszczono w [70, 80, 111, 128] i wielu innych publikacjach. W celu dokonywania na przykład obliczeń porównawczych można budować analogiczne do dyskretnych - dyskretno-ciągłe modele układów korbowych do analizy drgań skrętnych, w których rolę każdego bezmasowego elementu sprężysto-tłumiącego o sztywności skrętnej  $k_i$  i współczynniku tłumienia wewnętrznego  $c_i$  pełni odpowiedni prętowy L-SMC o tej samej sztywności skrętnej wyrażonej jako  $k_i=GJ_{0i}/l_i$  i współczynnikiem zastępczego tłumienia wewnętrznego sprowadzonego do przekrojów skrajnych  $C_i=l_i c_i$ , gdzie  $J_{0i}$  jest biegunowym geometrycznym momentem bezwładności przekroju  $i$ -tego makroelementu, a  $l_i$  jego założoną długością równą na przykład długości rzeczywistego wykorbień. Wówczas, w przypadku układu korbowego silnika o  $n$  wykorbieńiach wału przyjęty model dyskretno-ciągły składa się najczęściej z  $n+2$  brył sztywnych, które reprezentują odpowiednio: bezwładność elementów pomocniczych napędów silnika,  $n$



kolejnych wykorbień wału wraz ich zaprzęgami korbowymi oraz bezwładność koła zamachowego. Bryły sztywne są połączone wzajemnie za pomocą  $n+1$  prętowych L-SMC, co przedstawiono na rysunku 4.5. Wówczas, składowe stałe masowych momentów bezwładności brył sztywnych w modelu dyskretno-ciągłym  $I_i(t)$ ,  $i=1,2,\dots,n+2$ , pomniejsza się o wartość równą masowemu momentowi bezwładności połówek przyległych do nich makroelementów. Ze względu na typowy w niemal wszystkich spalinowych silnikach tłokowych stosunkowo mały udział masowych momentów bezwładności odkształcalnych skrętnie elementów wału korbowego, takich jak czopy główne i korbowe, w porównaniu do masowych momentów bezwładności pozostałych elementów układu korbowego, masowy moment bezwładności względem osi obrotu pojedynczego prętowego L-SMC o długości rzeczywistego wykorbienia wału i o sztywności skrętnej wykorbienia jest dużo mniejszy od masowego momentu bezwładności bryły sztywnej reprezentującej bezwładność tego wykorbienia. Dzięki temu wspomniane formuły obliczeniowe mogą mieć również zastosowanie do wyznaczania parametrów modelu dyskretno-ciągłego. Ponadto, przy tak wyznaczonych parametrach modelu dyskretno-ciągłego układu korbowego jego pierwsze  $n+1$  częstości skrętnych drgań własnych obliczone opisaną w punkcie 3.2.1 metodą rozdzielania zmiennych są niemal identyczne jak odpowiadające im częstości analogicznego modelu dyskretnego, gdzie zaistniałe różnice nie przekraczają kilku procent.

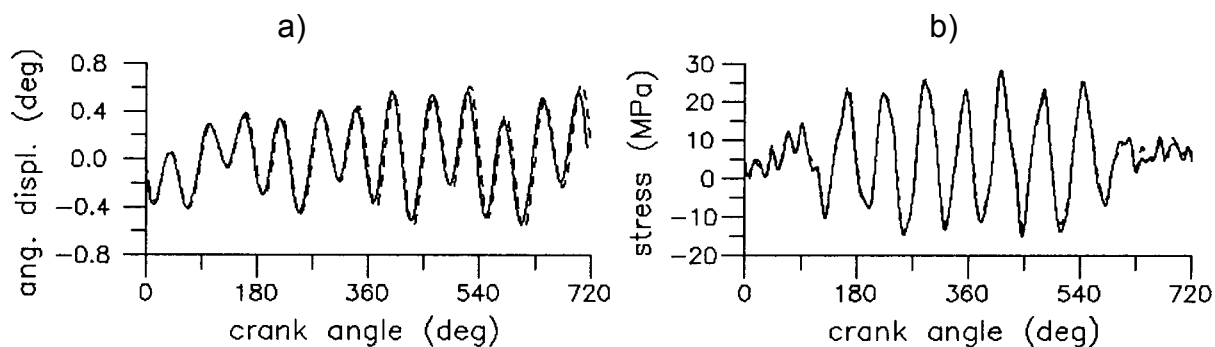


Rys. 4.5 Uproszczony dyskretno-ciągły model mechaniczny układu korbowego silnika wielocylindrowego

Przyjęty w ten sposób uproszczony dyskretno-ciągły model układu korbowego spalinowego silnika tłokowego w porównaniu z analogicznym modelem pokazanym na rysunku 4.1 charakteryzuje się mniejszą liczbą warunków brzegowych wynoszącą  $n$  w przypadku warunków geometrycznych typu (3.2a) i  $n+2$  w przypadku warunków dynamicznych typu (3.2b). Przez to uzyskiwana jest większa efektywność obliczeniowa przy symulacji drgań wymuszonych dzięki konieczności sekwencyjnego całkowania numerycznego tylko  $n$  równań różniczkowych z przesuniętym argumentem typu (3.4a) i  $n+2$  równań typu (3.4b).

W pracy [171] w przypadku układu korbowego silnika 1-cylindrowego, tj. przy  $n=1$ , dokonano pierwszego porównania wyników obliczeń za pomocą uproszczonego modelu dyskretno-ciągłego z wynikami uzyskanymi przy wykorzystaniu analogicznego liniowego modelu dyskretnego o  $n+2=3$  stopniach swobody, którego ruch jest opisany sprzężonymi równaniami różniczkowymi zwyczajnymi. Rozwiązywanie tych równań metodą Runge'go-Kutty dało blisko 2-krotne wydłużenie czasu obliczeń dla tego samego przedziału czasu i długości kroku całkowania w porównaniu z sekwencyjnym całkowaniem odpowiednich 3 równań różniczkowych z przesuniętym

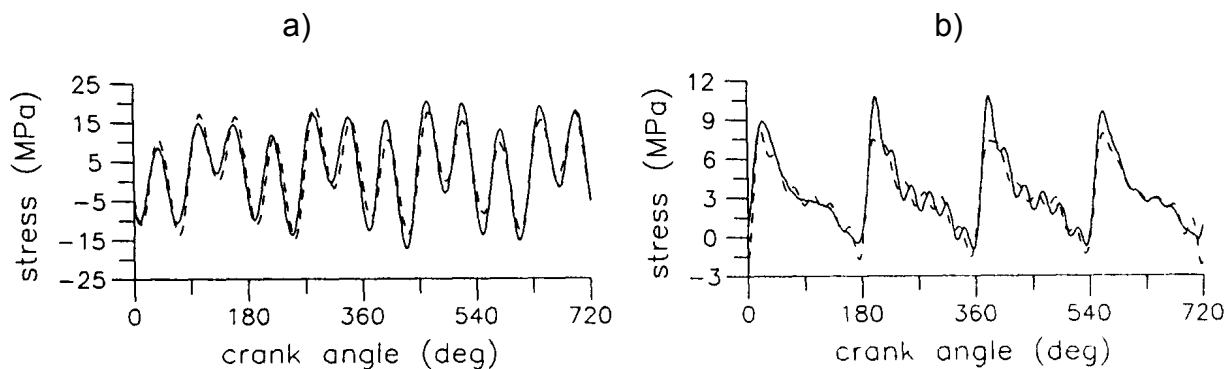
argumentem typu (3.4b) i 1 równania typu (3.4a). Uzyskano jednocześnie bardzo podobne wyniki symulacji drgań skrętnych, gdzie największe różnice odpowiadających sobie wartości ekstremalnych przebiegów dynamicznych przemieszczeń kątowych nie przekroczyły 7%. Z kolei w pracach [22, 31] dokonywano analogicznych porównań modeli układów korbowych silników wielocylindrowych. Rozpatrywano ustalone rezonansowe i pozarezonansowe drgania skrętne układu korbowego rzędowego silnika 4- i 6-cylindrowego. Na rysunku 4.6a zamieszczono wykresy przebiegów dynamicznego przemieszczenia kątowego tzw. przedniej wolnej końcówki wału korbowego 4-cylindrowego wysokoobrotowego silnika wysokoprężnego w rezonansowych warunkach pracy w jednym kolejnym cyklu pracy wyrażonym w funkcji bieżącego kąta obrotu. Z kolei rysunek 4.6b przedstawia wykresy naprężeń stycznych w siódmym czopie głównym wału korbowego 6-cylindrowego średnioobrotowego silnika wysokoprężnego w kolejnym cyklu znamionowych warunków pracy. Na obu rysunkach linią ciągłą zaznaczono przebiegi uzyskane za pomocą modelu dyskretno-ciągłego i rozwiązania falowego typu d'Alemberta, a linią przerywaną odpowiadające przebiegi otrzymane przy wykorzystaniu analogicznego modelu dyskretnego, którego sprzężone równania różniczkowe ruchu całkowano metodą Hamminga, [91]. Za pomocą obydwu porównywanych modeli uzyskano bardzo podobne wyniki symulacji, gdzie największe różnice wartości ekstremalnych badanych przebiegów nie przekroczyły 6÷8%. W przypadku modelu dykretno-ciągłego nastąpiło ok. 2.5÷3-krotne skrócenie czasu obliczeń przy bardzo dobrej stabilności rozwiązania numerycznego w przeciwieństwie do metody Hamminga, przy wykorzystaniu której zaobserwowano stopniową utratę okresowości przebiegów w ramach kolejnych cykli pracy silnika 4-suwowego, co można zauważyć na rysunku 4.6a. Zastosowanie do tych samych przypadków metody Rungego-Kutty lub metody Taylora bezpośredniego całkowania równań ruchu modelu dyskretnego daje wprawdzie poprawę stabilności rozwiązania lecz kosztem dalszego zwiększenia czasu obliczeń.



Rys. 4.6 Odpowiedź dynamiczna układu korbowego silnika 4-cylindrowego (a) – 6-cylindrowego (b) uzyskana za pomocą modelu dyskretno-ciągłego (—) i modelu dyskretnego (---)

W ustalonych warunkach pracy silnika i przy wykorzystaniu liniowego modelu układu korbowego, w którym okresowo-zmienne masowe momenty bezwładności zaprzęgów korbowych zastąpiono wartościami średnimi, proponowane w niniejszej pracy podejście porównywano w [31] z wysoce efektywną i powszechnie stosowaną w praktyce inżynierskiej metodą analizy drgań skrętnych układów korbowych opartą na transformacji Fouriera różniczkowych równań ruchu modelu dyskretnego do układu liniowych równań algebraicznych o zespolonych współczynnikach. Metoda ta polega na poszukiwaniu odpowiedzi dynamicznej w formie superpozycji rozwiązań cząstkowych odpowiadających kolejnym składowym harmonicznym rozwinięcia w szereg okresowego wymuszenia zewnętrznego, [92]. Wówczas, nawet przy uwzględnieniu stosunkowo dużej liczby 24 lub 36 składowych harmonicznych rozwinięcia w szereg okresowych momentów zewnętrznych  $M_i(t)$ ,  $i=2,3,\dots,n+1$ , pochodzących od sił gazowych i bezwładności, otrzymywane są znacznie większe, dochodzące do 40%, różnice wartości ekstremalnych uzyskanych przebiegów w porównaniu z analogicznymi przebiegami otrzymanymi przy wykorzystaniu modelu dyskretno-

ciągłego i rozwiązania falowego typu d'Alemberta. Na rysunku 4.7a zamieszczono przykładowe wykresy przebiegów naprężeń stycznych w piątym czopie głównym wału korbowego gaźnikowego wysokoobrotowego silnika 4-cylindrowego w funkcji bieżącego kąta obrotu wału dla jednego cyklu rezonansowych warunków pracy przy prędkości 4250 obr./min, gdzie linią ciągłą zaznaczono przebiegi uzyskane za pomocą modelu dyskretno-ciągłego i rozwiązania falowego typu d'Alemberta, a linią przerywaną odpowiadające przebiegi otrzymane przy wykorzystaniu analogicznego modelu dyskretnego i wspomnianej metody transformacji Fouriera. W warunkach rezonansu, kiedy odpowiedź dynamiczna ma przebieg zbliżony do gładkiej sinusoidy, za pomocą obydwu modeli otrzymano podobne wyniki. Natomiast dla tego samego układu korbowego silnika w pozarezonansowych warunkach pracy przy prędkości obrotowej wału 2000 obr./min, gdy przebiegi odpowiedzi dynamicznej charakteryzują się występowaniem znacznych lokalnych gradientów, stosowana powszechnie w praktyce metoda oparta na transformacji Fouriera jest przyczyną niedokładności w formie „wygładzania pików”, które to uzyskano za pomocą modelu dyskretno-ciągłego, co można zauważyć na rysunku 4.7b przedstawiającym analogiczne przebiegi naprężeń stycznych w piątym czopie głównym wału korbowego. Należy więc wnioskować, że i to porównanie potwierdza większą wiarygodność uzyskiwanych wyników analizy drgań skrętnych przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego i rozwiązania falowego typu d'Alemberta, gdzie osiągnięto jednocześnie efektywność obliczeniową zbliżoną do szczególnie wysokiej efektywności metody opartej na transformacji Fouriera.



Rys. 4.7 Odpowiedź dynamiczna układu korbowego silnika 4-cylindrowego w rezonansowych (a) i pozarezonansowych (b) warunkach pracy uzyskana za pomocą modelu dyskretno-ciągłego (—) i modelu dyskretnego (---)

#### 4.1.2 Zastosowanie rozwiązania falowego typu d'Alemberta do analizy drgań skrętnych układów napędowych maszyn i pojazdów

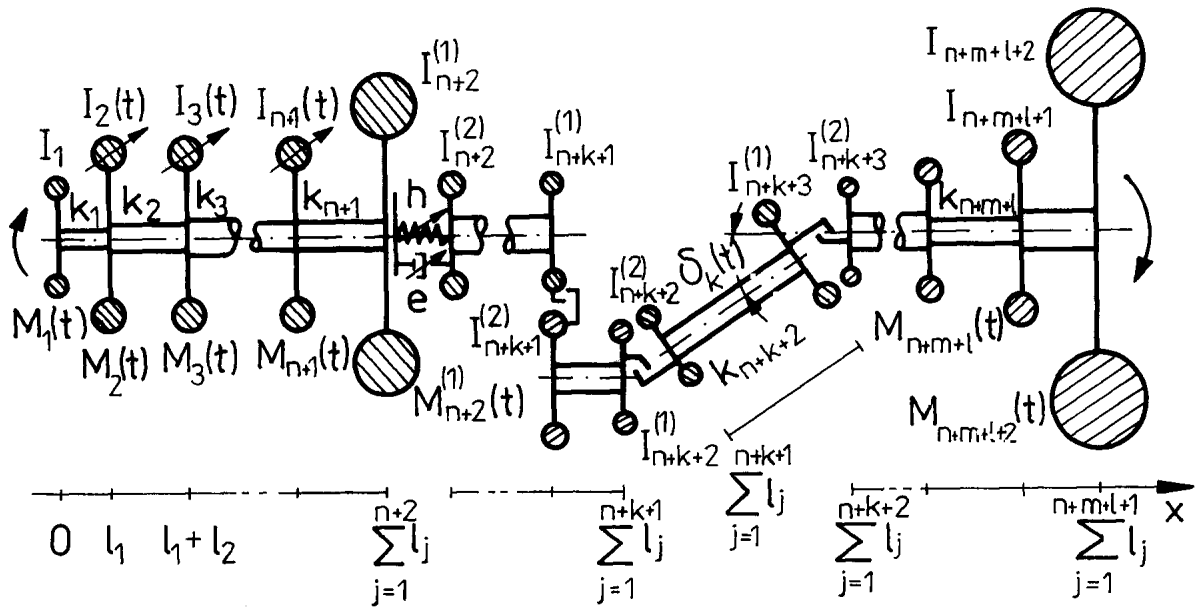
Jak wspomniano w punkcie 3.1, przesunięty argument występujący w członach stojących po prawych stronach równań różniczkowych zwyczajnych otrzymywanych w konsekwencji zastosowania rozwiązania falowego typu d'Alemberta czyni te prawe strony zawsze znanymi w kolejnych krokach numerycznego całkowania. Wtedy te równania można traktować jako wzajemnie rozprężone i rozwiązywać je sekwencyjnie w zadanej kolejności wynikającej z ich konkretnych postaci. W porównaniu z całkowaniem numerycznym takiej samej liczby sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych opisujących ruch dyskretnego modelu mechanicznego, wykonujemy wówczas znacznie zmniejszoną liczbę niezbędnych operacji arytmetycznych, co bardzo istotnie ułatwia proces całkowania numerycznego równań różniczkowych z przesuniętym argumentem poprzez istotne skrócenie czasu obliczeń oraz zwiększenie dokładności i stabilności numerycznej otrzymywanego rozwiązania. Potwierdziły to opisane w poprzednim punkcie wyniki obliczeń porównawczych drgań skrętnych układów korbowych spalinowych silników tłokowych. Dzięki temu zastosowanie modelowania dyskretno-ciągłego i rozwiązań falowych typu d'Alemberta może być szczególnie przydatne do analizy i symulacji drgań skrętnych układów złożonych z

nieliniowościami i tzw. silnymi nieliniowościami lokalnymi. Wówczas modele mechaniczne tych układów charakteryzują się stosunkowo dużą liczbą prętowych L-SMC i tym samym odpowiednio dużą liczbą nieliniowych równań z przesuniętym argumentem typu (3.6) modelu matematycznego. Dlatego więc proponowane podejście może być szczególnie przydatne do analizy drgań skrętnych układów napędowych maszyn i pojazdów, w skład których wchodzi wiele odcinków wałów i osi o najczęściej skokowych zmianach średnicy, czyli tzw. wały stopniowe, oraz wszelkiego rodzaju elementy łączące będące zarazem źródłem wspomnianych nieliniowości typu lokalnego. Należą do nich przeguby, na przykład Cardana, sprzęgła podatne i sztywne, sprzęgła cierne suche i mokre, przekładnie zębate zwykłe i planetarne, przekładnie i sprzęgła hydrokinetyczne, wolnobiegi i inne. Budując dyskretno-ciągłe modele mechaniczne układów napędowych poszczególne, najczęściej cylindryczne, odcinki wałów i osi są zastępowane odpowiednimi prętowymi L-SMC odkształcalnymi skrętnie. Natomiast tarcze sprzęgieł, koła zamachowe, koła zębate, koła jezdne, wirniki maszyn elektrycznych, wszelkiego rodzaju kołnierze, kryzy i inne, których podatność skrętną można uznać za znikomo małą w porównaniu z podatnością wałów, są reprezentowane przez bryły sztywne o stałych bądź zmiennych masowych momentach bezwładności względem ich osi obrotu. Z kolei podatność skrętną sprzęgieł, przegubów, ząbów przekładni zębatych i hydrokinetycznych, wolnobiegów i innych są zastępowane przez bezmasowe elementy sprężysto-tłumiące o charakterystykach odpowiednio liniowych, nieliniowych lub silnie nieliniowych. W modelach mechanicznych układów napędowych L-SMC, bryły sztywne oraz bezmasowe elementy sprężysto-tłumiące są wzajemnie ze sobą połączone zgodnie ze strukturą rzeczywistego obiektu.

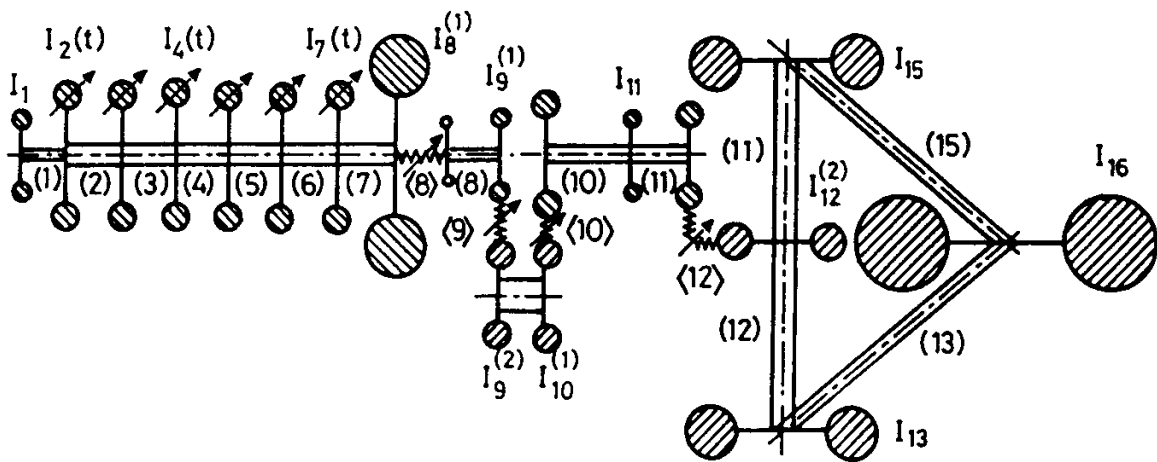
W pracach [22, 29, 31, 33] rozpatrywano ustalone i przejściowe nieliniowe i parametryczne drgania skrętne układów maszyn i pojazdów poruszanych silnikami spalinowymi tłokowymi oraz silnikami elektrycznymi. Podobnie jak w przypadku dyskretno-ciągłych modeli układów korbowych spalinowych silników tłokowych, równaniami ruchu przekrojów poprzecznych L-SMC są jednorodne równania (2.1) dla  $\tau=0$  i  $\Gamma=G$  i  $\mu=\rho$ . Równania te rozwiązywano przy zerowych lub statycznych warunkach początkowych oraz przy dynamicznych warunkach brzegowych typu (3.2b) i (3.5) oraz geometrycznych warunkach zgodności przemieszczeń kątowych (3.2a) dla przekrojów skrajnych sąsiadujących ze sobą makroelementów. Wykorzystanie falowego rozwiązania równań ruchu (2.1) typu d'Alemberta w postaci (3.3) prowadzi zgodnie z opisaną w rozdziale 3, punkt 3.1, procedurą do układu równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego i drugiego rzędu z tzw. przesuniętym argumentem typu (3.4a), (3.4b) i (3.6). We wszystkich wymienionych powyżej pracach równania różniczkowe z przesuniętym argumentem rozwiązywano numerycznie metodą bezpośredniego całkowania. W celu uzyskania zadowalająco wysokiej dokładności oraz bezwarunkowej stabilności numerycznego rozwiązania wykorzystano metodę Newmarka.

W pracach [22, 31] przedmiotem badań był przekładniowy układ napędu maszyny roboczej poruszanej wielocylindrowym spalinowym silnikiem tłokowym. Obok przekładni zębatych i układu korbowego silnika, w układzie napędowym występują również sprzęgła cierne i podatne, przeguby Cardana oraz wirniki reprezentujące bezwładność maszyny napędzanej. Dyskretno-ciągły model mechaniczny układu napędowego rozpatrywanego w pracy [31] przedstawiono na rysunku 4.8.

Z kolei w pracy [33] rozpatrywano analogiczny przekładniowy układ napędowy ze sprzęgłem ciernym i podatnym samochodu dostawczego poruszanego 6-cylindrowym rzędowym silnikiem spalinowym. Dyskretno-ciągły model mechaniczny tego układu pokazuje rysunek 4.9. W tym modelu bezwładność masy pojazdu sprowadzoną do osi obrotu układu napędowego zastąpiono bryłą sztywną połączoną z bryłami sztywnymi reprezentującymi masy kół jezdnych za pomocą prętowych L-SMC odkształcalnych skrętnie (13) i (15). Makroelementy te zastępują podatność opon samochodu.

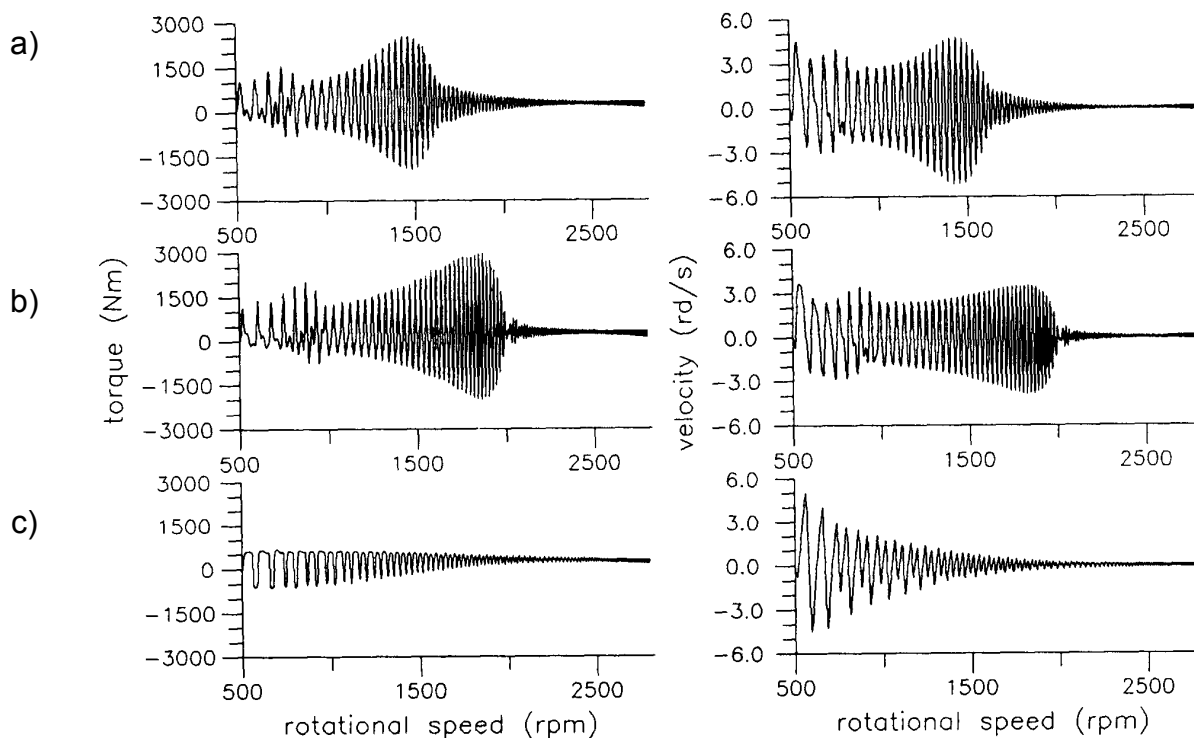


Rys. 4.8 Dyskretno-ciągły model mechaniczny układu napędowego maszyny roboczej



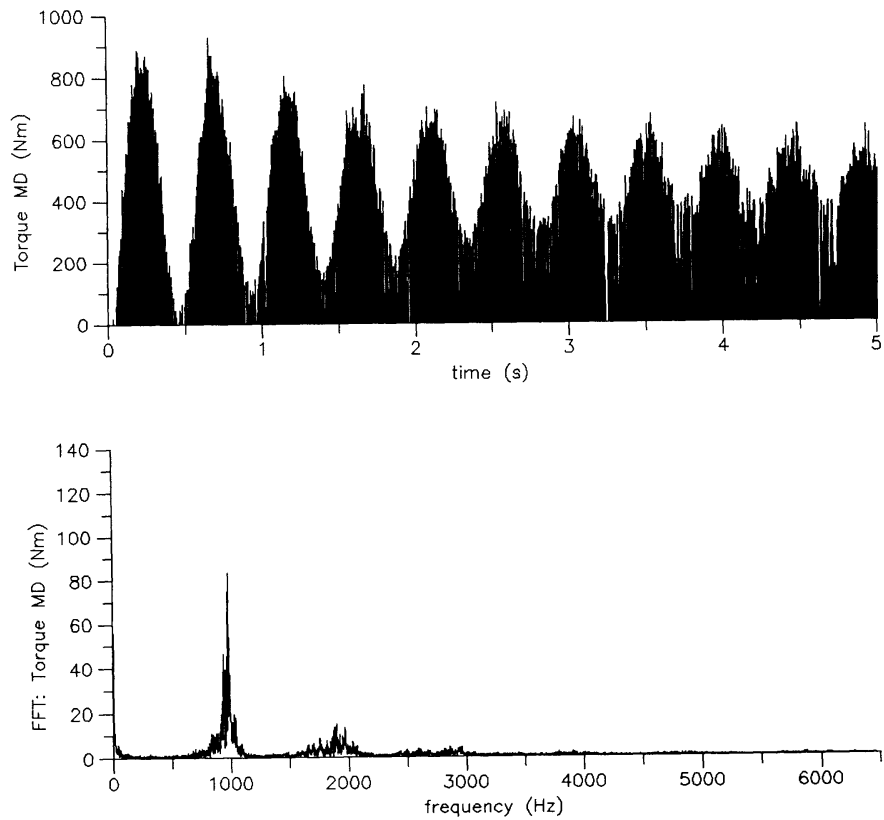
Rys. 4.9 Dyskretno-ciągły model mechaniczny układu napędowego pojazdu samochodowego

W pracy [31] badano wpływ lepko-sprężystych charakterystyk sprzęgła podatnego oraz charakterystyk sprzęgła ciernego typu włączalnego i przeciążeniowego na odpowiedź dynamiczną układu w nieustalonych warunkach pracy. Przykładowo, na rysunku 4.10 przedstawiono wykresy przebiegów dynamicznego momentu skręcającego w wale wyjściowym sprzęgła oraz jego prędkości kątowej w funkcji chwilowej prędkości obrotowej wału korbowego silnika podczas jego rozbiegu od prędkości biegu jałowego do prędkości znamionowej. Kolejne przypadki a, b i c na tym rysunku odpowiadają liniowej, progresywnej (twardej) i degresywnej (miękkiej) charakterystyce sprzęgła podatnego, co nietrudno zauważyć obserwując typowe dla nich obwiednie wartości chwilowych ekstremów momentów skręcających i prędkości kątowych przy przechodzeniu przez strefę rezonansu.

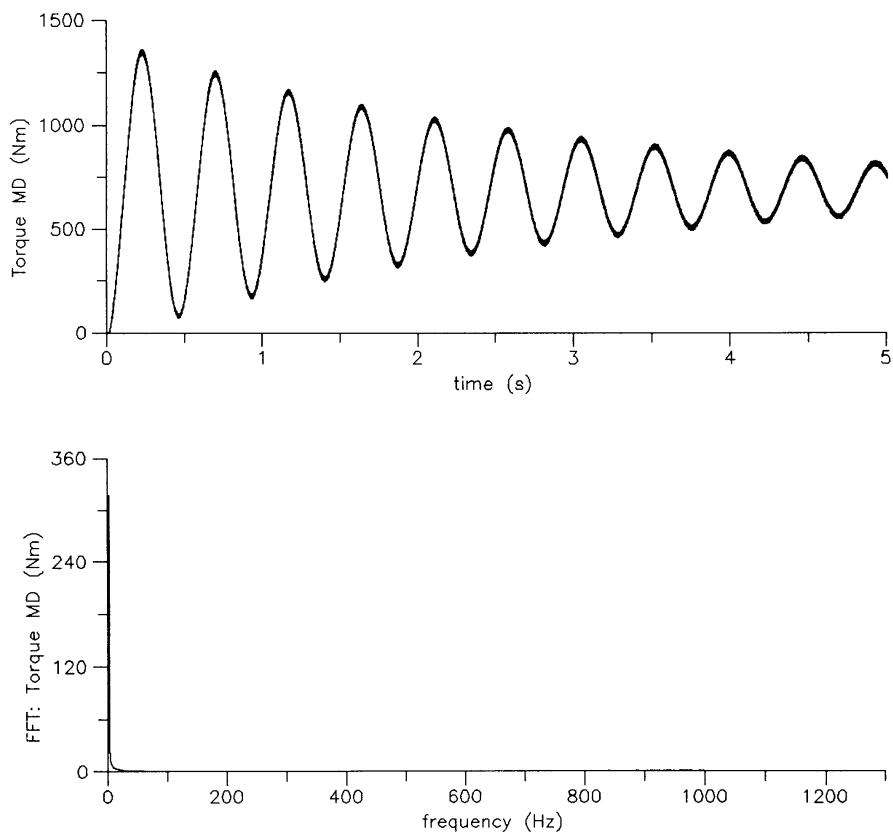


Rys. 4.10 Odpowiedź dynamiczna układu napędowego maszyny roboczej przy różnych charakterystykach sprzęgła podatnego

W pracy [33] uwzględniono luzy międzyzębne w kolejnych stopniach skrzyni przekładniowej oraz w przekładni głównej układu przeniesienia napędu samochodu. Badano przebiegi dynamicznego momentu skręcającego przenoszonego przez poszczególne elementy układu napędowego, takich jak wał korbowy silnika, sprzęgło cierne, zazębienia przekładni zębatych oraz kolejne odcinki wałów i półosi, w nieustalonych warunkach pracy podczas przyspieszania pojazdu od prędkości obrotowej wału silnika 1000 obr/min do prędkości 6000 obr/min przy założonej stałej wartości średniej momentu napędowego 120 Nm. Na rysunku 4.11 przedstawiono przebieg w dziedzinie czasu i częstotliwości momentu dynamicznego przenoszonego przez przekładnię główną (12) układu napędu samochodu (patrz rys. 4.9). Przebieg ten stanowi serię tzw. „odzerowych pików” momentu pochodzących od kolejnych zderzeń współpracujących ze sobą par zębów przekładni. Widmo amplitudowe tego przebiegu ma bardzo dużą liczbę składowych wysokoczęstotliwościowych, co wskazuje na chaotyczny charakter badanego procesu. Bezwładność obrotowa kół zębatych łagodzi natomiast skutki zderzeń par zębów czyniąc z typowo impulsowego przebiegu momentu skręcającego w samym z zazębieniu przebiegi momentu w przyległych wałach i osiach całkowicie płynne o charakterze tłumionej sinusoidy o podstawowej częstotliwości  $\sim 2.1$  Hz równej pierwszej częstości skrętnych drgań własnych zlinearyzowanego modelu badanego układu napędowego pojazdu, jak pokazano na rysunku 4.12 w przypadku momentu skręcającego przenoszonego do kół jezdnych przez półosie reprezentowane przez L-SMC (12) i (14) (patrz rys. 4.9). W omawianej pracy [33] analogiczne wyniki otrzymano również za pomocą dyskretno-ciągłego modelu układu napędu zestawu kołowego lokomotywy elektrycznej z dwustopniową przekładnią zębatą, w której uwzględniono luzy międzyzębne.

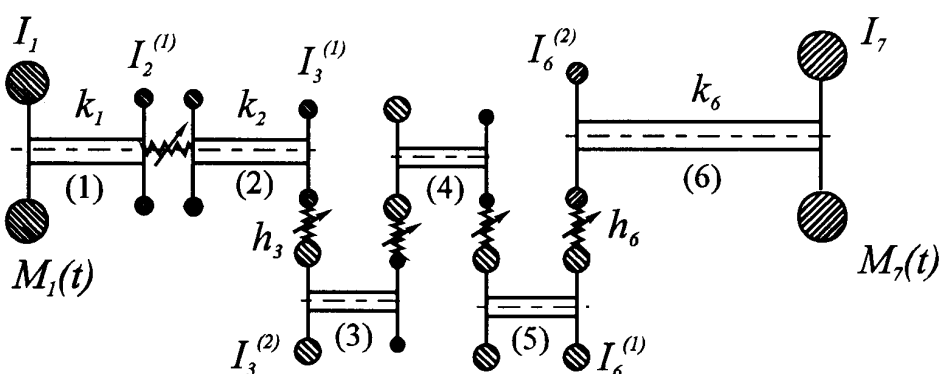


Rys. 4.11 Impulsowy przebieg momentu skręcającego przenieszonego przez przekładnię główną z uwzględnionymi luzami międzyzębnymi



Rys. 4.12 Płynny przebieg momentu skręcającego przenieszonego przez półosie napędowe pojazdu samochodowego

Należy podkreślić, że zastosowanie rozwiązania typu d'Alemberta falowych równań ruchu (2.1) prowadzące do równań różniczkowych zwyczajnych z przesuniętym argumentem szczególnie ułatwia analizę drgań w przypadkach występowania w badanym układzie mechanicznym tzw. silnych nieliniowości lokalnych spowodowanych na przykład luzami w przegubach i przekładniach zębatych, czy efektami tarcia suchego w sprzęgłach ciernych. Podczas symulacji drgań wymuszonych zachodzi wówczas potrzeba numerycznego znajdowania punktów nieciągłości odpowiednich nieliniowych charakterystyk, na przykład charakterystyki tarcia w sprzęgle według modelu Coulomba lub jego modyfikacji, [98], albo znajdowania punktów nieciągłości pochodnych tych charakterystyk, przykładowo skokowo-zmiennej sztywności zazębienia przekładni zębatej z luzami. Sekwencyjna technika numerycznego całkowania równań różniczkowych z przesuniętym argumentem typu (3.6) pozwala na wykorzystywanie w celu znalezienia punktu nieciągłości charakterystyki danego źródła silnej nieliniowości, na przykład przekładni zębatej, jedynie tylko tego równania, które odpowiada dynamicznemu warunkowi brzegowemu typu (3.5) opisującemu ruch tego źródła. Natomiast w przypadku zastosowania do symulacji drgań analogicznego modelu dyskretnego badanego układu mechanicznego, do znajdowania omawianych punktów nieciągłości nieliniowych charakterystyk musi być wykorzystywany cały układ nieliniowych sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych opisujących ruch tego modelu. Przy stosowanych zazwyczaj do tego celu technikach iteracyjnych, omawiana zaleta modelu dyskretno-ciągłego pozwala na istotne zmniejszenie liczby niezbędnych operacji arytmetycznych podczas wykonywania symulacji drgań, co prowadzi do znaczącego skrócenia czasu obliczeń oraz zwiększenia dokładności i stabilności numerycznej proponowanego algorytmu. Ta zaleta nabiera szczególnego znaczenia w przypadkach występowania wielu źródeł silnych nieliniowości lokalnych w badanym układzie mechanicznym, gdzie zachodzi potrzeba szukania punktów nieciągłości kilku nieliniowych charakterystyk w zakresie podstawowej długości jednego kroku numerycznego całkowania. Wówczas proces iteracyjnego poszukiwania mocno się komplikuje prowadząc w przypadku tradycyjnego modelu dyskretnego do podziału podstawowej długości jednego kroku numerycznego całkowania na kilka „mini-kroków”. Natomiast przy sekwencyjnym rozwiązywaniu równań z przesuniętym argumentem typu (3.6) w przypadku modelu dyskretno-ciągłego problem ten nie występuje, ponieważ przy każdym źródle silnej nieliniowości, a więc dla każdego równania typu (3.6) z osobna, owe poszukiwanie odbywa się niezależnie prowadząc odpowiednio do indywidualnych podziałów podstawowej długości jednego kroku numerycznego całkowania na co najwyżej dwa „mini-kroki”.

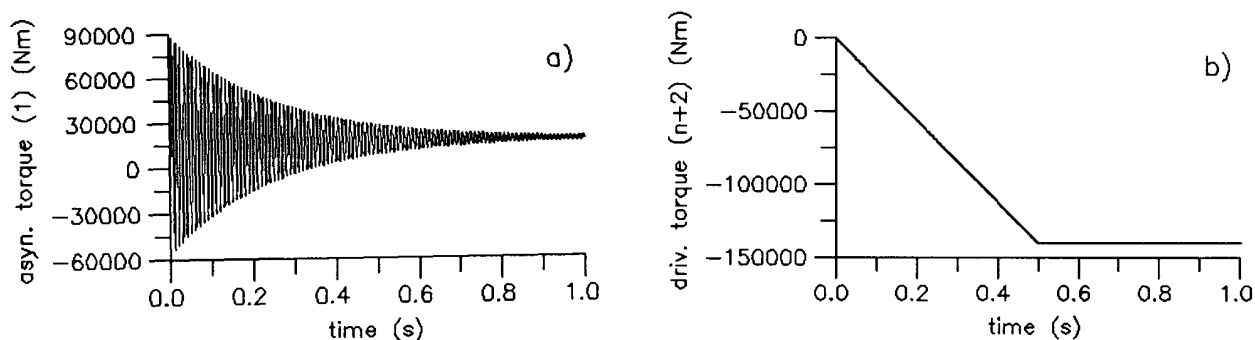


Rys. 4.13 Dyskretno-ciągły model mechaniczny wieloprzekładniowego układu napędowego

Omawianą zaletę stosowania falowych rozwiązań typu d'Alemberta równań ruchu (2.1) wykorzystano w pracy [176], w której przedmiotem badań jest pokazany na rysunku 4.13 dyskretno-ciągły model mechaniczny drgającego skrętnie wieloprzekładniowego układu napędu maszyny roboczej poruszanej silnikiem elektrycznym. W tym modelu w kolejnych  $n$  stopniach przekładni zębatej uwzględniono zarówno luzy międzyzębne, jak i periodyczną zmienność sztywności zazębienia powodowaną okresowo-zmienną liczbą par zębów znajdujących się w

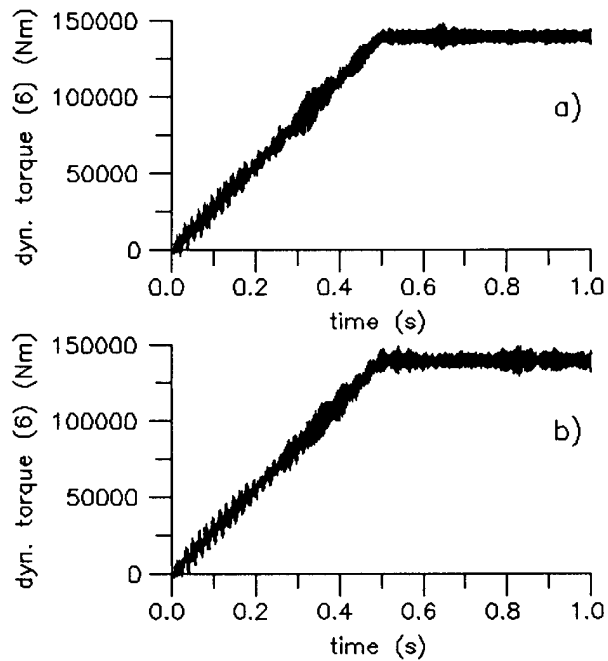
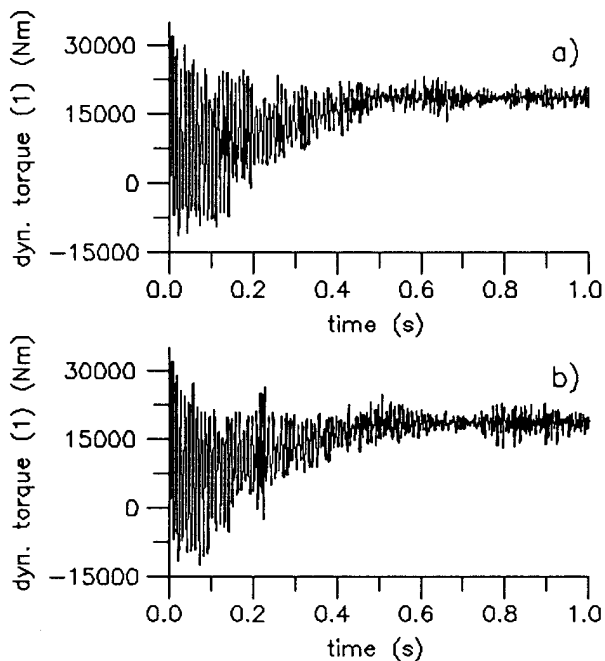


chwilowym przyporze. Ze względu na typowy dla wielu układów napędowych stosunkowo mały udział masowych momentów bezwładności wałów i osi w porównaniu z masowymi momentami bezwładności kół zębatych, tarcz sprzęgieł, wirników silników elektrycznych, kół zamachowych, wirników maszyn napędzanych, na przykład prądnic, i innych, istnieje możliwość łatwego dobrania parametrów analogicznego modelu dyskretnego badanego obiektu, w którym w przeciwieństwie do modelu dyskretno-ciągłego proponowanego w pracy, poszczególne odcinki wałów i osi są reprezentowane bezmasowymi elementami sprężysto-tłumiącymi. Wówczas dla obydwu modeli mechanicznych oprócz takiej samej struktury i całkowitego masowego momentu bezwładności względem danej osi obrotu można otrzymać po linearyzacji niemal identyczne widmo podstawowych częstości oraz praktycznie pokrywające się postacie drgań własnych. Stosując takie kryteria odpowiedniości, w pracy [176] porównano wyniki symulacji nieliniowych drgań skrętnych wieloprzekładniowego układu napędowego uzyskane za pomocą pokazanego na rysunku 4.13 modelu dyskretno-ciągłego o  $2n+2=12$  bryłach sztywnych oraz za pomocą analogicznego modelu dyskretnego o 12 stopniach swobody. Dla tych modeli różnice kolejnych pierwszych 11 częstości drgań własnych układów zlinearyzowanych nie przekroczyły 0.1%. W przypadku modelu dyskretno-ciągłego rozwiązywano sekwencyjnie  $n=5$  równań różniczkowych z przesuniętym argumentem typu (3.6) o wymiarze 2 oraz 2 równania typu (3.4b). Natomiast w przypadku modelu dyskretnego rozwiązywano układ 12 nieliniowych sprzężonych równań różniczkowych zwyczajnych drugiego rzędu. W obydwu przypadkach modeli do numerycznego rozwiązywania tych równań zastosowano metodę Newmarka przy tej samej podstawowej długości kroku całkowania. Za pomocą obydwu podejść badano nieliniowe skrętne drgania przejściowe powstające przy rozruchu maszyny napędzanej ze stanu spoczynku do znamionowych warunków pracy. Przebiegi w czasie momentu rozruchowego generowanego przez silnik elektryczny oraz momentu



Rys. 4.14 Przebiegi momentów zewnętrznych generowanych podczas rozruchu układu napędowego przez silnik elektryczny (a) i maszynę roboczą (b)

oporowego maszyny roboczej pokazano na rysunku 4.14. Uzyskując ok. 32-krotnie krótszy czas obliczeń za pomocą modelu dyskretno-ciągłego, przy wykorzystaniu obu modeli otrzymano podobne wyniki przebiegów dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez poszczególne odcinki wałów, jak przykładowo pokazano na rysunku 4.15, oraz na ogół podobne wyniki przebiegów dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez kolejne stopnie przekładni zębatej, gdzie zaistniałe różnice mają charakter ilościowy w formie innych wartości maksymalnych kolejnych 'pików' momentu spowodowanych zderzeniami par zębów. Jednak wystąpiły również przypadki zaistnienia znacznych różnic jakościowych przebiegów momentu skręcającego przenoszonego przez zazębienia przekładni. Rysunek 4.16 a i b przedstawia przebiegi w dziedzinie czasu i częstości dynamicznego momentu przenoszonego przez zazębienie drugiego stopnia przekładni uzyskane odpowiednio za pomocą modelu dyskretnego i dyskretno-ciągłego. Porównując obydwie wyniki, w przypadku modelu dyskretnego widocznym jest brak istotnego wysokoczęstotliwościowego 'komponentu' przebiegu momentu skręcającego powstającego podczas środkowej fazy rozruchu maszyny. Komponent ten charakteryzuje się wyjątkowym występowaniem również ujemnych 'pików' momentu, co wskazuje na zderzenia biernych stron par zębów mimo

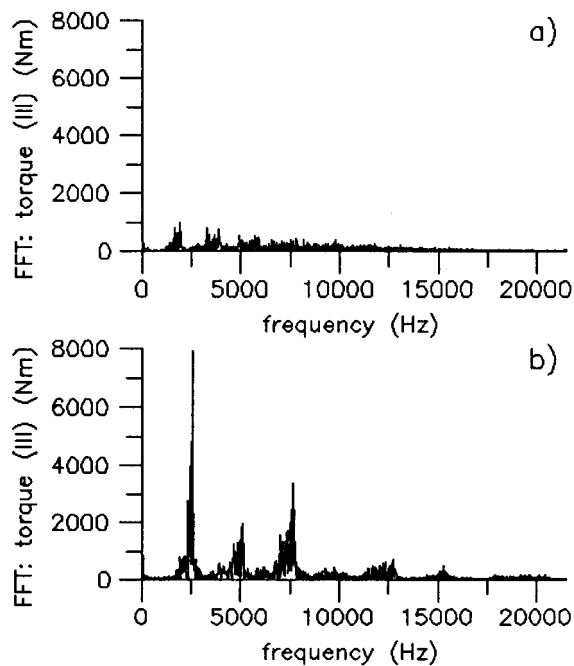
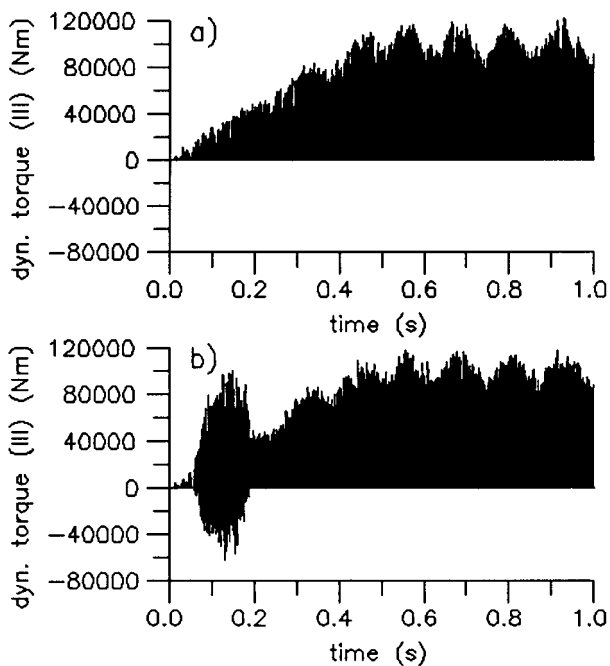


Moment przenoszony przez wał (1) łączący wirnik silnika elektrycznego ze sprzęgłem podatnym

Moment przenoszony przez wał (6) łączący ostatni stopień przekładni zębatej z wirnikiem maszyny roboczej

Rys. 4.15 Dynamiczne momenty skręcające uzyskane za pomocą modelu dyskretnego (a) i dyskretno-ciągłego (b)

szybkiego narastania stałej części momentu napędowego generowanego przez silnik, która przewyższa składowe zmienne na tyle by w pozostałych zazębeniach miały miejsce jedynie zderzenia czynnych stron par zębów przejawiające się w postaci ‘pików’ dodatnich. Należy sądzić, iż mimo zastosowanych do obu równoważnych dynamicznie modeli mechanicznych tej samej metody bezpośredniego całkowania równań różniczkowych oraz tej samej procedury iteracyjnego znajdowania punktów nieciągłości sztywności zazębenia przekładni, zaistniałe różnice uzyskanych wyników są spowodowane sekwencyjnym rozwiązywaniem równań z przesuniętym argumentem i

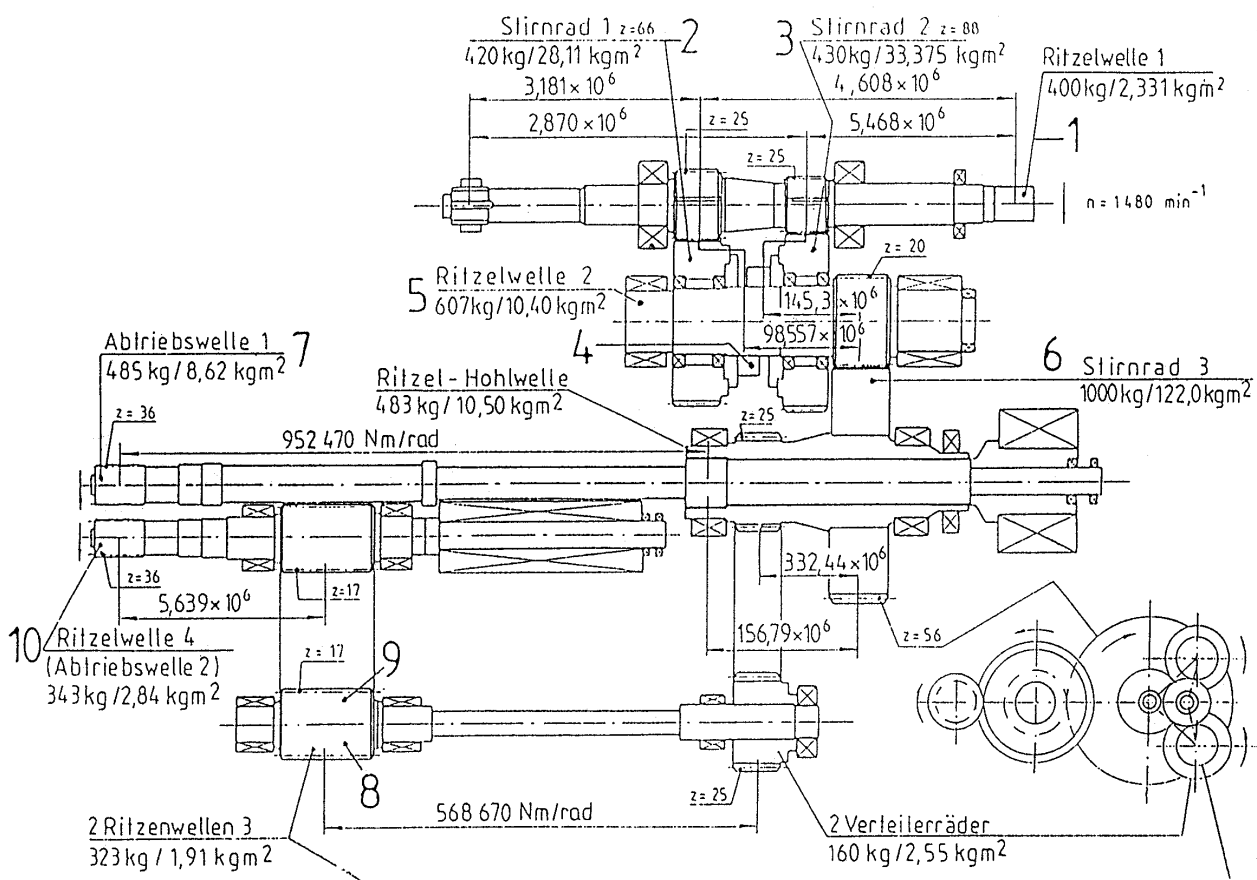


Rys. 4.16 Dynamiczny moment skręcający przenoszony przez zazębienie II stopnia przekładni uzyskany za pomocą modelu dyskretnego (a) i dyskretno-ciągłego (b)

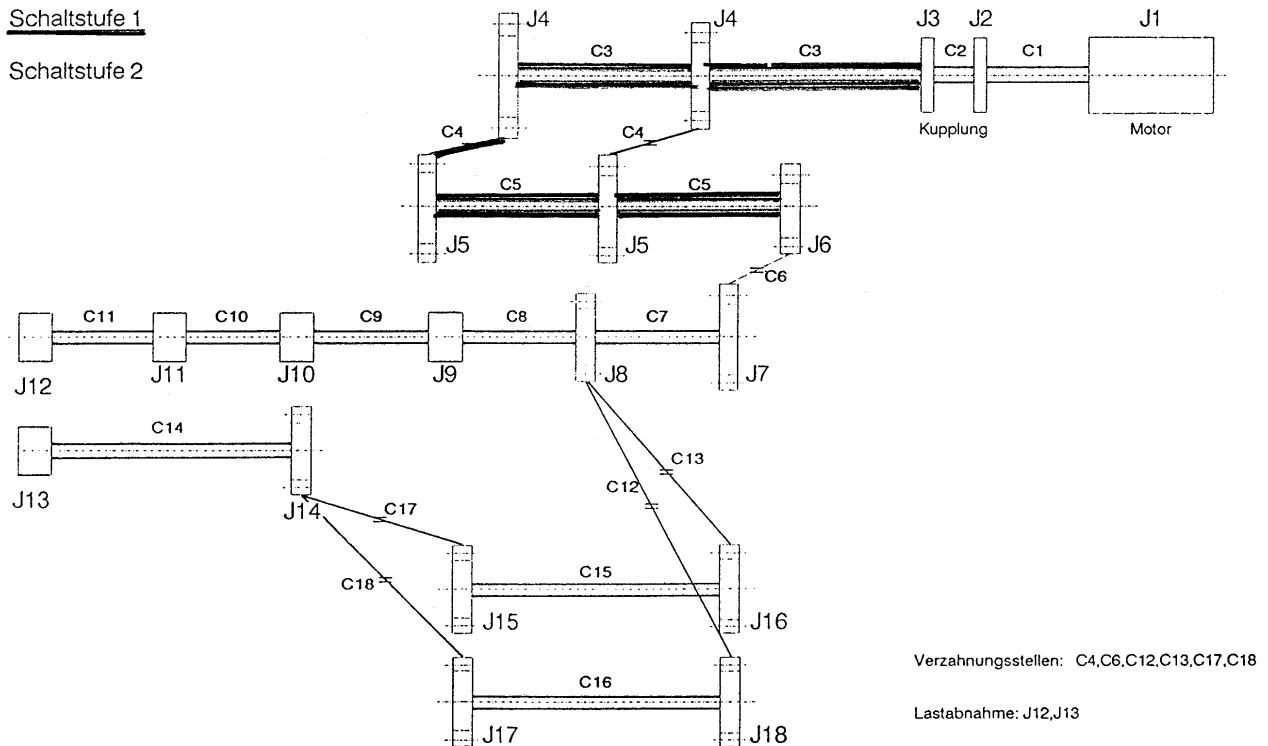
związaną z tym mniejszą liczbą wykonywanych niezbędnych operacji arytmetycznych. Powstałe w ten sposób prawdopodobieństwo popełniania znacznie mniejszych błędów numerycznych podczas symulacji drgań pozwala domniemywać, że wyniki otrzymane przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego i rozwiązania równań ruchu typu d'Alemberta są dokładniejsze.

Przedstawione powyżej przykłady modelowania układów napędowych i porównania wyników analizy drgań skrętnych z wynikami uzyskanymi za pomocą analogicznych modeli dyskretnych miały charakter głównie akademicki i cel poznawczy. Szczególnie wartościowym wydaje się również dokonanie porównania proponowanej metody modelowania dyskretno-ciągłego przy wykorzystaniu rozwiązania falowego typu d'Alemberta z metodą tradycyjną opartą na modelu dyskretnym zastosowaną do konkretnego obiektu rzeczywistego do potrzeb aplikacyjnych. Jako przedmiot rozważań obrano więc drgający skrętnie układ napędu wylączarki przemysłowej dużej mocy poruszanej silnikiem asynchronicznym poprzez 1 sprzęgło podatne o charakterystyce progresywnej, 3 przekładnie zębate 1-stopniowe, w tym 2 przełączalne, oraz 2 przekładnie zębate 1-stopniowe z rozdziałem mocy, jak pokazano na rysunku 4.17. Ten obiekt rozpatrywano w Raporcie Wewnętrzny [195] firmy MEC-Alsdorf (RFN) stanowiącym ekspertyzę mającą na celu zbadanie przyczyn nadmiernego zużywania się zębów przekładni w układzie napędu tego typu wylączarki.

Należy zauważyć, że rozpatrywany układ napędowy nie jest prostym tzw. „łańcuchem skrętnym”, lecz typowym układem rozgałęzionym. Analizę drgań skrętnych układu napędowego omawianej wylączarki przeprowadzono w [195] przy wykorzystaniu przedstawionego na rysunku 4.18 klasycznego modelu dyskretnego o 18 stopniach swobody, w którym podatność skrętną sprzęgła podatnego, wszystkich ząbów przekładni i odcinków wałów zastąpiono 20 bezmasowymi elementami sprężysto-tłumiącymi o zadanych zmiennych i stałych sztywnościach skrętnych i współczynnikach tłumienia strukturalnego.



Rys. 4.17 Schemat układu napędowego wylączarki przemysłowej, [195]

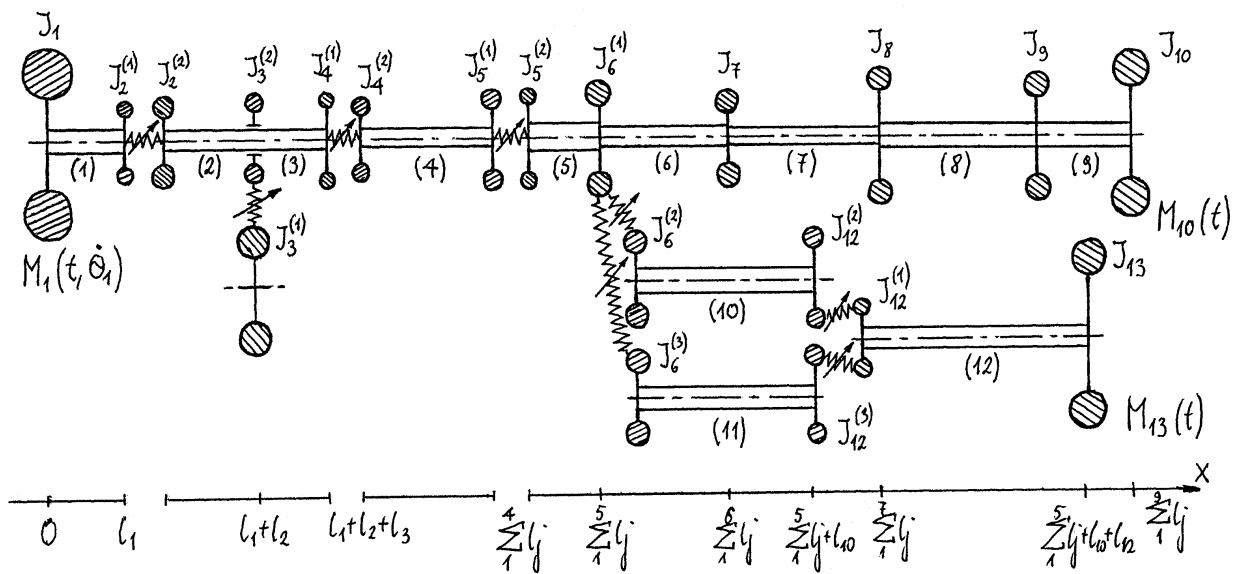


Rys. 4.18 Dyskretny model mechaniczny układu napędowego wylączarki przemysłowej, [195]

Kiedy przekładniowy układ napędowy maszyny roboczej lub pojazdu przenosi dostatecznie duży stały moment skręcający w stosunku do przewidywanych wartości składowych zmiennych wywołanych efektami dynamicznymi, zakłada się często, na przykład w [56, 95, 98, 127], że współpracujące ze sobą koła zębate przekładni są w stałym przypoście i nie dochodzi wtedy do wzajemnych uderzeń par zębów. Wówczas nie ma potrzeby uwzględniania luzów międzyzębnych, natomiast szczególnego znaczenia nabiera okresowa zmienność sztywności zazębienia przekładni spowodowana periodycznie zmieniającą się liczbą par zębów będących ze sobą w chwilowym kontakcie. Jak wiadomo, okresowa zmienność sztywności w każdym lepko-bezwładnościowo-sprężystym układzie mechanicznym może być przyczyną występowania drgań parametrycznych, które w warunkach rezonansowych powodują niebezpieczne nadwyżki dynamicznych sił i momentów. W przypadku układów napędowych drgających skrajnie rezonanse parametryczne wywoływane okresową zmiennością sztywności zazębienia przekładni mogą być często przyczyną nadmiernego ich zużycia się, co wykazano w Raporcie [195]. Tą okresową zmienność sztywności zazębienia można opisywać matematycznie w różnorodny sposób. Najczęściej stosowanymi opisami są harmoniczny i trapezoidalny z podstawową częstotliwością równą iloczynowi prędkości kątowej danego koła zębatego i liczby jego zębów, [95, 98]. Zakładając przenoszenie przez układ napędu wylączarki w znamionowych warunkach pracy stosunkowo dużego stałego momentu skręcającego w porównaniu do przewidywanych amplitud składowych zmiennych, w [195] pominięto luzy międzyzębne we wszystkich przekładniach i przyjęto harmonicznie zmienne sztywności ich zazębienia.

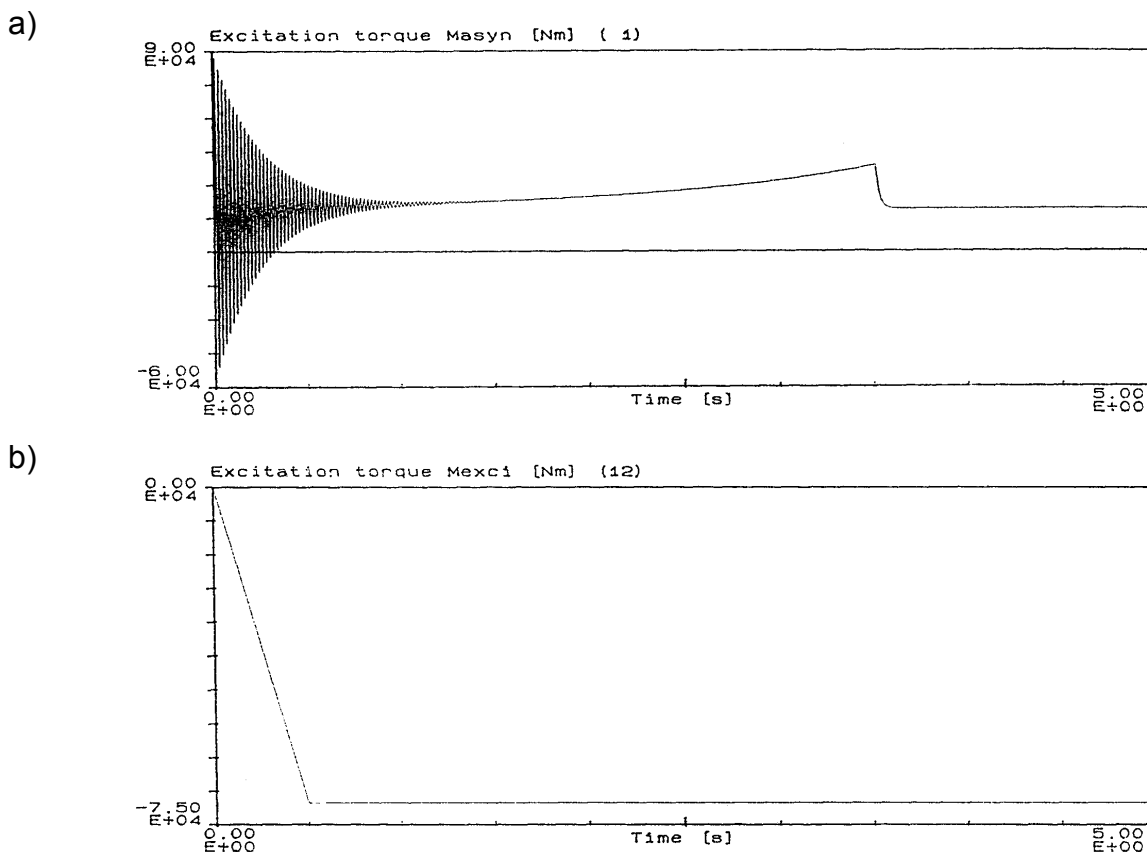
Według przyjętych powyżej założeń zbudowano dyskretno-ciągły model mechaniczny układu napędu tej wylączarki, którego struktura jest identyczna w porównaniu ze strukturą modelu dyskretnego, jak pokazano na rysunku 4.19. Model dyskretno-ciągły składa się z 12 prętowych L-SMC reprezentujących odcinki wałów, 20 brył sztywnych zastępujących bezwładność wirnika silnika elektrycznego, tarcz sprzęgła podatnego, kół zębatach i narzędzi roboczych wylączarki oraz z 8 bezmasowych elementów sprężysto-tłumiących reprezentujących nieliniowe własności sprzęgła i zazębienia przekładni. Parametry tego modelu, tj. wymiary geometryczne i sztywności skrętne

wałów, masowe momenty bezwładności brył sztywnych, składowe stałe sztywności zazębień i wartości przełożeń przekładni zębatych wraz z wymiarami geometrycznymi zębów, współczynniki tłumienia zewnętrznego, tłumienia strukturalnego w materiale wałów i połączeniach oraz tłumienia mgły olejowej w przekładniach zębatych, progresywną charakterystykę sprzęgła podatnego, charakterystykę momentu napędowego silnika asynchronicznego, jak również charakterystyki momentu oporowego narzędzi roboczych i inne przyjęto identyczne jak w przypadku modelu dyskretnego pokazanego na rysunku 4.18. Zgodnie z wykorzystywanymi w [195] wytycznymi z monografii [98], w obydwu modelach przyjęto taki sam harmoniczny charakter zmienności sztywności zazębień przekładni. Przy tym założeniu różnice względne pierwszych 17 częstości skrętnych drgań własnych obu zlinearyzowanych modeli w zakresie 0÷2500 Hz nie przekroczyły 6%, przy czym w przypadku pierwszych 7 częstości różnice te były mniejsze od 0.09%, różnice następnych 9 częstości nie przekroczyły 2.8%, a największa różnica wystąpiła przy najwyższej rozpatrywanej 17 częstości i wyniosła 5.68%.



Rys. 4.19 Dyskretno-ciągły model mechaniczny układu napędu wyciązarki przemysłowej

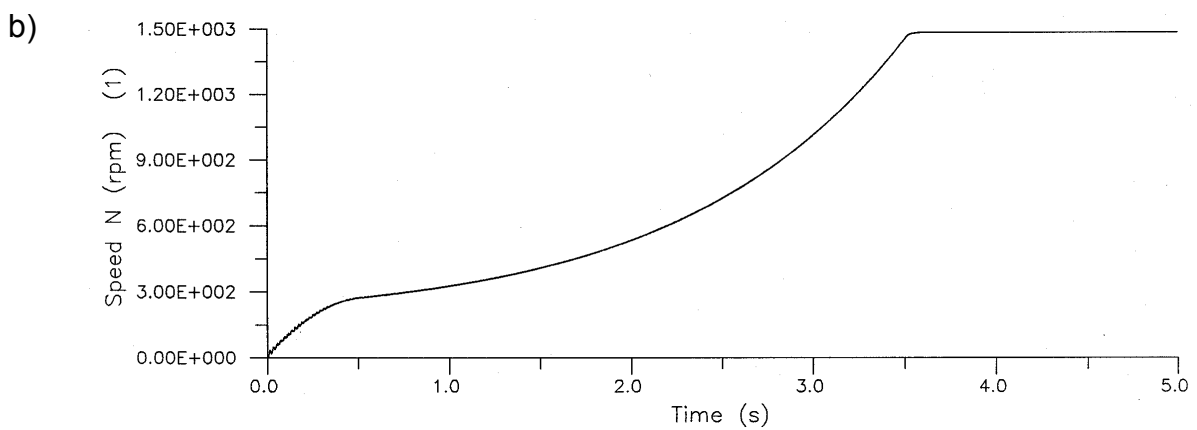
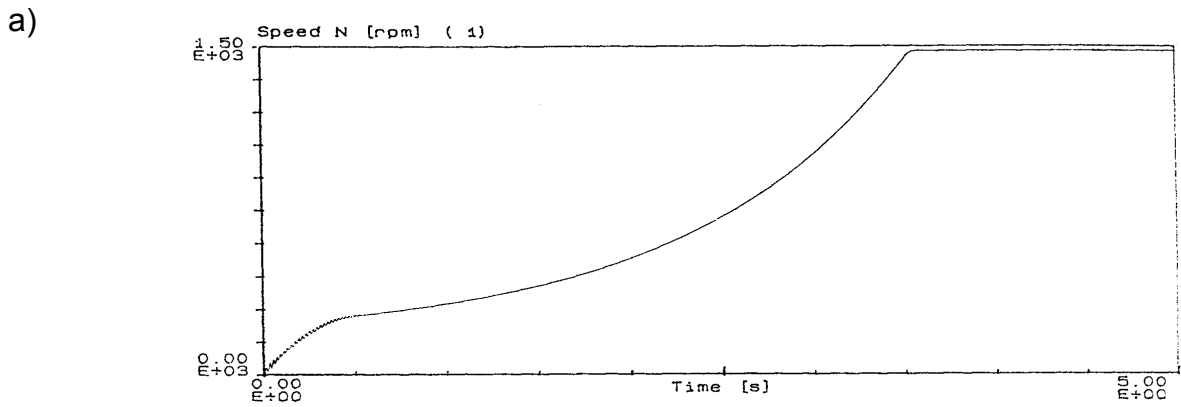
Identycznie jak w [195], przeprowadzono symulację nieliniowych, przejściowych drgań skrętnych układu napędowego występujących podczas trwającego 5 sekund rozruchu urządzenia ze stanu spoczynku do znamionowych warunków pracy. W tym celu w przypadku modelu dyskretnego rozwiązywano układ 18 sprzężonych, nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych stosując metodę bezpośredniego całkowania Taylora zaimplementowaną w komercyjnym programie komputerowym MEC-SIMUL opracowanym w początkowej fazie w Nadreńsko-Westfalskim Uniwersytecie Technicznym (RWTH) w Aachen i dostosowanym do potrzeb przemysłowych przez firmę MEC GmbH-Alsdorf, [99]. Natomiast odpowiadający dyskretno-ciągłemu modelowi mechanicznemu model matematyczny badanego obiektu charakteryzuje się 4 równaniami różniczkowymi z przesuniętym argumentem typu (3.4a), 6 równaniami typu (3.4b) oraz 3 równaniami typu (3.6) o wymiarze 2 i 2 równaniami typu (3.6) o wymiarze 3. Do ich sekwencyjnego całkowania numerycznego zastosowano metodę Newmarka przy długości kroku 0.00003125 s, która odpowiada najkrótszemu okresowi drgań o częstotliwości 32000 Hz przekraczającej ok. 14 razy 17 częstość skrętnych drgań własnych obu modeli układu napędowego. Przyjęte do obu porównywanych modeli takie same przebiegi w czasie zewnętrznego momentu napędowego generowanego przez silnik asynchroniczny podczas rozruchu oraz identyczne dla obydwu narzędzi roboczych wyciązarki przebiegi zewnętrznych momentów oporowych przedstawiają odpowiednio rysunki 4.20 a i b.



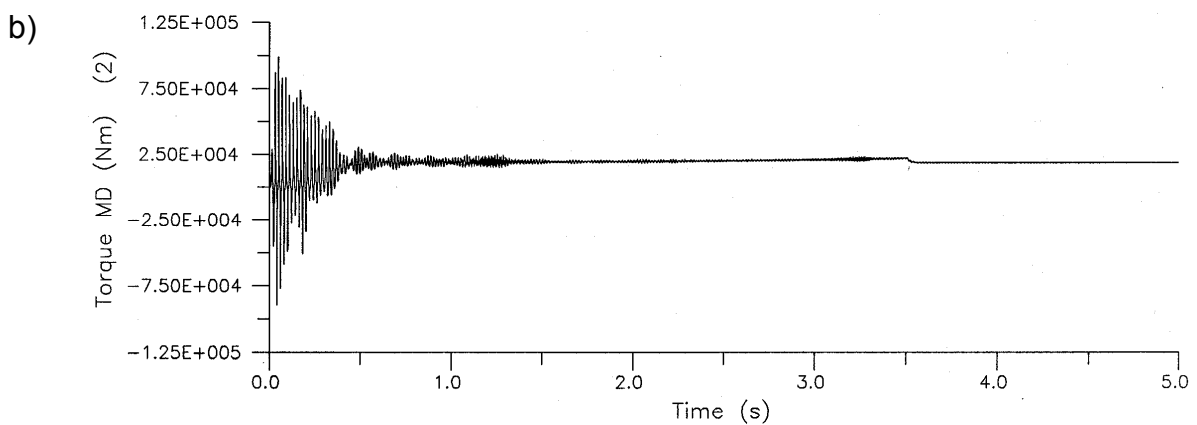
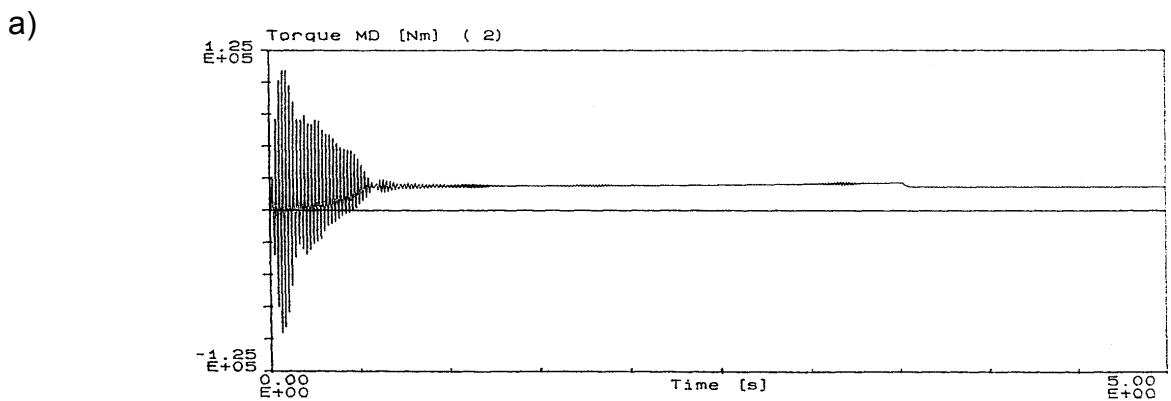
Rys. 4.20 Przebiegi momentów zewnętrznych przyłożonych do: wirnika silnika elektrycznego (a), narzędzi roboczych wylączarki (b), [195]

Wielkościami badanymi drogą symulacji były dynamiczne momenty skręcające przenoszone przez poszczególne elementy układu napędowego, takie jak wszystkie odcinki wałów, sprzęgło podatne i wszystkie zazębienia przekładni, przyspieszenia kątowe wybranych kół zębatych przekładni oraz prędkość obrotowa wirnika silnika elektrycznego. Na rysunkach 4.21 a i b przedstawiono wykresy przebiegów prędkości obrotowej wirnika silnika elektrycznego podczas rozruchu układu napędowego otrzymane odpowiednio za pomocą modelu dyskretnego w [195] oraz za pomocą modelu dyskretno-ciągłego. Na następnych kolejnych rysunkach od 4.22 a,b do 4.28 a,b przedstawiono otrzymane w [195] przy wykorzystaniu modelu dyskretnego oraz za pomocą modelu dyskretno-ciągłego wykresy przebiegów następujących wielkości: dynamicznego momentu skręcającego przenoszonego przez sprzęgło podatne (C2), rys. 4.22 a,b, dynamicznego momentu skręcającego przenoszonego przez odcinki wałów (C5) i (C14), odpowiednio rys. 4.26 a,b i 4.28 a,b, dynamicznego momentu skręcającego przenoszonego przez zazębienie pierwszej przekładni (C4) w dziedzinie czasu i częstości, rys. 4.23 a,b i 4.24 a,b, przyspieszenia kąowego zębniaka pierwszej przekładni (C4), rys. 4.25 a,b, oraz dynamicznego momentu skręcającego przenoszonego przez zazębienie przekładni drugiej (C6), rys. 4.27 a,b.

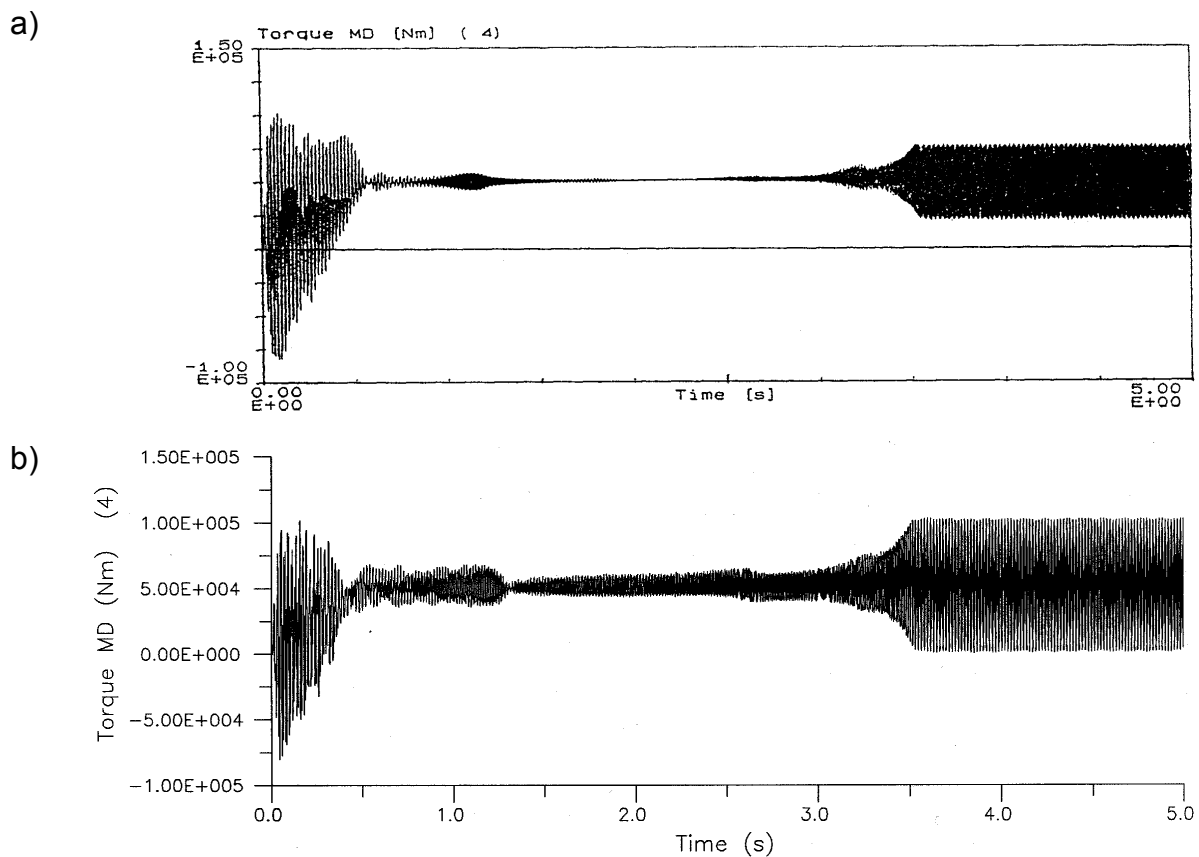
Śledząc przebiegi w czasie badanych wielkości można wyróżnić kolejne fazy rozruchu układu napędu wylączarki. W ciągu pierwszej sekundy rozruchu układ doznaje silnych drgań przejściowych na skutek stosunkowo dużych fluktuacji momentu napędowego wytwarzanego przez silnik asynchroniczny. Dotyczy to przede wszystkim momentów dynamicznych przenoszonych przez sprzęgło podatne, odcinki wałów oraz zazębienia przekładni, co widać na rysunkach 4.22, 4.23 i 4.26-4.28. W tym czasie następuje również szybkie narastanie składowej stałej momentu napędowego oraz momentów oporowych przyłożonych do narzędzi roboczych wylączarki, jak wynika z rysunków 4.20 a i b. W ciągu następnych ok. 2.5 sekundy trwania rozruchu zanikają silne fluktuacje dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez poszczególne elementy



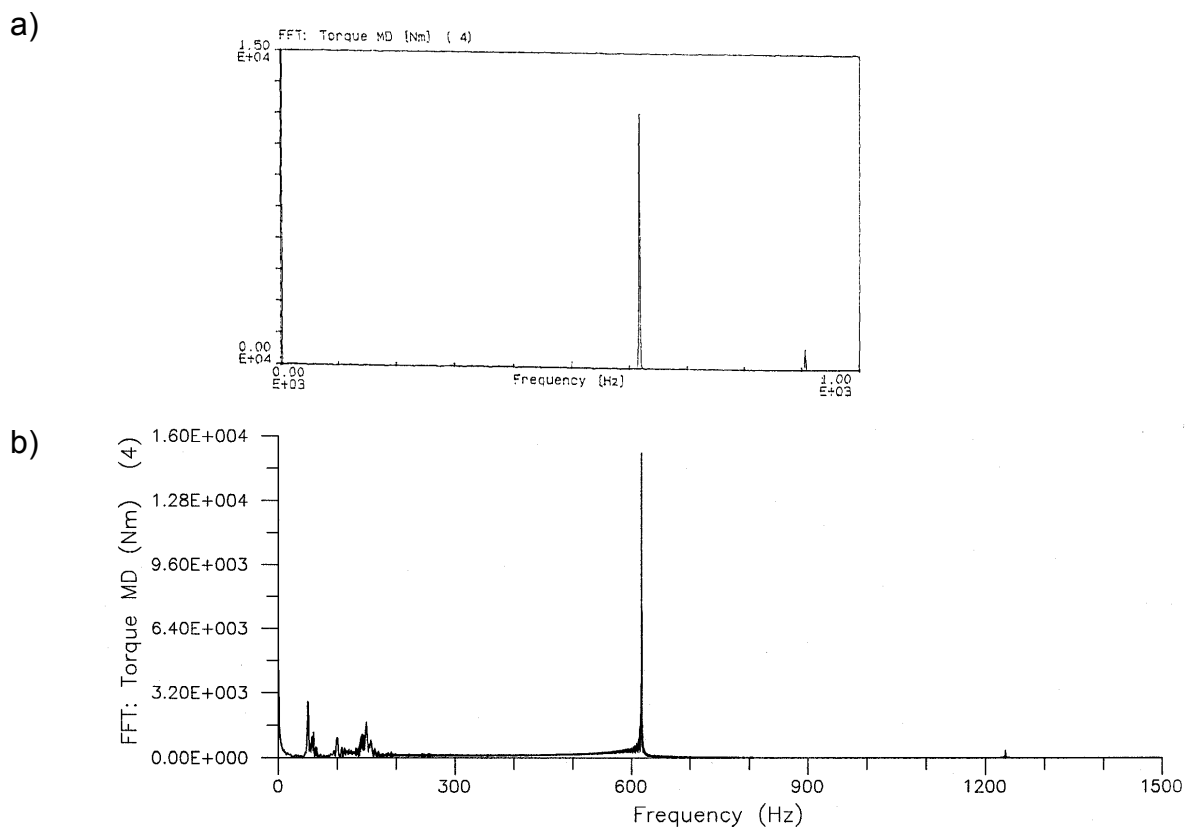
Rys. 4.21 Przebiegi prędkości obrotowej wirnika silnika elektrycznego podczas rozruchu – uzyskane za pomocą modelu: dyskretnego (a), [195], dyskretno-ciągłego (b)



Rys. 4.22 Dynamiczny moment skręcający przenoszony przez sprzęgło podatne (C2) – uzyskany za pomocą modelu: dyskretnego (a), [195], dyskretno-ciągłego (b)



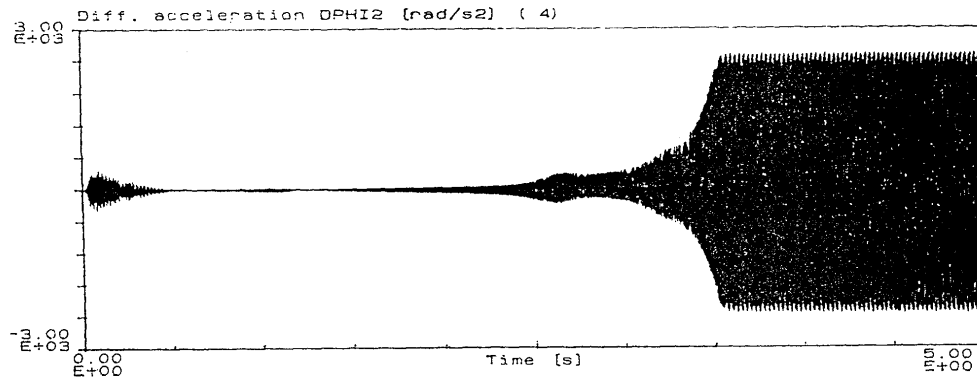
Rys. 4.23 Dynamiczny moment skręcający przenoszony przez ząbienie pierwszej przekładni (C4) – uzyskany za pomocą modelu: dyskretnego (a), [195], dyskretno-ciągłego (b)



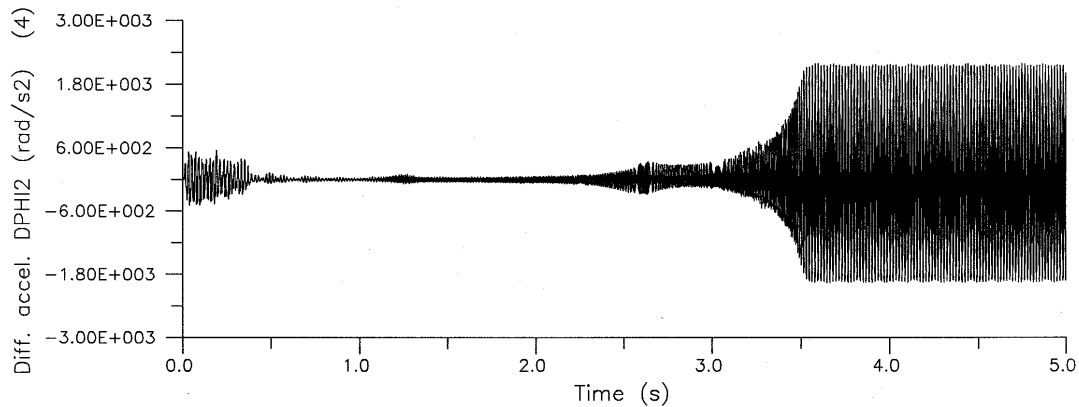
Rys. 4.24 Widmo amplitudowe dynamicznego momentu skręcającego przenoszonego przez ząbienie pierwszej przekładni (C4)– uzyskane za pomocą modelu: dyskretnego (a), [195], dyskretno-ciągłego (b)



a)

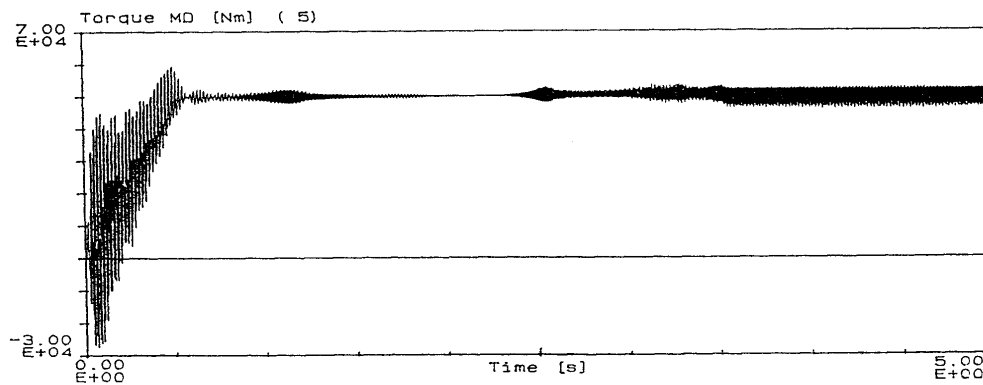


b)

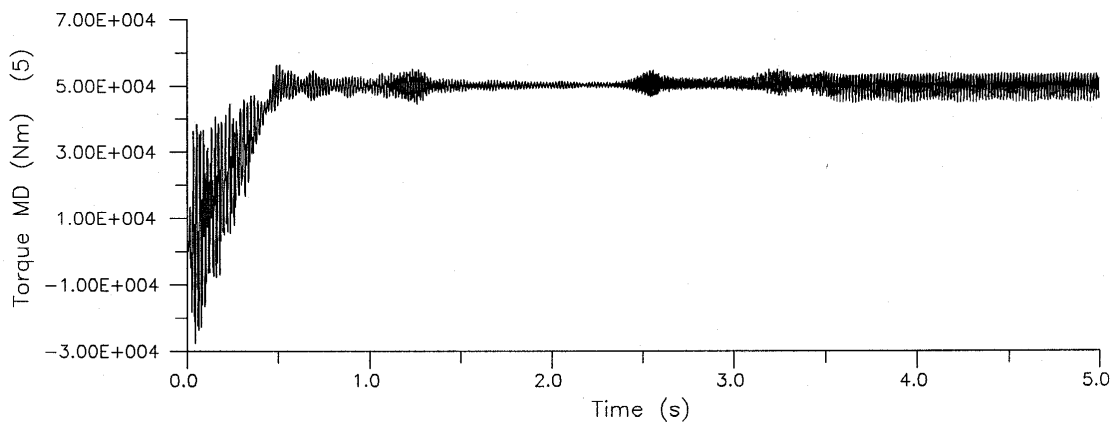


Rys. 4.25 Przyspieszenie kątowe zębniaka pierwszej przekładni (C4) – uzyskane za pomocą modelu: dyskretnego (a), [195], dyskretno-ciągłego (b)

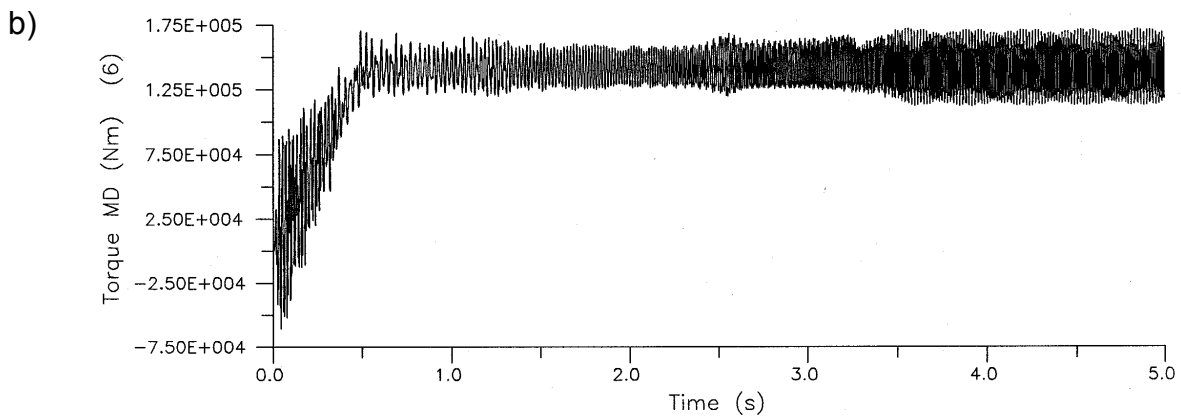
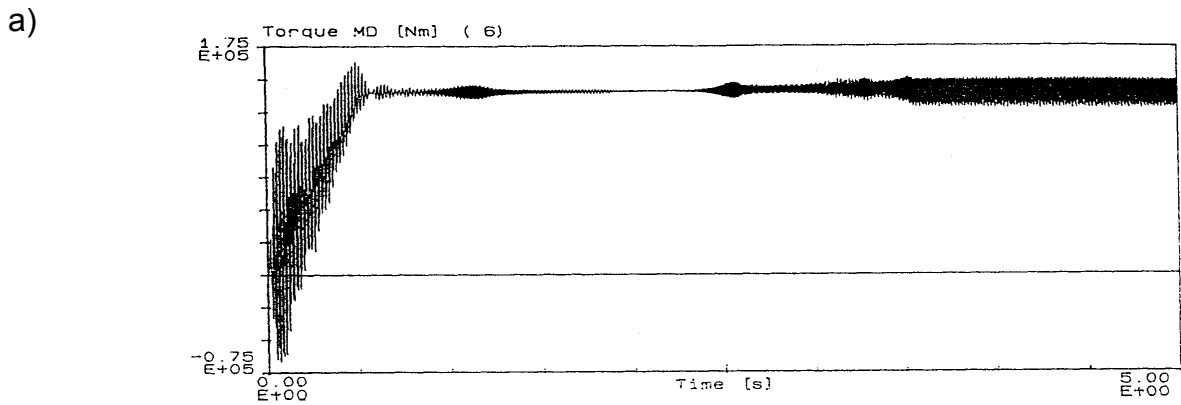
a)



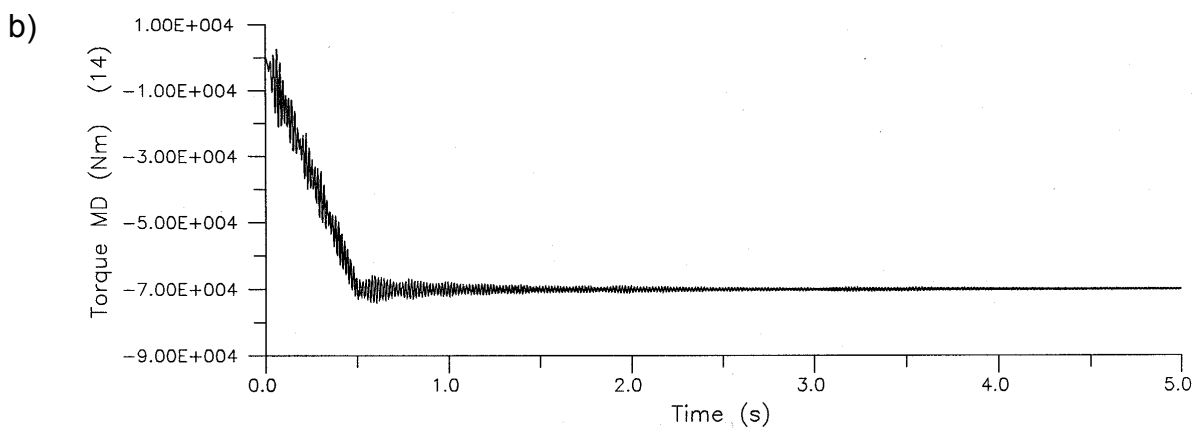
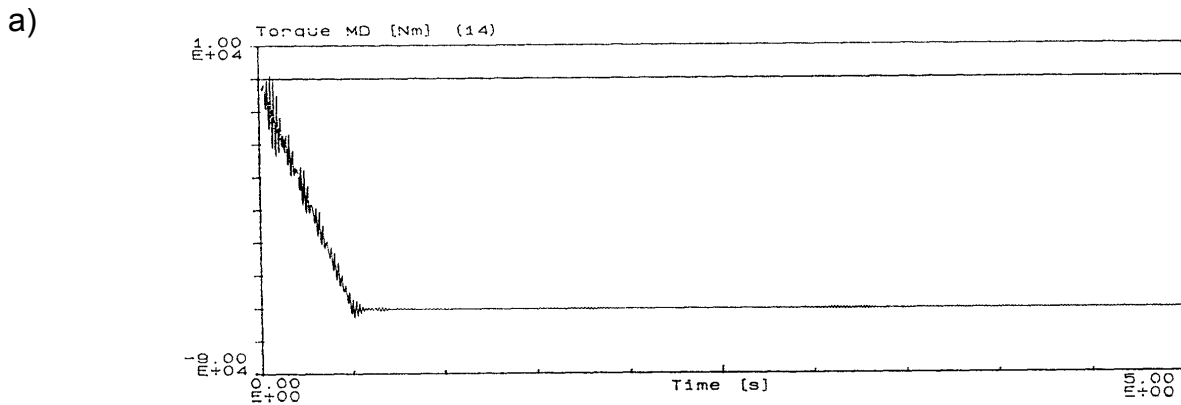
b)



Rys. 4.26 Dynamiczny moment skręcający przenoszony przez wał (C5) łączący pierwszą przekładnię z drugą przekładnią – uzyskany za pomocą modelu: dyskretnego (a), [195], dyskretno-ciągłego (b)



Rys. 4.27 Dynamiczny moment skręcający przenoszony przez zazębienie drugiej przekładni (C6) – uzyskany za pomocą modelu: dyskretnego (a), [195], dyskretno-ciągłego (b)



Rys. 4.28 Dynamiczny moment skręcający przenoszony przez wał (C14) łączący narzędzie robocze z czwartą przekładnią – uzyskany za pomocą modelu: dyskretnego (a), [195], dyskretno-ciągłego (b)

układu oraz ustalają się ich wartości znamionowe przy jednoczesnym płynnym wzroście średniej prędkości obrotowej. Po 3.5 sekundach od chwili rozpoczęcia rozruchu następuje ustalenie się średniej znamionowej prędkości obrotowej układu napędowego do wartości 1500 obr/min dla wału silnika odpowiadającej prędkości kątowej 157.1 rad/s oraz ostateczne ustalenie się składowej stałej momentu napędowego silnika do wartości  $\sim 15$  kNm. Wówczas w zazębieniu pierwszej przekładni zębatej (C4) ma miejsce znaczny wzrost składowej zmiennej momentu skręcającego i przyspieszenia kątowego o stałej amplitudzie i częstotliwości  $\sim 625$  Hz, jak pokazano na rys. 4.23-4.25. Ta wartość odpowiada iloczynowi ww. znamionowej średniej prędkości kątowej mnożonej przez liczbę zębów zębniaka pierwszej przekładni równą 25 i jest bliska ósmej częstotliwości skrętnych drgań własnych rozpatrywanego układu równej 646 Hz. Wzrost składowej zmiennej momentu skręcającego po 3.5 sekundy trwania rozruchu jest również obserwowany w wałach (C3) i (C5) przyległych do pierwszej przekładni, rys. 4.26, oraz w zazębieniu drugiej przekładni (C6), rys. 4.27. W tych warunkach następuje więc silny rezonans parametryczny wywołujący bardzo znaczne wartości składowych dynamicznych przenoszonego momentu skręcającego, które mogą być poszukiwaną przyczyną nadmiernie szybkiego zużywania się przekładni zębatych w układzie napędu tego typu wyciarczarki.

Głównym założonym celem przeprowadzanych w pracy rozważań dotyczących analizy drgań skrętnych układu napędu wyciarczarki jest porównanie odpowiadających sobie wyników symulacji uzyskanych za pomocą obu modeli. Przy wykorzystaniu modelu dyskretnego i dyskretno-ciągłego, jak widać na rysunkach 4.21 a i b, otrzymuje się bardzo podobne przebiegi prędkości obrotowej wirnika silnika elektrycznego, przyspieszenia kątowego zębniaka pierwszej przekładni (C4), rys. 4.25 a,b, oraz momentów skręcających przenoszonych przez sprzęgło podatne (C2), rys. 4.22 a,b, i przez wszystkie odcinki wałów, na przykład (C5) i (C14) - odpowiednio rys. 4.26, 4.28. Jedyne nieznaczne z punktu widzenia zastosowań inżynierskich różnice dotyczą wartości amplitud składowych zmiennych, które są nieco mniejsze w przypadku modelu dyskretnego. Natomiast istotne różnice otrzymanych wartości amplitud składowych zmiennych przebiegów badanych wielkości występują w przypadku momentów skręcających przenoszonych przez zazębienia przekładni. W szczególności, za pomocą modelu dyskretno-ciągłego uzyskano prawie dwukrotnie większe amplitudy drgań rezonansowych w zazębieniu pierwszej przekładni (C4), jak pokazano na rysunkach 4.23 a,b i 4.24 a,b. Znacząco różnią się także składowe zmienne momentów skręcających przenoszonych przez zazębienia pozostałych przekładni, tj. (C6), (C12) i (C18). W przeciwieństwie do odpowiednich przebiegów tych momentów otrzymanych za pomocą modelu dyskretnego, po wytłumieniu drgań przejściowych wymuszanych momentem napędowym silnika asynchronicznego w ciągu pierwszej sekundy rozruchu, w przypadku modelu dyskretno-ciągłego wyraźnie widocznymi są fluktuacje momentów skręcających wywoływane okresowo-zmienną sztywnością zazębienia, rys. 4.23b, i 4.27b. Ponadto, z zazębieniu drugiej przekładni (C6) zaznacza się wyraźniejszy niż w przypadku modelu dyskretnego wpływ rezonansu parametrycznego wzbudzanego przez zazębienie pierwszej przekładni (C4), jak pokazano na rysunkach 4.27 a,b.

W związku z powyższym, należy wnioskować, iż zaistniałe różnice odpowiadających sobie wyników symulacji przeprowadzonych za pomocą obu modeli układu napędu wyciarczarki są spowodowane przede wszystkim mniejszą dokładnością numeryczną rozwiązania równań ruchu metodą Taylora w porównaniu z rozwiązaniem równań różniczkowych z przesuniętym argumentem metodą Newmarka przy wymienionej powyżej długości kroku całkowania. Biorąc pod uwagę opisaną powyżej zgodność struktury i modeli tłumienia, zgodność wartości odpowiednich sztywności skrętnych i całkowitego masowego momentu bezwładności oraz bardzo zbliżone wartości pierwszych 17 częstości skrętnych drgań własnych obydwu zlinearyzowanych modeli, przy założonych identycznych nieliniowych charakterystykach lepko-sprężystych i funkcjach wymuszenia zewnętrznego, wpływ różnic wyników wynikający z błędów identyfikacji parametrów modelu dyskretnego i dyskretno-ciągłego wydaje się być mało znaczny. Jak wynika z informacji

zawartych w [195] dotyczących efektywności numerycznej symulacji drgań układu napędu wytłaczarki przy wykorzystaniu wspomnianego powyżej programu MEC-SIMUL oraz z pomiaru czasu analogicznej symulacji wykonanej opisywaną w pracy metodą falową za pomocą komputera personalnego o zbliżonej mocy obliczeniowej przy wymienionej długości kroku całkowania, sekwencyjne rozwiązywanie równań różniczkowych z przesuniętym argumentem pozwoliło na ok. 8-krotne skrócenie czasu obliczeń. Prawdopodobnie, zmniejszając krok numerycznego całkowania w przypadku modelu dyskretnego i zastosowanej do niego metody Taylora można byłoby uzyskać wyższą dokładność rozwiązania przejawiającą się większymi amplitudami składowych zmiennych momentów skręcających przenoszonych przez zazębienia przekładni, ale z pewnością pociągnęłoby to za sobą dodatkowy spadek efektywności obliczeń w porównaniu z efektywnością numeryczną metody falowej zastosowanej do modelu dyskretno-ciągłego.

Wyniki badań dotyczących warunków powstawania rezonansów parametrycznych w drgających skrętnie wieloprzekładniowych układach napędowych opublikowano w pracy [29]. Wykorzystując wspomniane powyżej założenie przenoszenia przez układ napędowy dostatecznie dużego stałego momentu skręcającego w stosunku do przewidywanych wartości składowych zmiennych wywoływanych efektami dynamicznymi, tak by móc pominąć luzy międzyzębne w przekładniach, w dyskretno-ciągłym modelu układu napędu maszyny roboczej pokazanym na rysunku 4.13 uwzględniono jedynie okresowo zmienną sztywność zazębienia kolejnych przekładni według wytycznych z [98]. W przypadku wymuszających momentów zewnętrznych generowanych przez silnik elektryczny i maszynę napędzaną przedstawionych odpowiednio na rysunkach 4.20 a i b otrzymano w [29] analogiczne efekty rezonansowe, jak te uzyskane dla układu napędu wytłaczarki przemysłowej. Przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego i rozwiązania typu d'Alemberta falowych równań ruchu w [33] do dwuprzekładniowego układu napędu zestawu kołowego lokomotywy elektrycznej przy założeniu harmonicznej zmienności sztywności zazębienia dokonano porównania wyników symulacji przejściowych drgań skrętnych przy uwzględnionych i pominiętych luzach międzyzębnymi. Otrzymane wyniki przebiegów dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez zazębienia przekładni oraz odcinki wałów i osi mają charakter podobny do odpowiednich przebiegów przedstawionych powyżej, na przykład na rysunkach 4.11, 4.12, 4.15, 4.16, 4.23, 4.26-4.28, oraz wyniki te są jakościowo zgodne z wynikami analogicznego porównania przeprowadzonego w [176], a także z wynikami uzyskanymi przez innych autorów, m. in. w [68, 138, 149].

#### **4.1.3 Zastosowanie rozwiązania falowego typu d'Alemberta do analizy drgań skrętnych wałów maszyn wirnikowych**

Maszyny i urządzenia, których główne elementy robocze wykonują ruch obrotowy noszą często nazwę maszyn wirnikowych. Należą do nich turbiny parowe, gazowe i wodne, sprężarki osiowe i promieniowe, dmuchawy, wentylatory i inne. Są to na ogół urządzenia dużej i bardzo dużej mocy, tj. od kilku do ponad tysiąca MW, mogące same stanowić źródło napędu, na przykład turbiny, lub być napędzane najczęściej silnikami elektrycznymi, jak sprężarki, dmuchawy, wentylatory. Wirniki maszyn wirnikowych, wirniki współpracujących z nimi maszyn elektrycznych, takich jak silniki i generatory prądu, oraz łączące je odcinki wałów charakteryzują stosunkowo duże masy rozłożone wzdłuż osi obrotu. W przeciwieństwie do omawianych w punkcie 4.1.2 układów napędu maszyn roboczych i pojazdów, wartości tych mas są najczęściej większe lub co najwyżej porównywalne z masami tarcz i kołnierzy sprzęgieł, kół zębatach przekładni czy mas tzw. „sztywnych” wirników typu tarczowego turbin lub sprężarek promieniowych. Dlatego modelowanie dyskretno-ciągłe tych obiektów przy wykorzystaniu L-SMC wydaje się być szczególnie korzystne. Najniebezpieczniejszymi rodzajami drgań towarzyszących działaniu maszyn wirnikowych oraz układom ich napędu są drgania giętne i skrętne. Bardzo często bywają badane skrętne drgania przejściowe sprężarek, dmuchaw, wentylatorów i innych występujące podczas ich

rozruchu silnikami elektrycznymi oraz skądne drgania przejściowe linii wałów turbogeneratorów energetycznych wywoływane gwałtownymi zmianami wartości momentu obciążenia elektrycznego prądnic.

Technika modelowania dyskretno-ciągłego maszyn wirnikowych i układów ich napędu do analizy drgań skądnych jest identyczna jak w przypadku omawianego w poprzednim punkcie modelowania układów napędu maszyn roboczych i pojazdów z tą różnicą, że w przypadku maszyn wirnikowych zewnętrzne momenty wymuszające należy często traktować jako rozłożone w sposób ciągły wzdłuż makroelementów reprezentujących wirniki, na przykład silników elektrycznych lub prądnic. Wówczas równaniami ruchu przekrojów poprzecznych tych makroelementów są niejednorodne równania różniczkowe cząstkowe (2.1), do których trzeba stosować rozwiązanie falowe typu d'Alemberta w ogólnej postaci (3.1) zawierającej człon całkowity. W efekcie prowadzi to do otrzymywania dodatkowych członów stojących po prawych stronach równań różniczkowych z przesuniętym argumentem typu (3.4a), (3.4b) lub (3.6). Zgodnie z rozwiązaniem (3.1), człony te są wynikiem całkowania przyłożonej do danego  $m$ -tego makroelementu funkcji rozkładu wymuszającego momentu zewnętrznego  $q_m(x,t)$  względem długości tego makroelementu i względem czasu. Przykładowo, w przypadku często przyjmowanego w praktyce równomiernego rozkładu momentu zewnętrznego  $q_m(x,t)=Q_m(t)$  człony te mają następujące postaci:

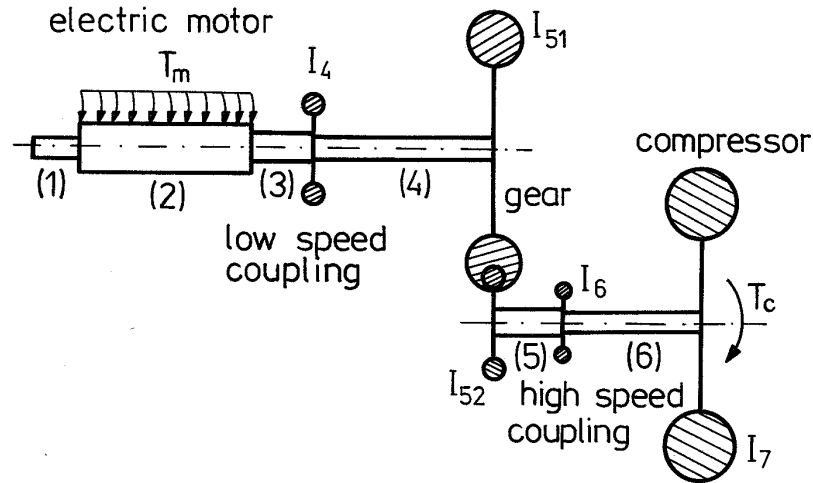
$$\begin{aligned} w_{1k}V_m(z) + w_{2k}Q_m(z) & \text{ - po prawych stronach } k\text{-tych równań typu (3.4b) lub (3.6), } k=m,m+1, \\ V_m(z) & \text{ - po prawej stronie } m\text{-1 -ego równania typu (3.4a) oraz} \\ -V_m(z-l_m) & \text{ - po prawej stronie } m\text{-tego równania typu (3.4a)} \end{aligned} \quad (4.1),$$

gdzie:  $V_m(z) = \int_0^z Q_m(\tau) d\tau$ , a zgodnie z oznaczeniami w (3.4) i (3.6)

$$w_{1m} = -l_s(GJ_{0,m-1} + aD_m)a^{-1}, \quad w_{2m} = -aI_m - C_m, \quad w_{1,m+1} = -l_sGJ_{0m}a^{-1}, \quad w_{2,m+1} = C_m$$

i  $J_{0m}$ ,  $I_m$  w przypadku układów drgających skądnie są odpowiednio biegunowym geometrycznym momentem bezwładności przekroju poprzecznego  $m$ -tego makroelementu oraz masowym momentem bezwładności bryły sztywnej zamocowanej w lewym przekroju skrajnym tego makroelementu. Pełne formy tych równań można znaleźć w pracy [24], w której dokonano próby zbudowania ogólnego liniowego dyskretno-ciągłego modelu układu wałów maszyny wirnikowej do analizy drgań skądnych. Zawarto w niej odpowiednie szczegółowe postaci równań ruchu, warunków brzegowych oraz równań różniczkowych z przesuniętym argumentem tworzących model matematyczny sformułowany w myśl zastosowanej metody falowej.

W pracach [21, 23] badano przejściowe drgania skądne występujące podczas rozruchu sprężarki promieniowej napędzanej silnikiem synchronicznym za pośrednictwem multiplikującej przekładni zębatej i dwóch sprzęgieł sztywnych. Do tego obiektu przyjęto pokazany na rysunku 4.29 liniowy model dyskretno-ciągły. W tym modelu pominięto podatność zazębienia przekładni, wirnik sprężarki potraktowano jako bryłę sztywną, natomiast wirnik silnika elektrycznego jest reprezentowany przez prętowy L-SMC (2), do którego przyłożono równomiernie rozłożony na długości moment wymuszający  $T_m(t)$ . Przy 7 dynamicznych warunkach brzegowych w formie (3.2b) i 5 geometrycznych warunkach brzegowych w formie (3.2a) zastosowanie rozwiązań falowych d'Alemberta w postaci (3.3) w przypadku makroelementów (1), (3)÷(6) i w postaci (3.1) w przypadku makroelementu (2) prowadzi do 7 liniowych równań różniczkowych z przesuniętym argumentem typu (3.4b) oraz 5 równań z przesuniętym argumentem typu (3.4a) zawierających odpowiednio dodatkowe człony wymuszające (4.1). Do ich sekwencyjnego numerycznego całkowania zastosowano metodę Newmarka.

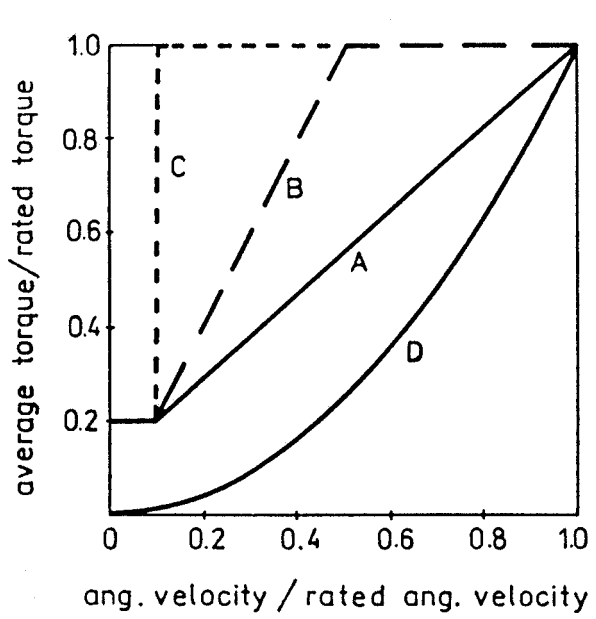


Rys. 4.29 Dyskretno-ciągły model mechaniczny układu napędu sprężarki promieniowej

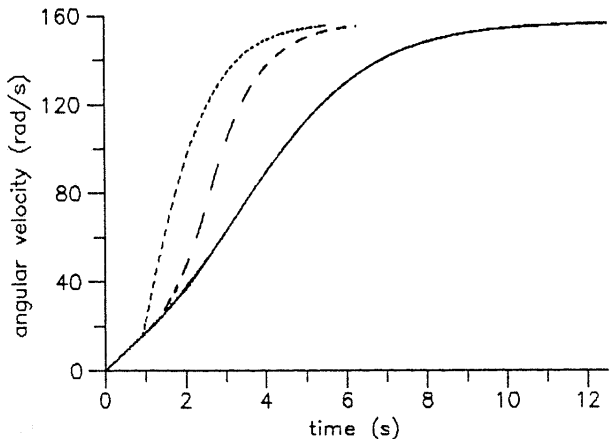
Przy stałej charakterystyce średniego momentu obciążenia sprężarki wyrażonego w formie parabolicznej funkcji średniej chwilowej prędkości kątowej wirnika przeprowadzono symulację rozruchu urządzenia ze stanu spoczynku do znamionowych warunków pracy. Układ rozpędzano w różnorodny sposób w zależności od przyjętej charakterystyki średniego momentu napędowego silnika. Na rysunku 4.30 przedstawiono trzy przykładowe charakterystyki średniego momentu napędowego silnika synchronicznego w funkcji średniej chwilowej prędkości kątowej w postaci krzywych A, B i C oraz wspomnianą charakterystykę średniego momentu obciążenia sprężarki w formie krzywej D. Składowa zmienna momentu zewnętrznego generowanego przez silnik synchroniczny z tzw. przetwornicą zmiennoczęstotliwościową składa się z widma harmonik o częstościach będących całkowitymi wielokrotnościami częstotliwości prądu zasilania oraz o amplitudach zależnych od konkretnego typu silnika, co opisano w pracy [48]. Na rysunku 4.31 przedstawiono odpowiadające trzem charakterystykom rozruchu A, B i C odpowiedzi dynamiczne w formie prędkości kątowej wirnika silnika elektrycznego, a na rysunku 4.32 w formie dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez najbardziej obciążony wał łączący silnik ze sprzęgłem sztywnym.

Z porównania krzywych narastania prędkości kątowej na rysunku 4.31 widać, że bardziej gwałtownym wzrostem średniego momentu napędowego silnika wg charakterystyk B i C odpowiada krótszy czas rozruchu wynoszący ok. 6 s w porównaniu z przypadkiem charakterystyki A, przy której ten czas jest dwukrotnie dłuższy. Jak wynika z przebiegów dynamicznego momentu skręcającego przedstawionych na rysunku 4.32, we wszystkich trzech przypadkach charakterystyk A, B i C układ napędu sprężarki podczas rozbiegu przechodzi przez dwie strefy rezonansów, z których pierwsza jest bardziej niebezpieczna ze względu na występujące większe amplitudy skrętnych drgań przejściowych. Przyjmując trzy omawiane charakterystyki wzrostu średniego momentu napędowego silnika A, B i C otrzymuje się odpowiednio porównywalne składowe zmienne momentu skręcającego, przy czym z punktu widzenia zmęczenia materiałowego najkorzystniejszym wydaje się być najkrótszy czas przechodzenia przez strefy obydwu rezonansów podczas rozruchu urządzenia według charakterystyki C.

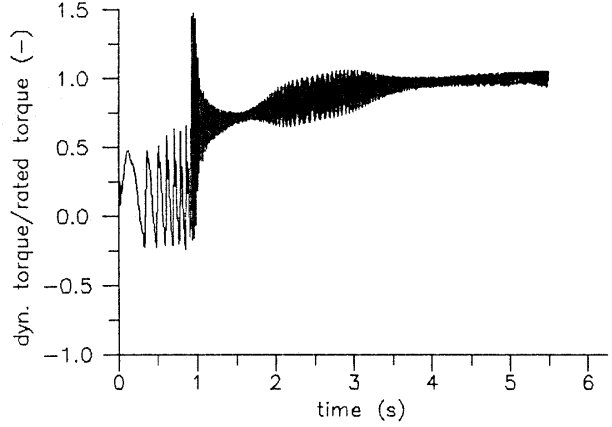
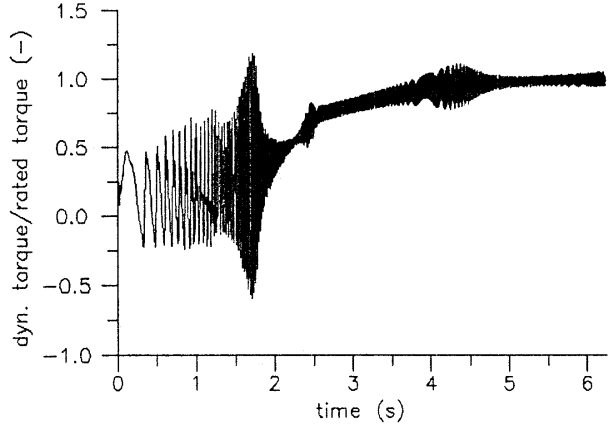
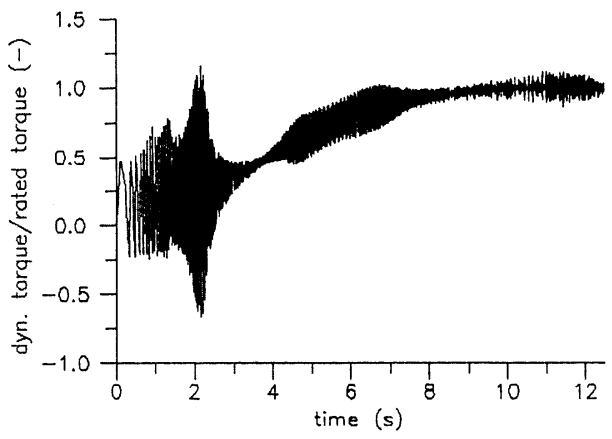
O ile w przypadku omawianych w punkcie 4.1.2 dyskretno-ciągłych modeli układów napędu maszyn roboczych i pojazdów obiektem odniesienia w celu dokonywania porównań mogły być tradycyjne modele dyskretno-ciągłe, to ze względu na wspomniane powyżej ciągłe rozłożenie wzdłuż osi obrotu dużych mas wirników i wałów maszyn wirnikowych stosowanie klasycznych modeli dyskretnych jest kłopotliwe z uwagi na znane problemy identyfikacji ich parametrów. Dlatego do analizy drgań maszyn wirnikowych i układów ich napędu obecnie wykorzystuje się najczęściej



Rys. 4.30 Charakterystyki średnich momentów obrotowych generowanych przez silnik synchroniczny (krzywe A, B, C) oraz przez sprężarkę promieniową (krzywa D)



Rys. 4.31 Wzrost prędkości kątowej wirnika silnika elektrycznego podczas rozruchu momentem napędowym wyznaczonym charakterystykami A, B i C

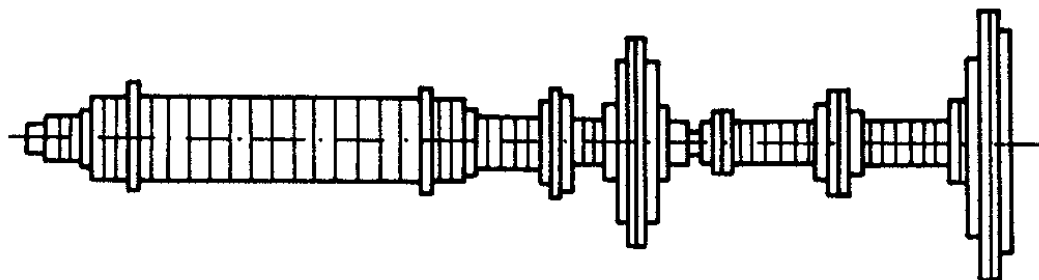


Rys. 4.32 Dynamiczny moment skręcający przenoszony przez wał łączący silnik elektryczny ze sprzęgłem podczas rozruchu momentem napędowym wyznaczonym charakterystykami A, B i C

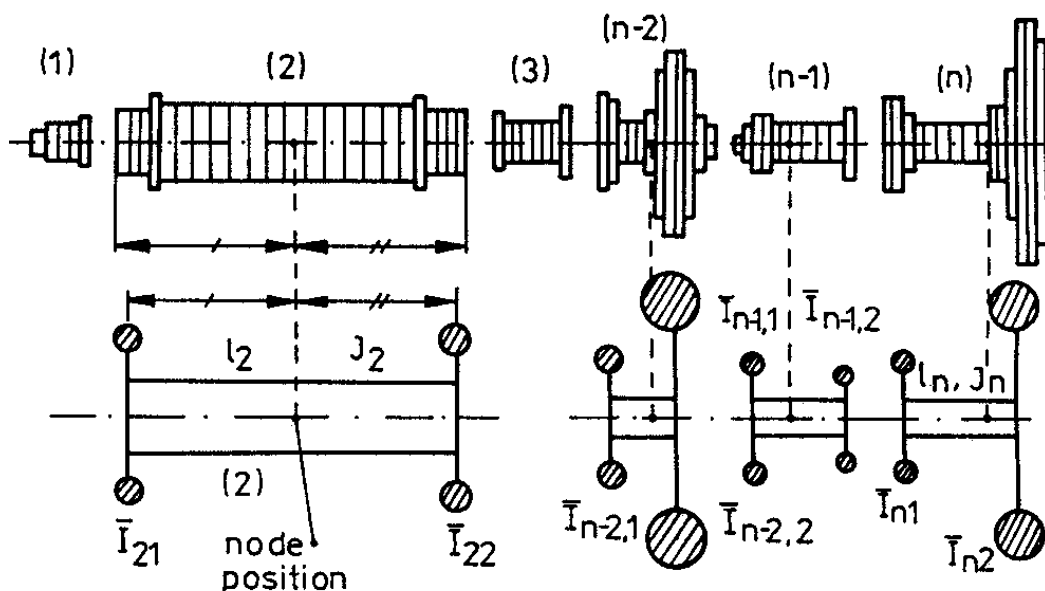
metodę elementów skończonych. Powstałe przy zastosowaniu tej metody jednowymiarowe modele mechaniczne zbudowane są z dużej liczby elementów skończonych wynoszącej zazwyczaj od kilkudziesięciu do kilkuset. Jak założono we „Wstępie”, wykorzystując lepko-sprężyste makroelementy ciągłe (L-SMC) można budować modele dyskretno-ciągłe analogiczne do modeli mechanicznych opartych o klasyczne sformułowanie metody elementów skończonych. W porównaniu z liczbą elementów jednowymiarowego modelu MES liczba L-SMC analogicznego modelu dyskretno-ciągłego może być równa liczbie segmentów o stałych przekrojach poprzecznych badanego układu wirników i łączących je wałów, jak opisano w punkcie 2.1. Wówczas, obydwa jednowymiarowe modele osiągają ten sam poziom błędu identyfikacji parametrów i dzięki temu ze względu na analityczny opis matematyczny ciągłego rozkładu mas, sztywności i własności

dysypatywnych, modele dyskretno-ciągłe można uznać za dokładniejsze. Niemniej jednak, w celu uzyskania szczególnie wysokiej efektywności obliczeniowej przy analizie drgań wymuszonych trzeba niekiedy budować nieco prostsze modele dyskretno-ciągłe składające się z mniejszej liczby L-SMC, tak by w porównaniu do analogicznych modeli MES, miały one określoną liczbę prawie identycznych częstości drgań własnych i odpowiadających tym częstościom funkcji własnych.

W pracach [23, 174] opisano opracowaną specjalnie dla tych potrzeb procedurę identyfikacji parametrów modelu dyskretno-ciągłego układu wirującego do analizy drgań skrętnych, który w myśl sformułowanych powyżej kryteriów jest analogiczny do modelu uzyskanego metodą elementów skończonych. Ta procedura jest oparta o następujące rozumowanie. Niech punktem wyjścia będzie model MES układu wirującego składający się z dużej liczby prętowych elementów skończonych i mający tym samym odpowiednio dużą liczbę stopni swobody, jak pokazano na rysunku 4.33. Z jednej strony, ten model z dostateczną do celów technicznych dokładnością reprezentuje badany obiekt rzeczywisty, a z drugiej strony jest on nieefektywny do symulacji skrętnych nieliniowych bądź parametrycznych drgań wymuszonych, kiedy to zachodzi konieczność bezpośredniego całkowania sprzężonych równań jego ruchu. W celu zbudowania modelu dyskretno-ciągłego danego obiektu, który byłby analogiczny do modelu MES z dokładnością do jego pierwszych  $n$  częstości drgań własnych, model przedstawiony na rys. 4.33 dzielimy na  $n$  segmentów składających się z elementów skończonych w większości o takich samych bądź



Rys. 4.33 Model MES maszyny wirnikowej do analizy drgań skrętnych



Rys. 4.34 Podział modelu MES na segmenty i przyporządkowanie im odpowiednich elementów dyskretno-ciągłych zblizonych przekrojach poprzecznych, jak pokazano na rysunku 4.34. Wtedy każdemu segmentowi przyporządkowujemy tzw. element dyskretno-ciągły, w skład którego wchodzi jeden odkształcalny skrętnie prętowy L-SMC o długości  $l_i$  i geometrycznym biegunowym momencie bezładności



przekroju poprzecznego  $J_i$  oraz dwie bryły sztywne o masowych momentach bezwładności  $I_{i1}$  i  $I_{i2}$  zamocowane odpowiednio w lewym i prawym przekroju skrajnym tego makroelementu,  $i=1,2,\dots,n$ , rys. 4.41. Zakładamy ponadto, że długość  $l_i$  L-SMC jest równa lub zbliżona do długości odpowiadającego mu segmentu modelu MES. Pozostałe wymienione parametry każdego  $i$ -tego elementu dyskretno-ciągłego dobieramy tak, by w porównaniu z  $i$ -tym segmentem modelu MES zachować identyczność całkowitego masowego momentu bezwładności względem osi obrotu oraz identyczność pierwszej częstości skrętnych drgań własnych przy proporcjonalnie takim samym położeniu węzła drgań i takich samych stosunku wartości pierwszej funkcji własnej w przekrojach skrajnych jak stosunek wartości odpowiadającego jej wektora własnego w tych przekrojach.

Model hybrydowy całego badanego układu mechanicznego jest następnie otrzymywany drogą łączenia ze sobą  $n$  elementów dyskretno-ciągłych zgodnie ze strukturą rzeczywistego obiektu, tak by efekcie dostać model całkowity. Stąd, masowe momenty bezwładności brył sztywnych modelu całkowitego przyjmują następujące wartości:

$$I_1 = I_{11}, \quad I_i = I_{i-1,2} + I_{i1}, \quad i = 2,3,\dots,n, \quad \text{ i } \quad I_{n+1} = I_{n2}.$$

Otrzymywane przy wykorzystaniu opisanej w punkcie 3.2 metody rozdzielania zmiennych w postaci (3.8) oraz zależności (3.9), (3.21) pierwsze częstości skrętnych drgań własnych  $\omega_i$  i odpowiadające tym częstościom funkcje własne całkowitego modelu dyskretno-ciągłego różnią się zazwyczaj nieznacznie odpowiednio od pierwszych  $n$  częstości drgań własnych  $\varpi_i$  oraz przyporządkowanych im wektorów własnych analogicznego wyjściowego modelu MES,  $i=1,2,\dots,n$ . Wówczas, stosując pewną korekcję parametrów wstępnych modelu dyskretno-ciągłego należy zminimalizować wartości bezwzględne różnic odpowiadających sobie częstości drgań własnych  $|\omega_i - \varpi_i|$ ,  $i=1,2,\dots,n$ . Jeżeli więc założymy, że geometryczne biegunowe momenty bezwładności przekrojów poprzecznych L-SMC całkowitego modelu dyskretno-ciągłego będą równe  $a_i J_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , gdzie  $a_i$  pełnią rolę współczynników korekcyjnych, utrzymując niezmienny masowy moment bezwładności każdego  $i$ -tego elementu dyskretno-ciągłego masowe momenty bezwładności poszczególnych brył sztywnych są wyznaczane za pomocą następujących zależności

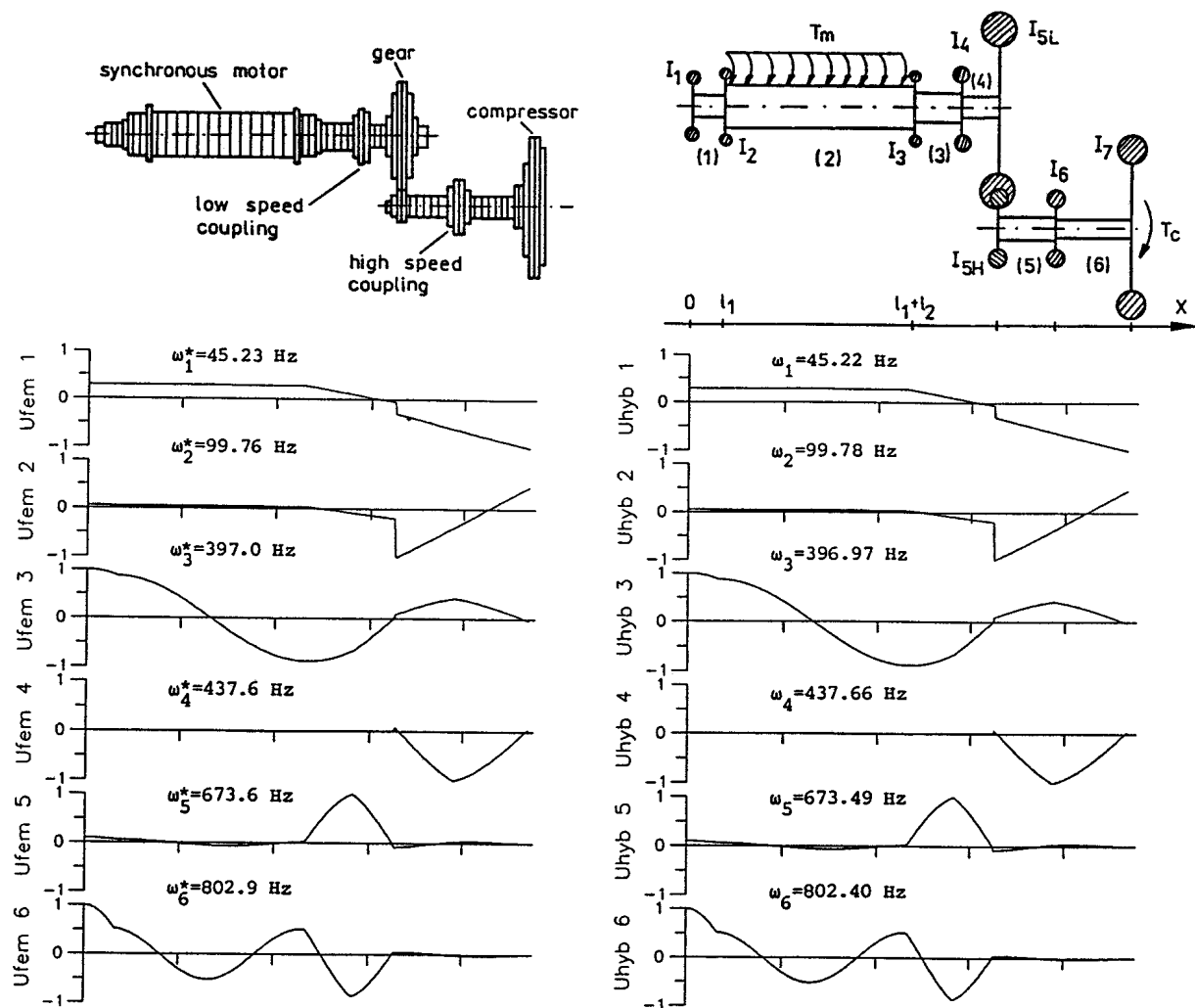
$$\begin{aligned} I_1 &= I_{11} + 0.5(1 - a_1)\rho J_1 l_1, & I_{n+1} &= I_{n2} + 0.5(1 - a_n)\rho J_n l_n, \\ I_i &= I_{i-1,2} + I_{i1} + 0.5\rho \left[ (1 - a_{i-1})J_{i-1}l_{i-1} + (1 - a_i)J_i l_i \right], & i &= 2,3,\dots,n, \end{aligned}$$

gdzie  $\rho$  oznacza gęstość materiału wału lub wirnika. Współczynniki korekcyjne  $a_i$  są następnie wyznaczane iteracyjnie przy wykorzystaniu metody najmniejszych kwadratów w celu uzyskania

$$\sum_{i=1}^n E_i^2(a_1, a_2, \dots, a_n, \varpi_i) \rightarrow \min,$$

gdzie  $E_i$  są wyznacznikami charakterystycznymi całkowitego modelu dyskretno-ciągłego wyrażonymi jako funkcje współczynników korekcyjnych i częstości drgań własnych modelu MES.

Na rysunku 4.35 przedstawiono  $n=6$  pierwszych funkcji własnych i odpowiadających im częstości skrętnych drgań własnych dyskretno-ciągłego modelu układu napędu sprężarki promieniowej pokazanego na rysunku 4.29, którego parametry wyznaczono przy pomocy opisanej procedury traktując jako obiekt wyjściowy analogiczny model MES. Na uwagę zasługują niemal identyczne funkcje własne modelu dyskretno-ciągłego w porównaniu z odpowiednimi wektorami własnymi modelu MES. Ponadto, otrzymano bardzo podobne  $n=6$  częstości drgań własnych, gdzie największa różnica względna odpowiadających sobie wartości w przypadku obu modeli osiągnęła 0.0623%, największa różnica względna dalszych trzech częstości nie przekroczyła 0.15%. Opisaną procedurę wykorzystano w pracy [174] do identyfikacji parametrów dyskretno-ciągłego modelu do analizy drgań skrętnych układu wałów wirnikowych parowego turbogeneratorsa energetycznego

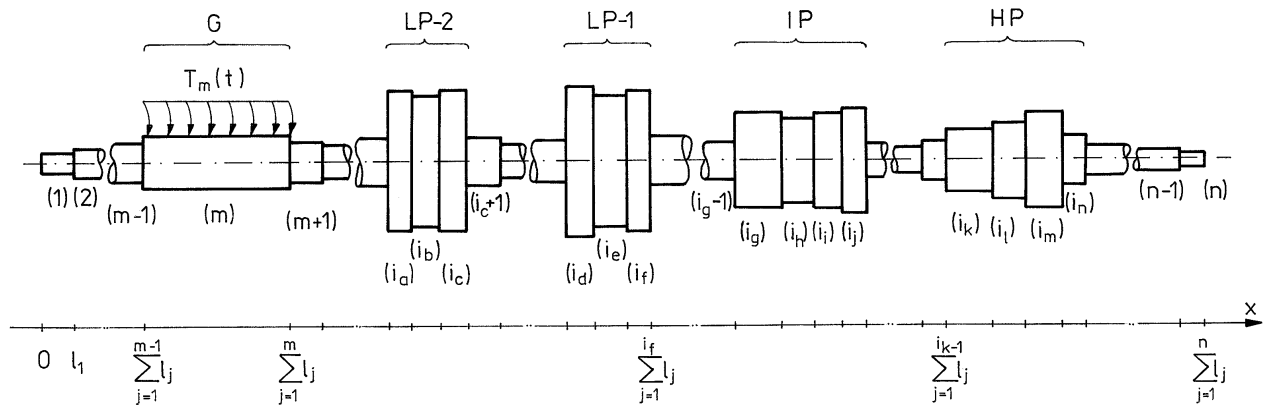


Rys. 4.35 Funkcje własne i częstotliwości skłonnych drgań własnych porównywanych modeli układu napędu sprężarki promieniowej

dużej mocy. Obiektem wyjściowym jest model MES tego turbogeneratora o 267 stopniach swobody. W celu uzyskania efektywnego narzędzia do symulacji skłonnych drgań wymuszonych zbudowano analogiczny model dyskretno-ciągły z dokładnością do pierwszych  $n=12$  częstotliwości i funkcji własnych w zakresie  $0 \div 700$  Hz. W przypadku modelu dyskretno-ciągłego turbogeneratora uzyskano również niemal identyczne funkcje własne oraz bardzo podobne częstotliwości skłonnych drgań własnych, których różnice względne w porównaniu z odpowiadającymi sobie wartościami modelu MES nie przekroczyły 0.152%.

Modelowanie dyskretno-ciągłe układów mechanicznych przy wykorzystaniu L-SMC jest szczególnie przydatne do analizy drgań linii wałów wirnikowych parowych turbogeneratorów energetycznych. W rzeczywistości poszczególne wirniki turbiny i generatora prądu, sprzęgła, czopy łożyskowe oraz łączące je wały mają kształty odcinkowo cylindryczne, bądź zbliżone do cylindrycznych, w formie tzw. wałów stopniowych. Zastępując kolejne cylindryczne odcinki wirników, sprzęgieł i wałów odpowiednimi L-SMC oraz reprezentując bezwładności tarcz sprzęgieł, wieńców łopatkowych, wszelkiego rodzaju kołnierzy i innych bryłami sztywnymi osadzonymi w określonych przekrojach poprzecznych makroelementów otrzymywany jest dyskretno-ciągły model mechaniczny linii wałów wirnikowych turbogeneratora. Przy wykorzystaniu prętowych L-SMC odkształcalnych skłonnie w pracy [27] przyjęto pokazany na rysunku 4.36 liniowy model ciągły do analizy skłonnych drgań przejściowych linii wałów wirnikowych parowego turbogeneratora energetycznego o mocy 500 MW. Model ten składa się z  $n$

makroelementów, których równaniami ruchu przekrojów poprzecznych są jednorodne równania różniczkowe cząstkowe (2.1), z wyjątkiem makroelementu  $m$ -tego reprezentującego wirnik generatora prądu. Do niego jest przyłożony równomiernie na długości zewnętrzny moment elektromagnetyczny wymuszający drgania przejściowe powstałe wskutek zwarć w generatorze lub przesyłowej sieci energetycznej. Podobnie jak w przypadku modelu układu napędu sprężarki promieniowej równaniem ruchu przekrojów poprzecznych tego makroelementu jest niejednorodne równanie (2.1). Równania ruchu (2.1) są rozwiązywane przy zerowych warunkach początkowych (2.10) oraz geometrycznych warunkach brzegowych (3.2a) i dynamicznych warunkach brzegowych typu (3.2b) dla przekrojów skrajnych L-SMC. Zastosowanie rozwiązania falowego równań ruchu typu d'Alemberta w ogólnej postaci (3.1) do makroelementu  $m$ -tego oraz w postaci (3.3) do makroelementów pozostałych prowadzi do układu  $n-1$  równań różniczkowych zwyczajnych z przesuniętym argumentem typu (3.4a) i  $n+1$  równań różniczkowych zwyczajnych z przesuniętym argumentem typu (3.4b) zmodyfikowanych odpowiednio członami rozłożonego w sposób ciągły wymuszenia zewnętrznego (4.1). W ogólnym przypadku, w celu uzyskania odpowiedzi dynamicznej badanego układu mechanicznego równania te rozwiązywane są numerycznie metodą bezpośredniego całkowania.

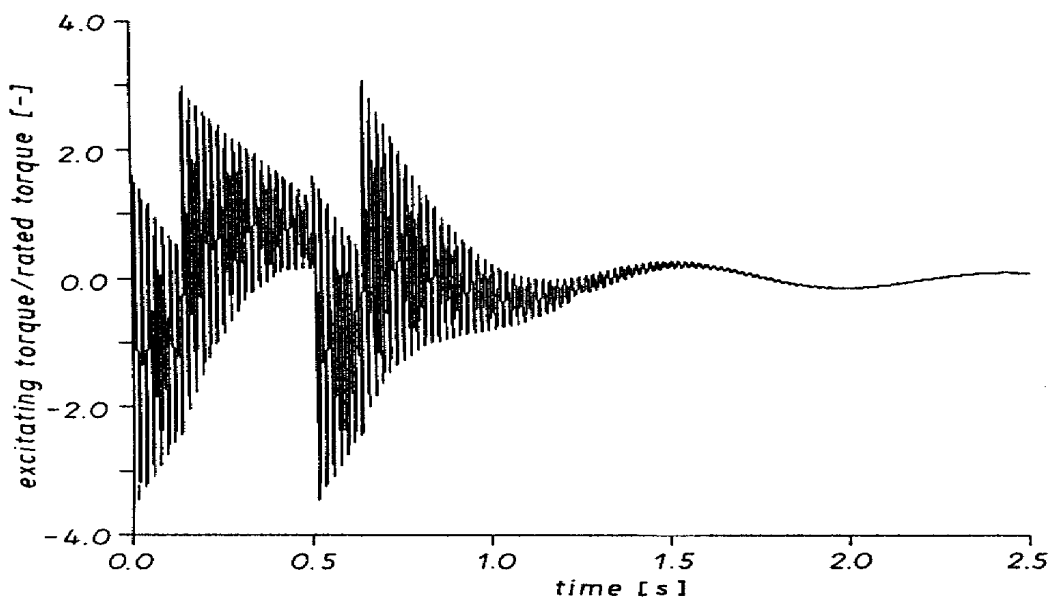


Rys. 4.36 Ciągły model mechaniczny linii wałów wirnikowych turbogeneratora energetycznego do analizy drgań skrętnych

W pracy [27] w modelu mechanicznym turbogeneratora tarcze sprzęgieł, wieńców łopatkowych, kołnierzy i innych zostały zastąpione również przez L-SMC oraz pominięto tłumienie materiałowe traktując je w przypadku drgań skrętnych jako małoznaczne. Wówczas, w równaniach dynamicznych warunków brzegowych (3.2b) znikają człony zawierające drugie pochodne cząstkowe przemieszczeń kątowych. Wtedy po podstawieniu rozwiązań falowych typu d'Alemberta do (3.2b) otrzymane w wyniku równania różniczkowe z przesuniętym argumentem będą miały człony wyłącznie z pierwszymi pochodnymi funkcji  $f_i$  i  $g_i$  względem argumentu  $z$ . Z kolei przy analizie skrętnych drgań przejściowych turbogeneratorów energetycznych najczęściej badanymi wielkościami z punktu widzenia zainteresowań inżynierskich są zazwyczaj dynamiczne momenty skręcające przenoszone przez poszczególne odcinki linii wałów wirnikowych oraz fluktuacje prędkości kątowej, głównie wirnika generatora prądu, w stosunku do średniej prędkości znamionowej. Z postaci rozwiązań falowych typu d'Alemberta (3.1) i (3.3) wynika, że obydwie te wielkości są funkcjami pierwszych pochodnych funkcji  $f_i$  i  $g_i$ , odpowiednio względem współrzędnej przestrzennej  $x$  oraz względem czasu. Różniczkując względem czasu geometryczne warunki zgodności przemieszczeń kątowych przylegających do siebie skrajnych przekrojów poprzecznych kolejnych makroelementów otrzymywany w rezultacie cały układ równań z przesuniętym argumentem typu (3.4a) i (3.4b) staje się układem tylko z pierwszymi pochodnymi szukanych funkcji  $f_i$  i  $g_i$ . W takim szczególnym przypadku zamiast standartowego sekwencyjnego całkowania numerycznego równań różniczkowych z przesuniętym argumentem drugiego rzędu należy rozwiązywać układ równań różniczkowych z przesuniętym argumentem pierwszego rzędu

względem pierwszych pochodnych szukanych funkcji  $f_i$  i  $g_i$ , co sprowadza się do sekwencyjnego rozwiązywania  $2n$  liniowych równań algebraicznych. Upraszcza to dodatkowo symulację drgań wymuszonych przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego bez utraty dokładności modelu mechanicznego badanego obiektu czy ścisłości matematycznego opisu.

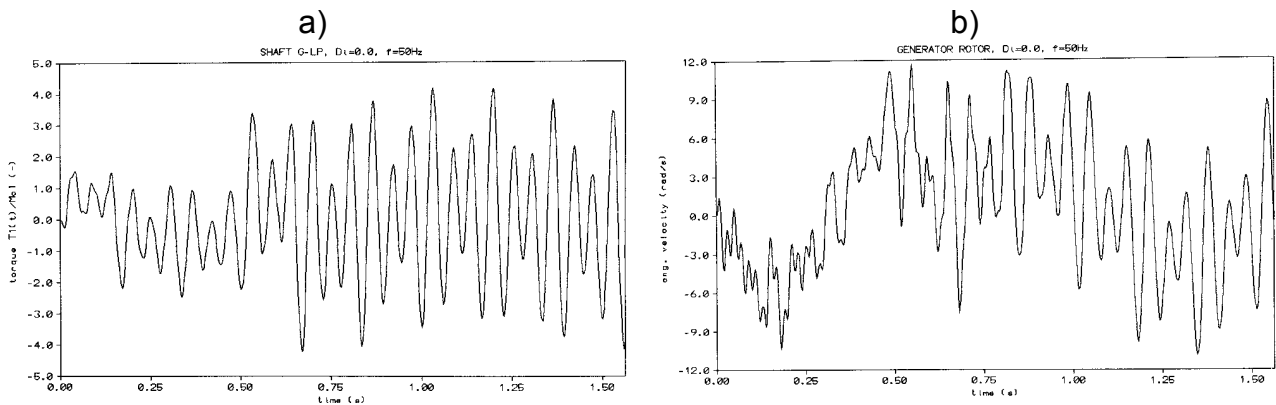
Drgania mechaniczne linii wałów wirnikowych turbogeneratorów energetycznych, w tym przypadku drgań skrętne, są na ogół sprzężone z drganiami przepływu prądu elektrycznego w uzwojeniach generatora. Niemniej jednak, według [16], w większości przypadków zwarć w generatorze i w sieci przesyłowej oraz tzw. ustalonego niezrównoważenia obciążenia sieci, z dostateczną do celów technicznych dokładnością drgania układu mechanicznego i elektrycznego można traktować jako niezależne. Wówczas do analizy drgań skrętnych linii wałów wirnikowych turbogeneratorów energetycznych zakłada się *a priori* przebieg wymuszającego momentu elektromagnetycznego jako zadaną funkcję czasu. W pracy [27] badano przejściowe skrętne drgania wałów wirnikowych turbogeneratora powstałe wskutek zwarcia w sieci przesyłowej wywołanego na przykład wyładowaniem atmosferycznym i następującym po nim tzw. szybkim ponownym załączeniem (SPZ). Funkcję opisującą przebieg w czasie powstającego w wyniku tego zjawiska momentu wymuszającego przyjęto według wskazań w pracy [61], a wykres tego momentu odniesionego do stałego momentu nominalnego przedstawiono na rysunku 4.37. Jak widać, przebieg tego momentu jest superpozycją funkcji schodkowej opisującej skoki obciążenia oraz dwóch tłumionych harmonik o częstotliwości niskiej, tj.  $1.1 \div 1.3$  Hz i o częstotliwości synchronicznej  $\Omega$  równej 50 lub 60 Hz zależnie od częstotliwości generowanego prądu elektrycznego. Należy dodać, że według [61] częstość synchroniczna  $\Omega$  zwiększa wprost proporcjonalnie intensywność tłumienia pulsacji momentu elektromagnetycznego w generatorze.



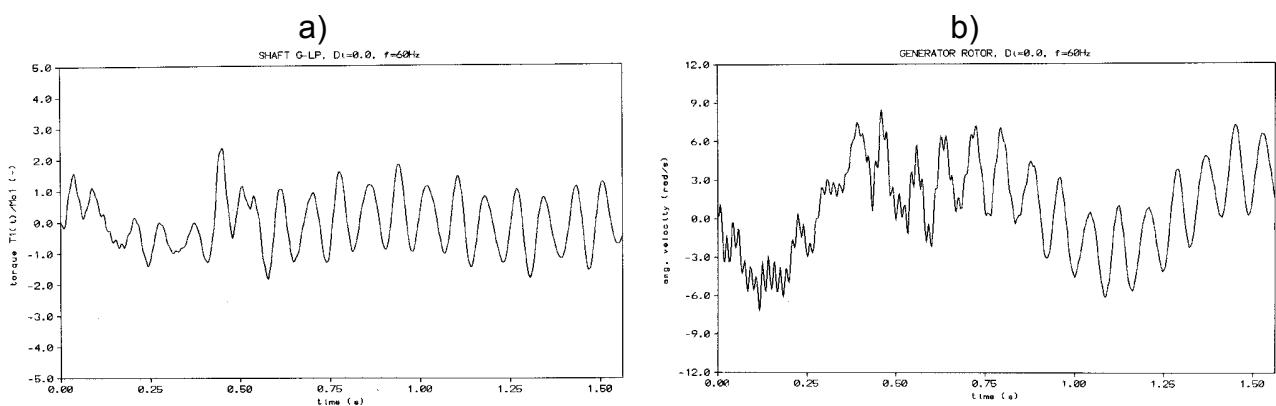
Rys. 4.37 Przebieg elektromagnetycznego momentu zewnętrznego przyłożonego do wirnika generatora prądu i odniesionego do stałej wartości momentu znamionowego

W pracy [27] badano odpowiedź dynamiczną modelu dyskretno-ciągłego rozpatrywanego turbogeneratora dla dwóch wartości częstotliwości  $\Omega=50$  i  $60$  Hz odpowiadających prędkościom znamionowym linii wałów  $3000$  i  $3600$  obr/min oraz przy różnych wartościach współczynników tłumienia bezwzględne w łożyskach. Dla  $\Omega=50$  Hz na rysunku 4.38a przedstawiono odniesiony do stałej wartości momentu znamionowego przebieg dynamicznego momentu skręcającego przenoszonego przez najbardziej obciążony odcinek wału łączącego wirnik generatora z wirnikiem niskiego ciśnienia turbiny, a na rysunku 4.38b przebieg fluktuacji prędkości kątowej wirnika generatora podczas zwarcia i następującego po nim SPZ. Analogiczne przebiegi wymienionych

wielkości dla  $\Omega=60$  Hz pokazano odpowiednio na rysunkach 4.39a i 4.39b. Należy zauważyć, że przebiegi drgań przejściowych otrzymane w przypadku  $\Omega=50$  Hz charakteryzują się znacznie większymi wartościami amplitud niż przy  $\Omega=60$  Hz, co oznacza, że rozpatrywana linia wałów turbogeneratora jest bardziej wrażliwa na wymuszenia skrętne o częstotliwościach bliskich 50 Hz. Na uwagę zasługują bardzo duże amplitudy drgań w stosunku do stałej wartości znamionowej, gdzie podczas zwarcia moment dynamiczny w wale przekracza tą wartość ponad 4-krotnie dla  $\Omega=50$  Hz i prawie 2-krotnie dla  $\Omega=60$  Hz, rys. 4.38a i 4.39a. Fluktuacje prędkości kątowej wirnika generatora nie są tak znaczące, amplitudy której nie przekraczają 4 i 2.5% swoich wartości znamionowych, odpowiednio dla  $\Omega=50$  i 60 Hz, rys. 4.38b i 4.39b. W obydwu przypadkach symulacji drgań, wyniki których zilustrowano na rysunkach 4.38 i 4.39, pominięto tłumienie w łożyskach, przez co amplitudy uzyskanych przebiegów nie maleją z czasem. Przy uwzględnieniu tłumienia bezwzględnego w łożyskach turbogeneratora amplitudy drgań przejściowych systematycznie zmniejszają się z intensywnością proporcjonalną do przyjętych wartości współczynników  $D_i$  w równaniach dynamicznych warunków brzegowych (3.2b), tak by po dostateczne długim czasie uzyskane przebiegi stały się funkcjami w przybliżeniu stałymi o wartościach równych 1 w przypadku względnych momentów dynamicznych oraz równych zero w przypadku fluktuacji prędkości kątowej wirnika generatora.



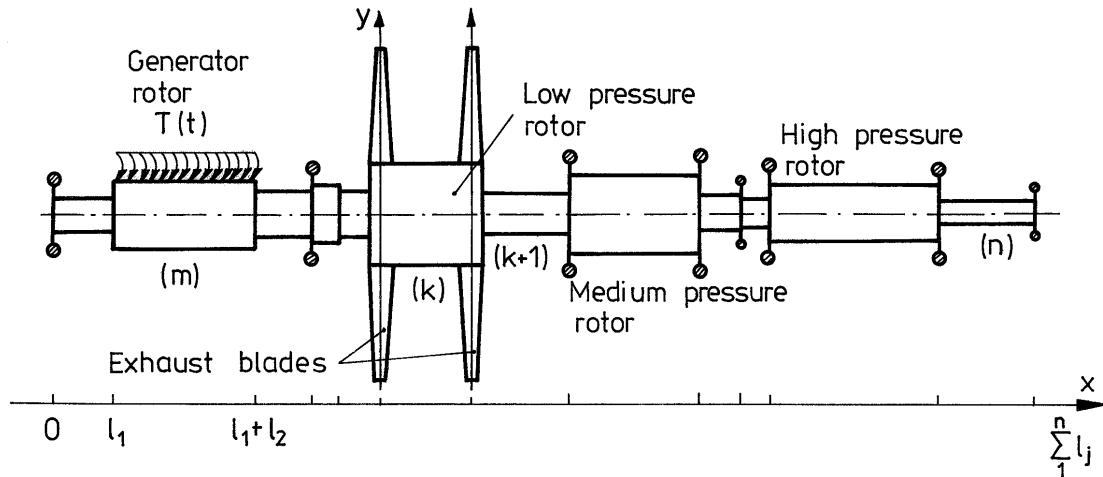
Rys. 4.38 Odpowiedź dynamiczna linii wałów turbogeneratora dla  $\Omega=50$  Hz w formie: (a) względnego momentu skręcającego przenoszonego przez wał łączący wirnik generatora z wirnikiem niskiego ciśnienia oraz (b) fluktuacji prędkości kątowej wirnika generatora



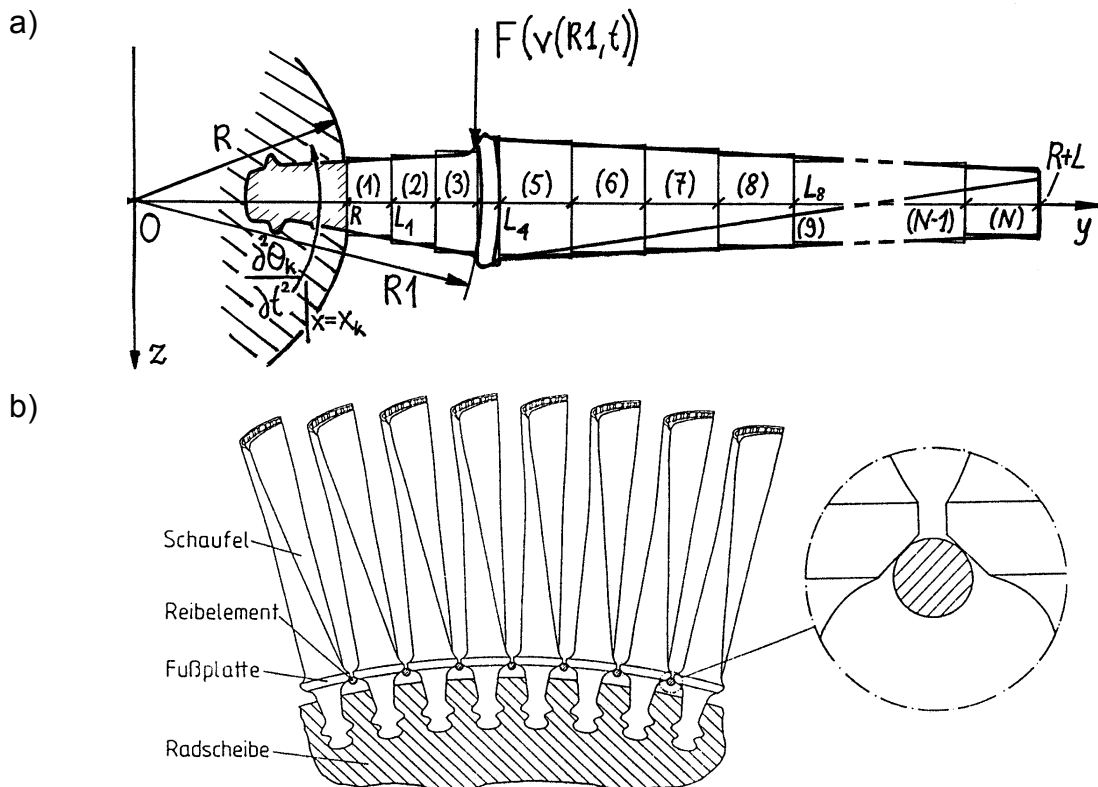
Rys. 4.39 Odpowiedź dynamiczna linii wałów turbogeneratora dla  $\Omega=60$  Hz w formie: (a) względnego momentu skręcającego przenoszonego przez wał łączący wirnik generatora z wirnikiem niskiego ciśnienia oraz (b) fluktuacji prędkości kątowej wirnika generatora

W większości przeprowadzanych analiz drgań skrętnych linii wałów turbogeneratorów energetycznych, na przykład [16, 61, 159, 162, 163], pomija się podatność łopatek traktując je jako sztywne o określonych masowych momentach bezwładności względem osi obrotu wirników. Wielu autorów, m. in. [3, 75, 109, 130, 160], rozpatruje skrętne drgania linii wałów turbogeneratorów jako

sprężone z giętnymi lub giętno-skrętnymi drganiami największych i najmniejszych tzw. łopatek wylotowych ostatnich stopni turbin niskiego ciśnienia w turbogeneratorach dużych mocy przekraczających 300÷400 MW. Za pomocą modelu dyskretno-ciągłego przy wykorzystaniu L-SMC w pracach [20, 34] badano drgania giętno-skrętne i giętne wylotowych łopatek turbiny niskiego ciśnienia sprzężone z przejściowymi i ustalonymi drganiami skrętnymi linii wałów turbogeneratora. Jak pokazano na rysunku 4.40, mechaniczny model dyskretno-ciągły linii wałów wirnikowych jest identyczny z modelami przyjętymi w [24, 174]. Model ten składa się z odpowiedniej liczby brył sztywnych połączonych  $n$  prętowymi odkształcalnymi skrętnie L-SMC, gdzie makroelement  $m$ -ty reprezentuje wirnik generatora prądu, a makroelement  $k$ -ty reprezentuje pojedynczy w tym turbogeneratorze wirnik niskiego ciśnienia. Natomiast łopatki wylotowe w



Rys. 4.40 Dyskretno-ciągły model mechaniczny linii wałów wirnikowych turbogeneratora energetycznego z łopatkami wylotowymi



Rys. 4.41 Model łopatki wylotowej turbiny parowej zbudowany z giętno-skrętnych L-SMC (a); cierne tłumiki drgań łopatek maszyn wirnikowych, [9,10] (b)

danym wieńcu potraktowano jako identyczne smukłe pręty zwinięte o zmiennym przekroju poprzecznym zamocowane sztywno w dwóch skrajnych przekrojach poprzecznych  $k$ -tego L-SMC na promieniu wieńca  $y=R$  oraz swobodne na końcach przeciwnych o współrzędnej  $y=R+L$ , jak pokazano na rysunku 4.41a, gdzie  $L$  jest długością łopatki. Pojedynczą łopatkę modelowano przy wykorzystaniu  $N=17$  opisanych w punkcie 2.2c giętno-skrętnych L-SMC. Zgodnie z [3, 109, 191] założono, że sprzężenie drgań giętnych ze skrętnymi łopatki jest spowodowane jedynie typową dla prętów silnie zwiniętych deplanacją przekrojów porzecznych, natomiast środki ścinania tych przekrojów pokrywają się ze środkami ciężkości.

W obu pracach [20, 34] nie uwzględniono pulsacji wymuszenia aerodynamicznego pary na długości łopatki oraz pominięto tłumienie wewnętrzne w jej materiale. Natomiast w [34] wprowadzono zgodny z [9,10] nieliniowy model tłumienia drgań łopatek wywołwanego tarcie suchym. W rzeczywistych turbinach występują skonstruowane do tego celu tłumiki drgań w postaci specjalnych wałeczków poślizgowych osadzonych w pobliżu miejsc zamocowania, czyli tzw. stopek, co przedstawiono schematycznie na rys. 4.41b. Na skutek ruchu łopatek względem wieńca między powierzchniami cylindrycznymi wałeczków a specjalnie ukształtowanymi powierzchniami kontaktowymi stopek powstaje tarcie, które w modelu sprowadza się do działania skupionych sił kontaktowych tarcia  $F(v(R_1,t))$  przyłożonych prostopadle do osi każdej łopatki w przekroju poprzecznym o współrzędnej  $y=R_1$ , jak pokazano na rys. 4.41a. Zależność wartości i zwrotu sił  $F(v(R_1,t))$  od prędkości  $v(R_1,t)$  przekroju łopatki  $y=R_1$  względem prędkości ruchu wieńca określają przyjęte w [9,10] nieliniowe charakterystyki tarcia według modelu Coulomba, tzw. modelu „sprężysto-poślizgowego” oraz modelu Cattaneo-Mindlina. Przy powyższych założeniach, uwzględniając rozciąganie łopatki siłami odśrodkowymi wskutek wirowania układu ze stałą średnią prędkością kątową  $\Omega$  oraz przykładając na długości łopatki rozłożone w sposób ciągły wymuszenie typu bezwładnościowego spowodowane drganiami skrętnymi linii wałów, równania ruchu przekrojów poprzecznych giętno-skrętnego L-SMC przyjmują postać:

$$\begin{aligned}
& EI_{zj} \frac{\partial^4 w_j(y,t)}{\partial y^4} + EI_{xzj} \frac{\partial^4 u_j(y,t)}{\partial y^4} - E\Psi_{0j} I_{pzj} \frac{\partial^3 \varphi_j(y,t)}{\partial y^3} + \rho A_j \frac{\partial^2 w_j(y,t)}{\partial t^2} - \\
& - \rho \left[ I_{zj} \frac{\partial^4 w_j(y,t)}{\partial y^2 \partial t^2} + I_{xzj} \frac{\partial^3 u_j(y,t)}{\partial y^2 \partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho A_j \Omega^2 \frac{\partial w_j(y,t)}{\partial t} \int_y^{L_j} \eta d\eta \right] = 0, \\
& EI_{xzj} \frac{\partial^4 w_j(y,t)}{\partial y^4} + EI_{xj} \frac{\partial^4 u_j(y,t)}{\partial y^4} - E\Psi_{0j} I_{pxj} \frac{\partial^3 \varphi_j(y,t)}{\partial y^3} + \rho A_j \left[ \frac{\partial^2 u_j(y,t)}{\partial t^2} - \Omega^2 u_j(y,t) \right] - \\
& - \rho \left[ I_{xzj} \frac{\partial^4 w_j(y,t)}{\partial y^2 \partial t^2} + I_{xj} \frac{\partial^3 u_j(y,t)}{\partial y^2 \partial t} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \rho A_j \Omega^2 \frac{\partial u_j(y,t)}{\partial t} \int_y^{L_j} \eta d\eta \right] = - \rho A_j y \frac{\partial^2 \theta_i(x_A,t)}{\partial t^2} - \\
& - \delta(y - R_1) F(v(R_1,t)), \\
& - E\Psi_{0j} I_{pzj} \frac{\partial^3 w_j(y,t)}{\partial y^3} - E\Psi_{0j} I_{pxi} \frac{\partial^3 u_j(y,t)}{\partial y^3} + EH_j \frac{\partial^2 \varphi_j(y,t)}{\partial y^2} - \\
& - \rho \left[ I_{pj} \frac{\partial^2 \varphi_j(y,t)}{\partial t^2} - \Omega^2 G_j \varphi_j(y,t) \right] = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

gdzie  $G_j = I_{zj} - I_{xj}$ ,  $w_j(y, t)$  jest przemieszczeniem translacyjnym poprzecznego przekroju makroelementu w płaszczyźnie  $x$ - $y$ ,  $u_j(y, t)$  oznacza przemieszczenie translacyjne przekroju makroelementu w płaszczyźnie  $y$ - $z$ , a  $\varphi_j(y, t)$  oznacza przemieszczeniem kątowne przekroju poprzecznego makroelementu wokół osi  $y$  wirującego ze stałą średnią prędkością kątową  $\Omega$  ortokartezjańskiego układu współrzędnych  $Axyz$ , którego początek znajduje się na osi obrotu układu  $x$  w płaszczyźnie danego wieńca łopatkowego, jak pokazano na rysunkach 4.40 i 4.41. Symbole  $L_{j-1}$ ,  $L_j$  oznaczają współrzędne poprzecznych przekrojów skrajnych  $j$ -tego makroelementu giętno-skrętnego na osi  $y$ , a  $\theta_i(x_A, t)$  jest przemieszczeniem kątowym wokół osi  $x$  przekroju poprzecznego  $x_A$  makroelementu prętowego odpowiadającego położeniu lewego wieńca łopatkowego dla  $i=k$  lub wieńca prawego dla  $i=k+1$ . Oznaczenia pozostałe są identyczne jak w (2.5).

W modelu mechanicznym łopatki poszczególne giętno-skrętne L-SMC są połączone ze sobą za pomocą geometrycznych warunków zgodności odpowiednich przemieszczeń translacyjnych i kątowych przekrojów skrajnych oraz dynamicznymi warunkami równowagi sił tnących, momentów zginających i skręcających. Dalsze rozważania są przeprowadzane przy założeniu, że na drgania skrętne linii wałów turbogeneratorskiego mają wpływ tylko te formy giętno-skrętnych drgań łopatek danego wieńca, przy których drgają one w fazie, [3, 109, 130, 160]. Wówczas moment reakcyjny względem osi  $x$  powstający w wyniku giętno-skrętnych drgań identycznych  $q$  łopatek lewego ( $i=k$ ) lub prawego ( $i=k+1$ ) wieńca wirnika turbiny niskiego ciśnienia wyrażony jest w następujący sposób:

$$P_i(t) = -q \left[ I_0 \frac{\partial^2 \theta_i(x_A, t)}{\partial t^2} + \rho \sum_{j=1}^N A_j \int_{L_{j-1}}^{L_j} y \frac{\partial^2 u_j(y, t)}{\partial t^2} dy \right], \quad (4.3)$$

gdzie  $I_0$  oznacza masowy moment bezwładności pojedynczej łopatki wylotowej względem osi obrotu  $x$ . W modelu matematycznym badanego układu moment  $P_i(t)$  jest traktowany jako skupione wymuszenie zewnętrzne drgań skrętnych linii wałów i przez to zostaje wstawiony do prawych stron odpowiednich dynamicznych warunków brzegowych typu (3.2b). Równania ruchu przekrojów poprzecznych makroelementów giętno-skrętnych (4.2) reprezentujących poszczególne odcinki łopatki rozwiązywane są metodą Fouriera w postaci szeregów (3.23) po uprzednim wyznaczeniu kolejnych częstości i funkcji giętno-skrętnych sprężystych drgań własnych łopatki za pomocą metody rozdzielania zmiennych opisanej w punkcie 3.2c lub przy wykorzystaniu specjalnej do tego celu procedury obliczeniowej do łopatek turbinowych z pracy [47]. W przypadku liniowego modelu łopatki sprężystej nieznanne funkcje czasu  $\xi_m(t)$  rozwiązań (3.23) spełniają równanie

$$\ddot{\xi}_m(t) + \omega_m^2 \xi_m(t) = Q_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (4.4)$$

gdzie  $\omega_m$  są kolejnymi częstościami giętno-skrętnych drgań własnych łopatki sztywno zamocowanej w wieńcu i swobodnej na końcu przeciwnym. Wykorzystując (3.25) wyrażenia opisujące człony wymuszające  $Q_m(t)$  przyjmują następującą postać:

$$Q_m(t) = -\frac{1}{\gamma_m^2} \left[ \frac{\partial^2 \theta_i(x_A, t)}{\partial t^2} \sum_{j=1}^N A_j \int_{L_{j-1}}^{L_j} U_{jm}(y) y dy + U_{1m}(R_1) F(v(R_1, t)) \right],$$

gdzie  $\gamma_m^2 = \rho \sum_{j=1}^N \left\{ A_j \int_{L_{j-1}}^{L_j} [U_{jm}^2(y) + W_{jm}^2(y)] dy + I_{pj} \int_{L_{j-1}}^{L_j} \Phi_{jm}^2(y) dy \right\}$ , a  $U_{jm}(y)$ ,  $W_{jm}(y)$  i

$\Phi_{jm}(y)$  są funkcjami własnymi  $j$ -tego makroelementu przyporządkowane odpowiednio przemieszczeniom translacyjnym poprzecznego przekroju makroelementu w płaszczyznach  $y$ - $z$ , i  $x$ -

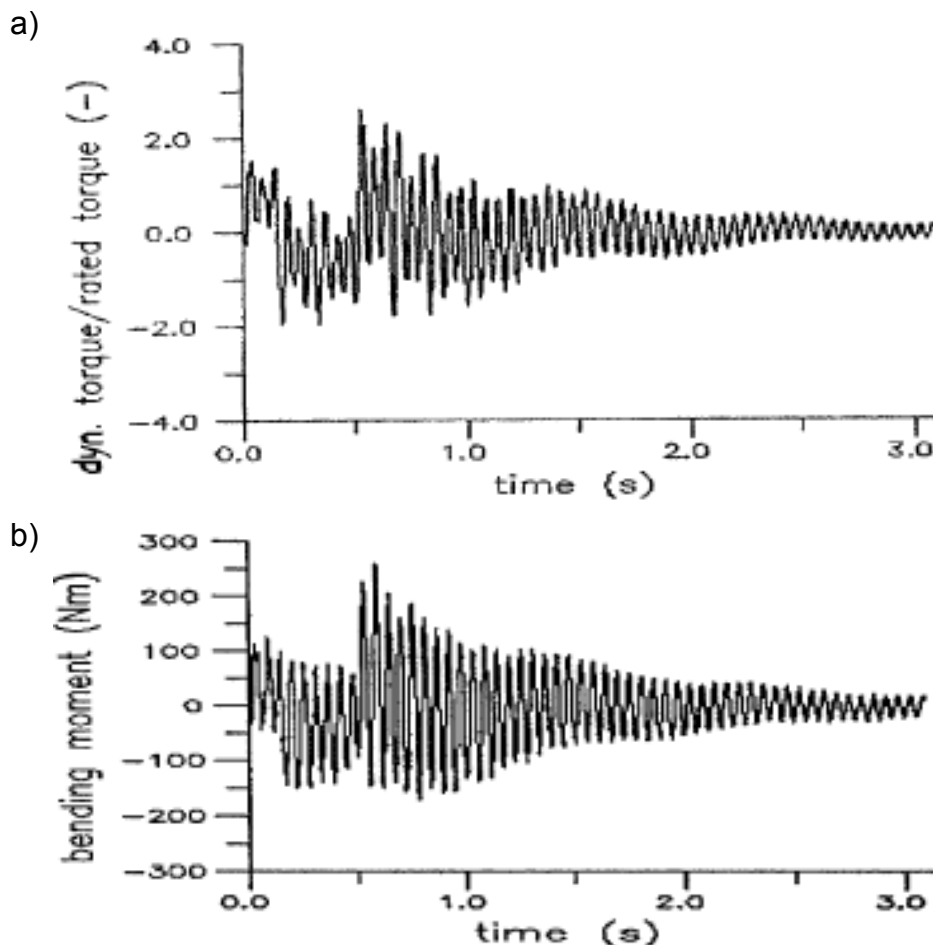


$y$  oraz przemieszczeniom kątowym wokół osi  $y$ . Po podstawieniu rozwiązania Fouriera (3.23) do wyrażenia (4.3) i po dodaniu masowych momentów bezwładności wszystkich łopatek w wieńcu  $qI_0$  do masowych momentów bezwładności  $I_k$  i  $I_{k+1}$  brył sztywnych osadzonych w przekrojach skrajnych  $k$ -tego makroelementu prętowego modelu linii wałów turbogeneratora otrzymujemy następujące wyrażenie opisujące momenty reakcyjne wieńców łopatkowych

$$P_i(t) = -q \sum_{m=1}^{\infty} e_m \ddot{\psi}_m(t), \text{ gdzie } e_m = \sum_{j=1}^N A_j \int_{L_{j-1}}^{L_j} U_{jm}(y) y dy, \quad i = k, k+1, \quad (4.5)$$

które podstawiamy następnie do  $k$ -tego i  $k+1$ -szego równania dynamicznych warunków brzegowych typu (3.2b). Przeprowadzając symulację wymuszonych drgań giętno-skrętnych wieńców łopatek wylotowych sprzężonych ze skrętnymi drganiami linii wałów turbogeneratora przy wykorzystaniu przyjętego modelu dyskretno-ciągłego rozwiązujemy sekwencyjnie układ równań różniczkowych z przesuniętym argumentem typu (3.4a) i (3.4b) tak samo jak w przypadku pominięcia podatności łopatek, przy czym  $k$ -te i  $k+1$ -sze równanie typu (3.4b) rozwiązywane są jako sprzężone z równaniami (4.4) odpowiadającymi każdemu wieńcowi z osobna.

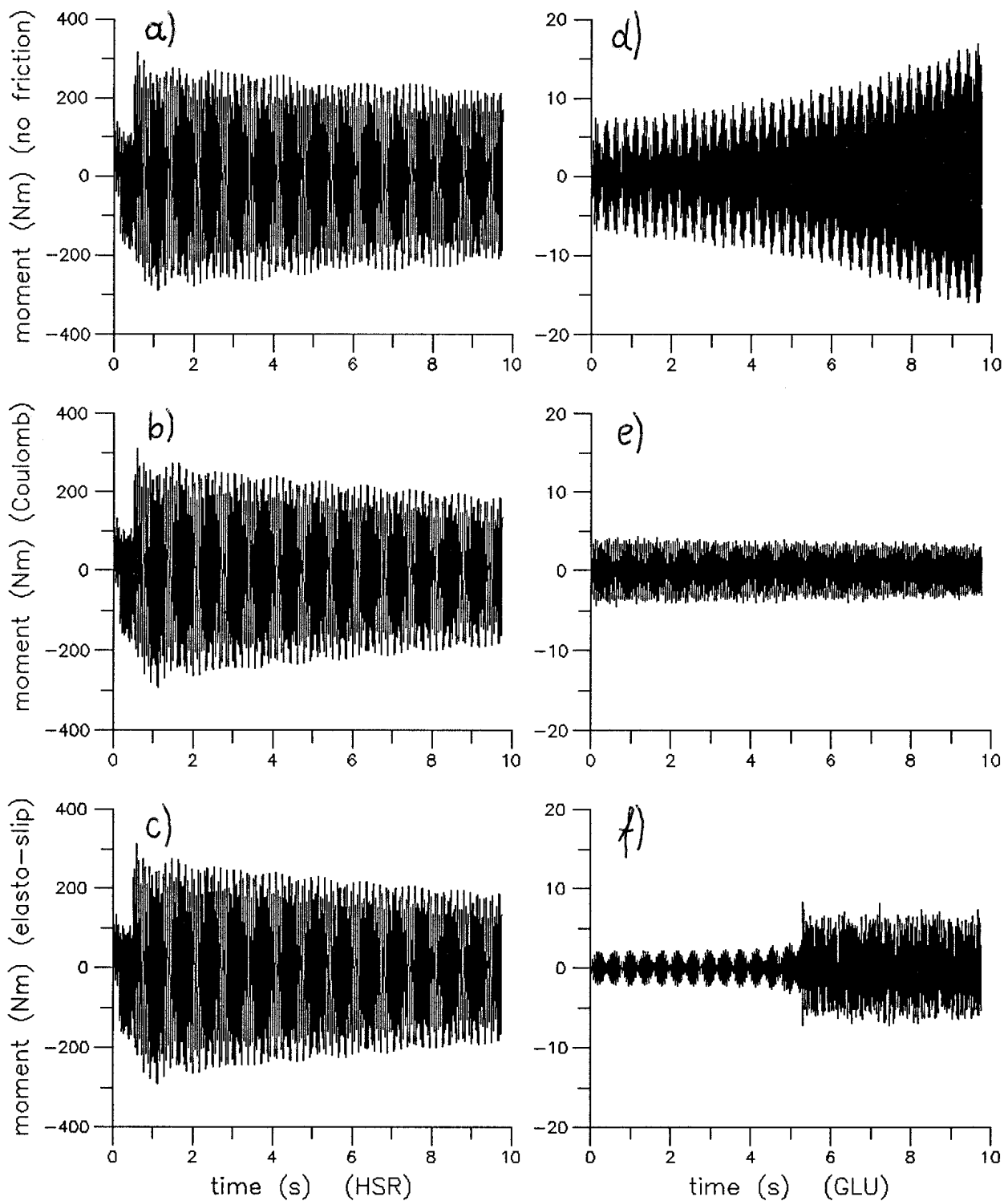
W pracy [20] rozpatrywano przejściowe drgania giętno-skrętne wieńców łopatek wylotowych turbiny niskiego ciśnienia sprzężone ze skrętnymi drganiami linii wałów turbogeneratora, w którego modelu mechanicznym pokazanym na rysunku 4.40 pominięto tłumienie powstające wskutek tarcia suchego wywołwanego przez wspomniane tłumiki drgań. W związku z tym przyjęto  $F(v(R_1, t))=0$  w (4.2) i (4.4) uwzględniając jedynie tłumienie wewnętrzne



Rys. 4.42 Odpowiedź dynamiczna układu w formie: (a) momentu skręcającego w wale generator - wirnik niskiego ciśnienia, (b) momentu zginającego w przekroju zamocowania łopatki wylotowej

w materiale wałów i wirników oraz tłumienie zewnętrzne w łożyskach. Założono, że drgania omawianego układu są wymuszane identycznie jak w [27], tj. na skutek zwarcia w sieci przesyłowej i następującego po nim szybkiego ponownego załączenia (SPZ) zgodnie z funkcją pokazaną na rys. 4.37. Na rysunkach 4.42 a i b przedstawiono przebiegi odpowiedzi dynamicznej w formie momentu skręcającego przenoszonych przez wał łączący generator z wirnikiem niskiego ciśnienia oraz momentu gnącego w przekroju zamocowania łopatki. Obydwa otrzymane drogą symulacji komputerowej przebiegi mają charakter typowych przejściowych drgań tłumionych wygasających z czasem ich trwania w wyniku uwzględnionego oddziaływania tłumienia wewnętrznego w materiale wałów i wirników oraz tłumienia zewnętrznego łożysk. Ekstremalne wartości zarówno momentu skręcającego w najbardziej obciążonym odcinku wału turbogeneratorskiego jak i momentu zginającego w najbardziej obciążonym przekroju łopatki mogą być bardzo niebezpieczne z punktu widzenia wytrzymałości i trwałości wymienionych elementów.

Przy przyjętych do obliczeń w [20] parametrach rozpatrywanego turbogeneratorskiego stwierdzono niezbyt duży wpływ podatności łopatek wylotowych na drgania skrętne linii wałów wirnikowych oraz znikomy wpływ skręcania samych łopatek w stosunku do ich zginania. Dlatego w pracy [34] uwzględniono jedynie zginanie łopatek wylotowych w obu płaszczyznach przyjmując  $\psi_{0j}=0$  i  $I_{pj}=0$ ,  $j=1,2,\dots,N$ , w (4.2) i (4.4). Natomiast badano wpływ dodatkowego tłumienia tłumikami drgań w miejscach zamocowania łopatek opisując efekt tarcia suchego za pomocą wymienionych powyżej trzech nieliniowych modeli tarcia. Dokonano symulacji drgań przejściowych wywołanych zwarcie w sieci przesyłowej i następującym po nim szybkim ponownym załączeniem (SPZ), dla którego przebieg momentu wymuszającego pokazano na rysunku 4.37, oraz symulacji drgań ustalonych powstających wskutek tzw. nieźrównoważenia obciążenia generatora opisywanego według [16] harmonicznym momentem wymuszającym o małej amplitudzie w stosunku do momentu średniego (znamionowego) i o podwojonej częstotliwości synchronicznej równej 100 Hz. Rysunki 4.43 a-f przedstawiają przebiegi odpowiedzi dynamicznej rozpatrywanego układu w formie momentu zginającego w przekroju zamocowania łopatki wylotowej przy pominięciu dodatkowego tłumienia wywołwanego tarcie suchym oraz przy uwzględnieniu tego tłumienia według modelu tarcia Coulomba i modelu „sprężysto-poślizgowego”. W przypadku drgań przejściowych wymuszonych zwarcie w sieci przesyłowej i następującym po nim szybkim ponownym załączeniem (SPZ), rys. 4.43 a-c, otrzymywane są znacznie większe wartości ekstremalne momentu gnącego w łopatce niż w przypadku drgań ustalonych wzbudzanych nieźrównoważeniem obciążenia generatora, rys. 4.43 d-f. Rysunek 4.43a odpowiada przypadkowi pominięcia tłumienia wywołwanego tarcie suchym w miejscu zamocowania łopatek. Natomiast rysunki 4.43 b i c prezentują przebiegi momentu zginającego przy tłumieniu wywołwanym tarcie opisany odpowiednio modelem Coulomba i „sprężysto-poślizgowym”. Z porównania otrzymanych przebiegów przedstawionych na rysunkach 4.43 a-c wynika, że w przypadku drgań przejściowych powstałych wskutek zwarcia w sieci przesyłowej i SPZ wpływ tłumienia wywołwanego tarcie suchym w miejscu zamocowania łopatek jest bardzo słaby, gdzie odpowiedzi dynamiczne układu otrzymane przy zastosowaniu modelu tarcia Coulomba i „sprężysto-poślizgowego” są prawie identyczne, a jednocześnie podobne do odpowiedzi w przypadku łopatek bez dodatkowego tłumienia. Stopniowe zmniejszanie się z czasem kolejnych ekstremów przebiegów otrzymanych dla tych trzech przypadków jest spowodowane założonym stosunkowo słabym tłumieniem wewnętrznym w materiale wałów i wirników oraz słabym tłumieniem zewnętrznym łożysk. W analogiczny sposób maleją kolejne ekstrema dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez poszczególne odcinki wałów rozpatrywanego turbogeneratorskiego. Należy pamiętać, że podczas działania turbogeneratorskiego energetycznego zwarcia w sieci przesyłowej czy uzwojeniach generatora i następujące po nich szybkie ponowne załączenia występują stosunkowo rzadko, a powstające w ich wyniku silne drgania przejściowe w miarę szybko zanikają. Natomiast nieźrównoważenia obciążenia generatora występują znacznie częściej



Rys. 4.43 Przebieg momentu gnącego w przekroju zamocowania łopatki wylotowej powstały w wyniku zwarcia w sieci przesyłowej i SPZ (a÷c) oraz nierównoważenia obciążenia generatora (d÷f) przy różnych modelach tłumienia wywołwanego tarciem suchym

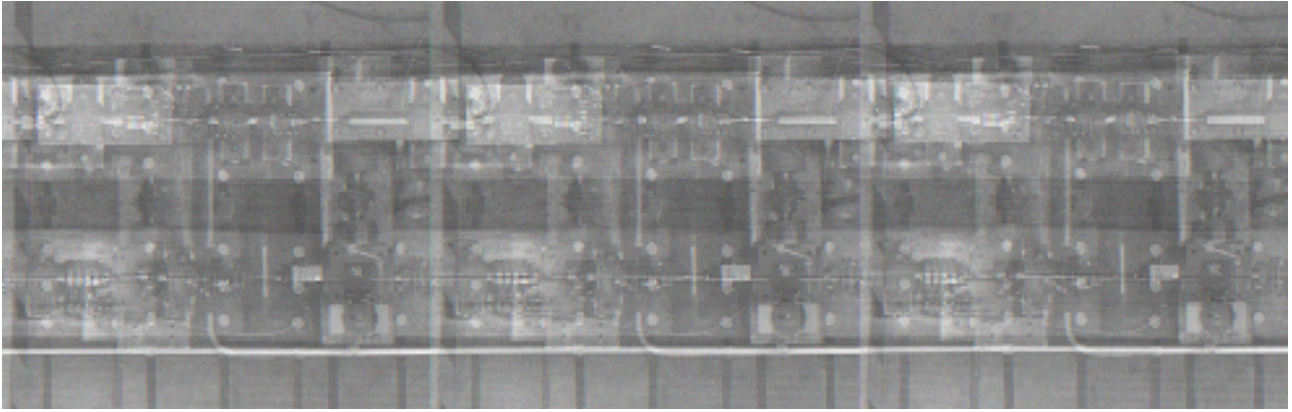
i charakteryzują się długimi czasami trwania wzbudzając praktycznie drgania ustalone. Ponadto, powstające wskutek tych nierównoważeni wymuszenia harmoniczne o częstotliwości 100 Hz bliskiej pierwszej częstotliwości drgań własnych łopatek wylotowych mogą prowadzić do niebezpiecznych rezonansów. Dowodzi temu przedstawiony na rysunku 4.43d wynik symulacji drgań w rozpatrywanym przypadku łopatek wylotowych, których pierwsza częstotliwość giętych drgań własnych wynosi 93.05 Hz. Przy ustalonym w czasie wymuszeniu zewnętrznym i

pominiętym tłumieniu wywoływanym tarcieniem w zamocowaniu łopatek obserwowany jest znaczący stopniowy i nieograniczony wzrost kolejnych ekstremów momentu gnącego w łopatce wylotowej, a wpływ tłumienia wewnętrznego i zewnętrznego linii wałów wirnikowych jest wtedy zupełnie niezauważalny. Natomiast przy uwzględnionym tłumieniu powstającym w zamocowaniu łopatek opisanym modelem tarcia Coulomba uzyskany przebieg momentu gnącego w łopatce ma charakter typowego procesu ustalonego o istotnie zmniejszonych amplitudach, co pokazuje wykres na rysunku 4.43e. Z kolei przedstawiony na rysunku 4.43f analogiczny przebieg w przypadku „sprężysto-poślizgowego” modelu tarcia różni się wyraźnie od przebiegu z rysunku 4.43e. Model ten wprowadzając dodatkowe międzyłopatkowe więzy sprężyste z założenia usztywnia poszczególne łopatki zmieniając tym samym ich wrażliwość na powstawanie rezonansów przy wymuszeniu o częstotliwości 100 Hz. Przez to w pierwszej fazie przebiegu momentu pokazanego na rysunku 4.43f, tj. w zakresie 0÷5.1 s, został otrzymany typowy proces dudnienia o stopniowo zwiększających się amplitudach. Efekt tarcia suchego w modelu „sprężysto-poślizgowym” uwidacznia się dopiero po przekroczeniu określonej amplitudy drgań, kiedy zostanie zerwana przyczepność powierzchni wałeczków tłumika z powierzchnią stopek łopatek. Wówczas, tj. po ~5.1 s, ustala się proces drgań nieliniowych o nieco większych lecz nie narastających wartościach ekstremalnych momentu gnącego.

Dla obydwu rodzajów wymuszenia zewnętrznego analogiczne wyniki uzyskane przy wykorzystaniu modelu tarcia Cattaneo-Mindlina są bardzo zbliżone do wyników otrzymanych stosując model „sprężysto-poślizgowy”. W przypadku drgań przejściowych wywoływanych zwarciami w sieci przesyłowej i SPZ wpływ tego typu tłumienia jest również mało znaczący. Z kolei w przypadku drgań ustalonych powstałych wskutek nierównoważenia obciążenia generatora otrzymywane są bardzo podobne przebiegi momentu gnącego w łopatce jak przebieg pokazany na rysunku 4.43f przy zastosowaniu „sprężysto-poślizgowego” modelu tarcia, lecz o nieco większych wartościach ekstremalnych. Z porównania otrzymanych wyników symulacji drgań wieńców łopatek wylotowych sprzężonych ze skrotnymi drganiami linii wałów turbogeneratorskiego należy stwierdzić, że wpływ dodatkowego tłumienia wywoływanego tarcieniem suchym w miejscu zamocowania łopatek jest istotny w przypadku drgań ustalonych wzbudzanych na przykład nierównoważeniem obciążenia generatora w przeciwieństwie do silnych drgań przejściowych wywoływanych zwarciami w sieci przesyłowej lub uzwojeniach generatora. Spośród wymienionych trzech modeli tarcia suchego powodowanego przez tłumiki drgań w miejscu zamocowania łopatek najefektywniejsze zminimalizowanie drgań łopatek wylotowych nastąpiło w przypadku zastosowania modelu Coulomba.

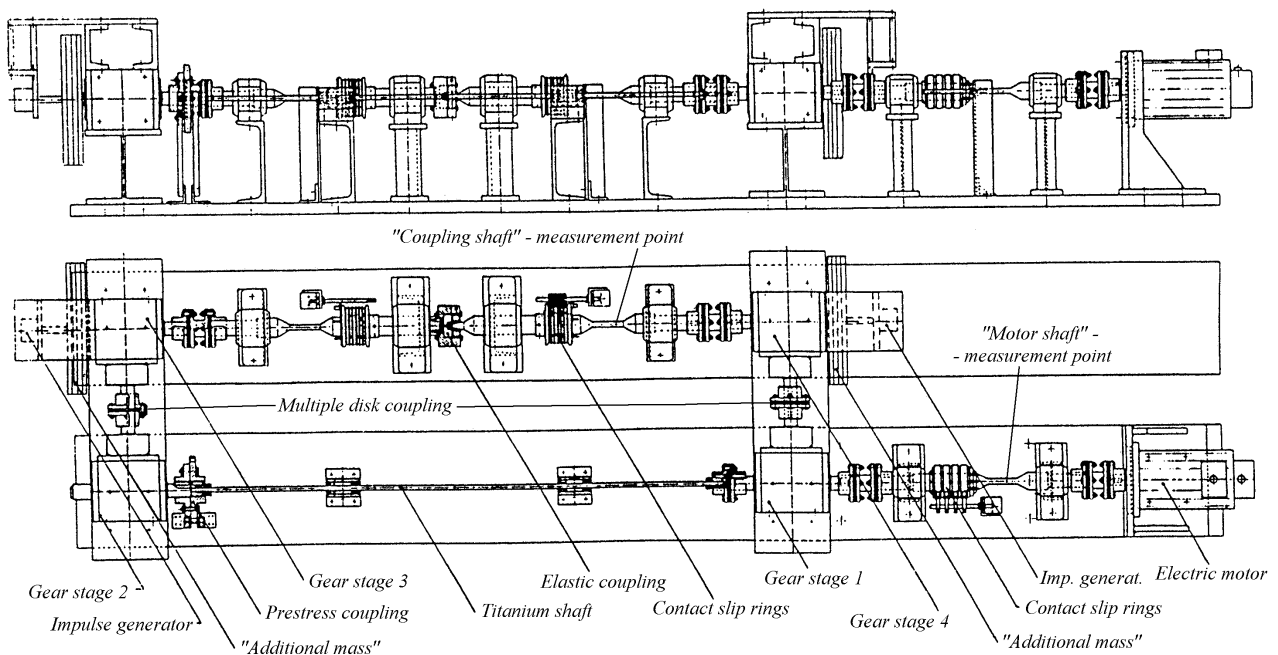
#### **4.1.4 Weryfikacja doświadczalna analizy drgań skrętnych przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego i rozwiązania falowego typu d'Alemberta**

W poprzednich punktach wyniki analizy skrętnych drgań własnych i wymuszonych uzyskane za pomocą modeli dyskretno-ciągłych zbudowanych przy użyciu prętowych L-SMC porównywano z analogicznymi wynikami otrzymanymi przy wykorzystaniu innej metody modelowania, czyli klasycznego modelowania dyskretnego. W przypadku modeli dyskretno-ciągłych zwracano uwagę na oznaki większej dokładności obliczeniowej, lepszą stabilność procesu symulacji drgań oraz na zazwyczaj znacznie większą efektywność numeryczną stosowanego algorytmu opartego sekwencyjnym bezpośrednim całkowaniem równań różniczkowych zwyczajnych z przesuniętym argumentem będących konsekwencją zastosowania rozwiązania typu d'Alemberta i falowej interpretacji zjawiska drgań. Mimo wynikających z tych porównań istotnych zalet metodyki proponowanej w niniejszej pracy, najlepszym jej weryfikatorem z punktu widzenia wiarygodności do zastosowań praktycznych jest eksperyment.



Rys. 4.44 Stanowisko doświadczalne do analizy drgań skrętnych

Dla porównania wyników analizy drgań skrętnych otrzymanych teoretycznie przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego z analogicznymi wynikami uzyskanymi drogą pomiarów eksperymentalnych wykorzystano pokazane na rysunku 4.44 specjalnie zbudowane do tego celu stanowisko doświadczalne znajdujące się w Arbeitsbereich Meerestechnik II Uniwersytetu Technicznego w Hamburgu-Harburgu. Stanowisko to jest klasycznym układem przeniesienia napędu w formie zamkniętej pętli utworzonej z odcinków wałów połączonych wzajemnie za pomocą czterech przekładni zębatych i sprzęgieł wielopłytkowych. Ponadto, układ ten ma wbudowane w pętlę zamkniętą gumowe sprzęgło podatne o nieliniowej charakterystyce oraz nastawne sprzęgło sztywne umożliwiające wstępne odkształcenie skrętne elementów wchodzących w skład pętli i tym samym ustalenie tzw. „środkowego punktu pracy” sprzęgła podatnego, jak również skasowanie luzów międzyzębnych w przekładniach zębatych. Źródłem napędu omawianego układu jest elektryczny silnik sterowany, tzw. serwomotor. W celu uniknięcia wszelkich niewspółliniowości oraz zminimalizowania wpływu drgań giętnych poszczególne odcinki wałów są podparte odpowiednio dużą liczbą łożysk tocznych typu wahadłowego. Schematyczne przedstawienie stanowiska doświadczalnego pokazano na rysunku 4.45.

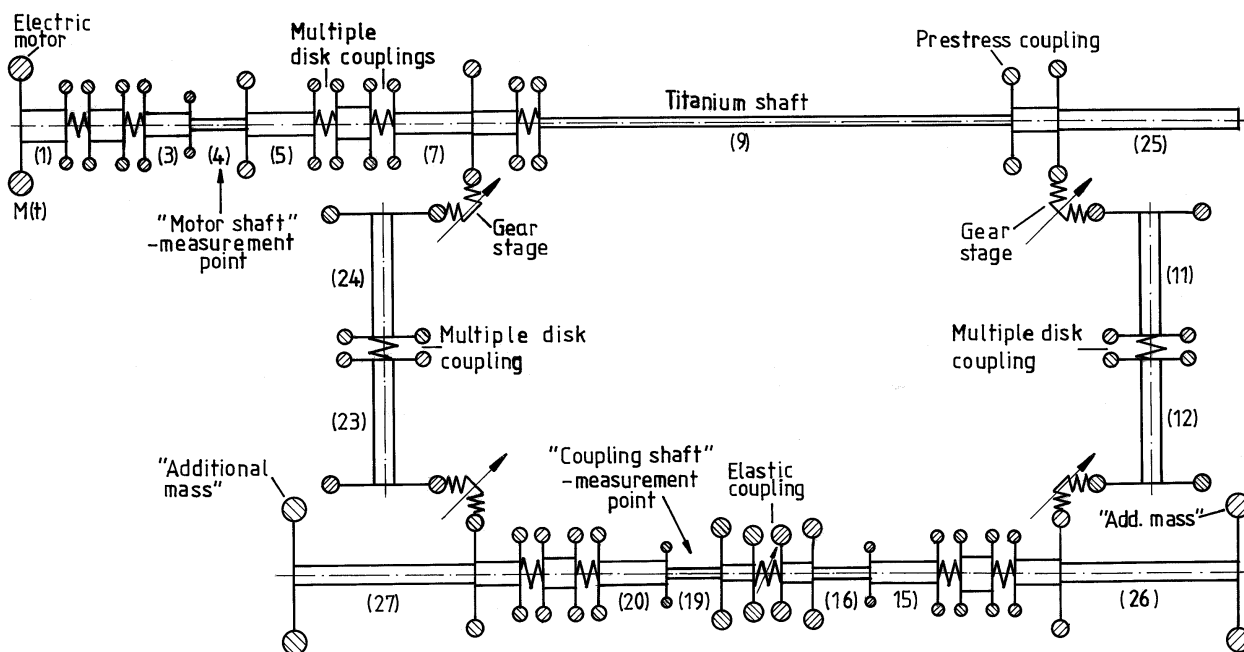


Rys. 4.45 Schemat strukturalny stanowiska doświadczalnego do analizy drgań skrętnych, [177, 194]

Stanowisko to umożliwia dokonywanie pomiarów dynamicznego momentu skręcającego przenoszonego przez dwa odcinki wałów przy wykorzystaniu znanej techniki tensometrycznej,

gdzie sygnały elektryczne z tensometrów są transmitowane do wzmacniacza za pomocą pierścieni poślizgowych, rys. 4.44, 4.45. Tensometry pomiarowe usytuowano na tzw. „wale silnikowym” łączącym silnik elektryczny z pierwszą przekładnią zębatą oraz na tzw. „wale sprzęgłowym” łączącym czwartą przekładnię zębatą ze sprzęgłem podatnym, jak pokazano na rysunku 4.45. Ponadto, stanowisko to pozwala na mierzenie chwilowej prędkości kątowej drgań układu w punktach zamocowania tzw. „mas dodatkowych” usytuowanych na końcach linii wałów łączącej trzecią i czwartą przekładnię zębatą. W tym przypadku pomiar jest dokonywany drogą sumowania impulsów elektrycznych generowanych przez specjalnie urządzenia zamocowane na wspomnianych końcach linii wałów. Otrzymywana w ten sposób oscylująca częstotliwość odbieranego sygnału elektrycznego jest następnie przetwarzana na fluktuację napięcia, które służy jako analog chwilowej prędkości kątowej ruchu drgającego objętego pomiarem odcinka wału. Bardziej szczegółowy opis omawianego stanowiska doświadczalnego można znaleźć w pracach [177, 194].

Pokazany na rysunku 4.46 model dyskretno-ciągły doświadczalnego układu napędowego składa się z 43 brył sztywnych o masowych momentach bezwładności  $I_i$ , 27 odkształcalnych skrętnie prętowych L-SMC o długościach  $l_j$  i biegunowych geometrycznych momentach bezwładności przekroju poprzecznego  $J_j, j=1,2,\dots,27$ , oraz z 16 bezmasowych elementów sprężysto-tłumiących o stałych lub zmiennych sztywnościach skrętnych  $H_k$  i współczynnikach tłumienia względnego  $E_k$ , gdzie indeksy  $i$  i  $k$  oznaczają numery odpowiednich komponentów badanego układu. Bryły sztywne reprezentują bezwładności wirnika silnika elektrycznego, tarcz sprzęgieł, kół zębatych i tzw. „mas dodatkowych”. Makroelementy ciągłe zastępują poszczególne odcinki wałów, a elementy bezmasowe reprezentują własności sprężysto-tłumiące sprzęgieł i zazębień przekładni. Wartości liczbowe masowych momentów bezwładności  $I_i$ , wymiary geometryczne L-SMC i ich stałe materiałowe określono na podstawie dokumentacji technicznej stanowiska laboratoryjnego oraz pracy [194]. Z pracy [194] przyjęto także stałe sztywności skrętne sprzęgieł wielopłytkowych. Przy skasowanych luzach międzyzębnych przekładni zębatych uwzględniono jedynie okresową pulsację sztywności ich zazębień w formie harmoniczej. Przy wyznaczaniu składowych stałych i zmiennych sztywności tych zazębień wykorzystano odpowiednie wskazówki z monografii [98].



Rys. 4.46 Dyskretno-ciągły model mechaniczny doświadczalnego układu napędowego

Wyznaczenie lepko-sprężystych własności gumowego sprzęgła podatnego zostało dokonane szczegółowo w [194]. Własności te są funkcjami licznych parametrów, takich jak częstość drgań

własnych, amplituda drgań, przenoszony średni moment skręcający, prędkość obrotowa układu i inne. Ostatecznie charakterystyka sprężysta sprzęgła została aproksymowana za pomocą wielomianu 5-tego rzędu jako funkcja różnicy przemieszczeń kątowych tarcz sprzęgłowych  $\Delta\Theta$ :

$$M_K(\Delta\Theta) = a_1 \cdot \Delta\Theta + a_3 \cdot (\Delta\Theta)^3 + a_5 \cdot (\Delta\Theta)^5, \quad (4.6)$$

gdzie stałe współczynniki  $a_1$ ,  $a_3$  i  $a_5$  zidentyfikowano doświadczalnie w [194]. Z zamieszczonej w [177, 194] w formie wykresu charakterystyki sprężystej tego sprzęgła wynika, że przy wyznaczonych w ten sposób współczynnikach dla małych kątów skrećenia  $\Delta\Theta$  charakterystyka ta jest degresywną, czyli tzw. „miękką”, a dla większych wartości  $\Delta\Theta$  staje się ona zdecydowanie progresywną, tzn. „twardą”.

Ponieważ jak wspomiano powyżej, ze względu na niemożność uwzględniania tłumienia materiałowego rozłożonego w sposób ciągły na długości makroelementów przy zastosowaniu falowego rozwiązania równań ruchu typu d'Alemberta, zarówno tłumienie wewnętrzne jak i zewnętrzne w omawianym układzie jest sprowadzone do postaci skupionych momentów przyłożonych w przekrojach skrajnych wszystkich L-SMS modelu, podobnie jak w pracach [20-27, 29, 31, 33, 34, 118-122, 171-173, 176, 177]. W przypadku sprzęgła podatnego oraz do pozostałych elementów układu przyjęto liniowy model tłumienia materiałowego Kelvina-Voigta, którego stałe współczynniki wyznaczono stosując wskazówki z monografii [90, 98] przy wykorzystaniu znanego wzoru

$$c_i = \frac{\psi_i \cdot k_i}{2\pi\omega_m}, \quad (4.7)$$

gdzie  $\psi_i$  jest współczynnikiem tłumienia właściwego materiału  $i$ -tego elementu,  $k_i$  oznacza jego sztywność skrętną, a  $\omega_m$  jest  $m$ -tą częstotliwością skrętnych drgań własnych badanego układu, której odpowiadającą jej funkcję własną charakteryzuje węzeł drgań w  $i$ -tym elemencie, [98]. Współczynnik tłumienia właściwego  $\psi_{18}$  gumowego sprzęgła podatnego został wyznaczony doświadczalnie w pracy [194]. Z kolei wartości  $\psi_i$  pozostałych komponentów układu napędowego obliczono zgodnie z instrukcją z monografii [90] jako funkcje założonego *a priori* spodziewanego maksymalnego lub średniego poziomu naprężeń występujących podczas symulowanego procesu drgań. Wówczas, przy przyjętych w omawianym modelu dostatecznie krótkich L-SMC współczynniki tłumienia materiałowego są równe  $C_i = c_i l_i$ ,  $i=1,2,\dots,27$ , [31, 176]. Chociaż w przypadku przekładni zębatych i sprzęgieł należałoby przyjąć nieliniowe modele tłumienia, ze względu na trudności ich zidentyfikowania uwzględniono tłumienie liniowe, którego współczynniki  $E_j(\Delta\Theta_j) = E_j = c_j = \text{const}$ , gdzie  $c_j$  wyznaczono na podstawie (4.7).

Ponieważ w rozpatrywanym układzie napędowym siły tarcia w łożyskach mają znaczenie drugorzędne, tłumienie bezwzględne jest powodowane głównie przez siły tarcia w uszczelnieniach oraz wskutek oddziaływania mgły olejowej przekładni zębatych. Energia dyssypowana przez ten rodzaj tłumienia istotnie zależy od prędkości obrotowej układu oraz od temperatury oleju w obudowach przekładni zębatych. Dlatego charakterystyki tłumienia bezwzględnego były wyznaczane doświadczalnie w [177] dla wybranych temperatur oleju jako funkcje prędkości kątowych  $\Omega_k$  odpowiednich elementów  $k$ -tej przekładni zębatej. Do potrzeb symulacji komputerowej drgań układu napędowego otrzymane drogą pomiarów na stanowisku doświadczalnym charakterystyki tłumienia bezwzględnego zostały aproksymowane następującą funkcją analityczną:

$$M_{D_i}(t) = A_i + \sqrt{B_i + C_i \Omega_i(t)}, \quad (4.8)$$

gdzie  $A_k$ ,  $B_k$  i  $C_k$  są stałymi współczynnikami.

Źródłem wymuszenia zewnętrznego w badanym układzie napędowym jest moment obrotowy silnika elektrycznego. W czasie wykonywania pomiarów wybrano realizowaną przez generator funkcyjny sinusoidalną składową momentu zewnętrznego nałożoną na składową stałą równoważącą wszystkie momenty oporów ruchu układu napędowego. Identyczną funkcję momentu zewnętrznego przyjęto do symulacji komputerowej drgań wymuszonych. Moment ten w postaci skupionej przyłożony jest w skrajnym przekroju poprzecznym o współrzędnej  $x=0$  makroelementu (1) do bryły sztywnej reprezentującej bezwładność wirnika silnika elektrycznego, jak pokazano na rysunku 4.46.

Podobnie jak w przypadkach poprzednich analizy drgań skrętnych układów napędowych równaniami ruchu przekrojów poprzecznych L-SMC są jednorodne równania różniczkowe cząstkowe (2.1) dla  $\tau=0$ . Równania te rozwiązywano przy geometrycznych warunkach brzegowych (3.2a) oraz przy dynamicznych warunkach brzegowych typu (3.2b) i (3.5), za pomocą których opisano ruch sprzęgieł i przekładni zębatych. W omawianym przypadku modelu dyskretno-ciągłego doświadczalnego układu napędowego warunki brzegowe przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned}
& I_i \Theta_{i,tt}(x,t) + D_i \Theta_{i,t}(x,t) - C_i \Theta_{i,xt}(x,t) - GJ_i \Theta_{i,x}(x,t) = M_i(t) \quad \text{dla } x = L_i, \\
& I_j^{(1)} \Theta_{j1,tt}(x,t) + D_j^{(1)} \Theta_{j1,t}(x,t) + C_{j1} \Theta_{j1,xt}(x,t) + \kappa_j E_j(\Delta \Theta_j)(\kappa_j \Theta_{j1,t}(x,t) - \Theta_{j,t}(x,t)) + \\
& \quad + GJ_{j1} \Theta_{j1,x}(x,t) + \kappa_j H_j(\Delta \Theta_j)(\kappa_j \Theta_{j1}(x,t) - \Theta_j(x,t)) - \delta_{j1} \Gamma_r(x,t) = M_j^{(1)}, \\
& I_j^{(2)} \Theta_{j,tt}(x,t) + D_j^{(2)} \Theta_{j,t}(x,t) - C_j \Theta_{j,xt}(x,t) - E_j(\Delta \Theta_j)(\kappa_j \Theta_{j1,t}(x,t) - \Theta_{j,t}(x,t)) - \\
& \quad - GJ_j \Theta_{j,x}(x,t) - H_j(\Delta \Theta_j)(\kappa_j \Theta_{j1}(x,t) - \Theta_j(x,t)) + \delta_j \Gamma_s(x,t) = M_j^{(2)}, \quad (4.9)
\end{aligned}$$

gdzie:  $\Delta \Theta_j = \kappa_j \Theta_{j1}(x,t) - \Theta_j(x,t)$ ,  $\Gamma_q(x,t) = C_q \Theta_{q,xt}(x,t) + GJ_q \Theta_{q,x}(x,t)$ ,

$$\Theta_{j1}(x,t) = \Theta_r(x,t), \quad \Theta_j(x,t) = \Theta_s(x,t), \quad q = r, s, \quad \delta_l = 0, 1, \quad l = j1, j \quad \text{dla } x = \sum_{i=1}^{j-1} l_i,$$

$$\begin{aligned}
& I_k \Theta_{k,tt}(x,t) + D_k \Theta_{k,t}(x,t) + C_{k1} \Theta_{k1,xt}(x,t) + GJ_{k1} \Theta_{k1,x}(x,t) - C_k \Theta_{k,xt}(x,t) - \\
& \quad - GJ_k \Theta_{k,x}(x,t) = M_k(t), \quad \Theta_{k1}(x,t) = \Theta_k \quad \text{dla } x = \sum_{i=1}^{k-1} l_i,
\end{aligned}$$

$$I_m \Theta_{m,tt}(x,t) + D_m \Theta_{m,t}(x,t) + C_m \Theta_{m,xt}(x,t) + GJ_m \Theta_{m,x}(x,t) = M_m(t) \quad \text{dla } x = L_m,$$

gdzie:  $D_i^{(n)}$ ,  $n=1,2$ , współczynnikami tłumienia bezwzględne,  $\kappa_j$  oznaczają wartości przełożeń przekładni zębatych, a  $L_i$ ,  $L_m$  są odpowiednimi wartościami współrzędnej przestrzennej  $x$ . W przypadku sprzęgieł przyjęto, że  $\kappa_j$  są równe jednościami. Indeksy  $i, j, j1, k, k1, m, q, r, s$  oznaczają pozycje poszczególnych komponentów modelu. W przypadku przyjętego modelu dyskretno-ciągłego doświadczalnego układu napędowego pokazanego na rysunku 4.46 wartości liczbowe poszczególnych indeksów są następujące:

$$i=1,2,\dots,26, \quad j=2,3,6,7,8,9,11,12,13,14,15,18,21,22,23,24, \quad j1=j-1, \quad \text{z wyjątkiem } j=8, j1=24,$$



$$q=r,s, \text{ gdzie: } r = \begin{cases} 25 & \text{dla } j = 11 \\ 27 & \text{dla } j = 23 \end{cases}, \quad s = \begin{cases} 7 & \text{dla } j = 8 \\ 26 & \text{dla } j = 13 \end{cases}$$

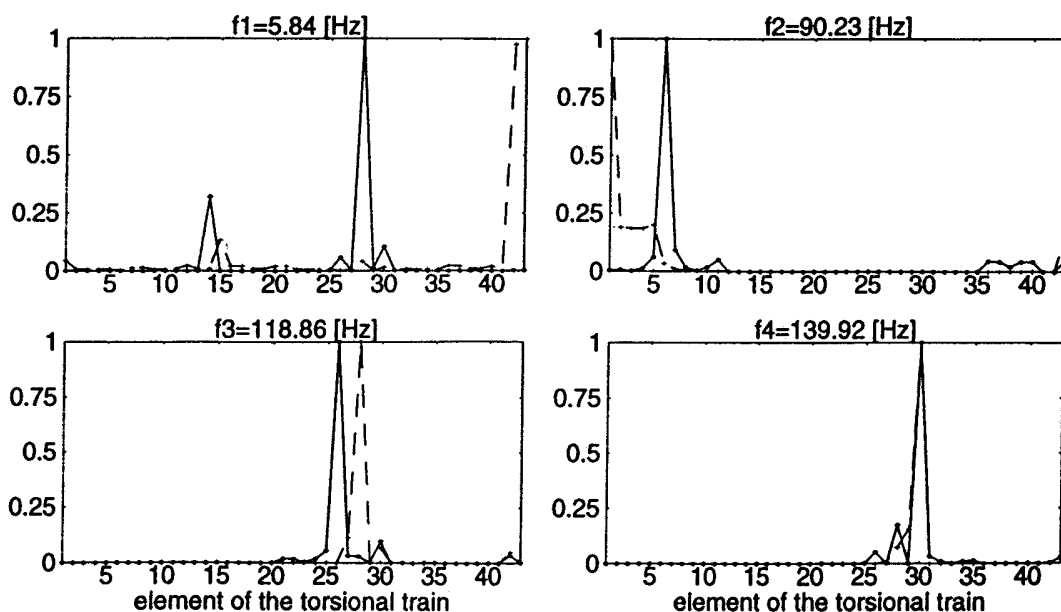
$$\delta_l = \begin{cases} 1 & \text{dla } l = 8 = j, 10 = j, 13 = j, 22 = j \\ 0 & \text{dla } l = 1, 2, \dots, 27, \text{ jeśli dla } l = 8 \neq j, 10 \neq j, 13 \neq j, 22 \neq j \end{cases}, \quad k=4,5,10,16,17,19,20, k_1=k-1,$$

$$m=25,27, \quad L_1 = 0, \quad L_{25} = \sum_{j=1}^{10} l_j + l_{25}, \quad L_{26} = \sum_{j=1}^{12} l_j + l_{26}, \quad L_{27} = \sum_{j=1}^{22} l_j + l_{27}.$$

W równaniach warunków brzegowych (4.9) górne indeksy (1) i (2) są przypisane wielkościom przyporządkowanym odpowiednio napędzającym i napędzanym elementom sprzęgieł i przekładni. Dolne indeksy po przecinkach oznaczają różniczkowania cząstkowe.

W celu zweryfikowania dokładności wyznaczonych parametrów bezwładnościowych i sprężystych badanego obiektu, czyli masowych momentów bezwładności brył sztywnych, wymiarów i stałych materiałowych L-SMC oraz sztywności skrętnych elementów bezmasowych, należało porównać pierwsze częstości skrętnych drgań własnych i odpowiadające im funkcje własne modelu zlinearyzowanego z odpowiadającymi im częstościami i funkcjami własnymi otrzymanymi drogą pomiarów jak również z analogicznymi wartościami uzyskanymi w pracy [194] za pomocą modelu dyskretnego doświadczalnego układu napędowego o 54 stopniach swobody. Analizę skrętnych drgań własnych modelu dyskretno-ciągłego przeprowadzono przy wykorzystaniu rozwiązania równań ruchu (2.1) metodą rozdzielania zmiennych w postaci (3.8) oraz lokalnych funkcji własnych prętowych L-SMC (3.9). Wówczas wstawienie (3.9) do zlinearyzowanych oraz pozbawionych członów wymuszających i dyssypatywnych warunków brzegowych (4.9) prowadzi do układu równań charakterystycznych (3.22) o wymiarze 54×54, rozwiązanie których daje poszukiwane częstości drgań własnych i funkcje własne.

Na rysunku 4.47 przedstawiono wyniki analizy drgań własnych modelu dyskretno-ciągłego w formie pierwszych czterech częstości oraz odpowiadających im funkcji własnych energii potencjalnej i kinetycznej. Z zamieszczonych wykresów wynika, że w przypadku pierwszej postaci drgań własnych węzły drgań znajdują się w sprzęgle podatnym i w „wale tytanowym”, w przypadku drugiej postaci drgań - w „wale silnikowym”, a w przypadku trzeciej i czwartej postaci drgań węzły drgań występują w odpowiednich „wałach sprzęgłowych” pokazanych na rysunkach 4.44 i 4.45. Ze względu na brak tensometrów naklejonych na odcinku wału (16), w którym występuje



Rys. 4.47 Pierwsze cztery funkcje własne energii potencjalnej (—) i kinetycznej (- - -)

węzeł trzeciej postaci drgań niemożliwym było zmierzenie odpowiadającej jej częstości. W tabeli 4.1 zamieszczono wyniki porównania wartości czterech pierwszych częstości skłonnych drgań własnych badanego układu napędowego obliczone dla modelu dykretno-ciągłego i dyskretnego z pracy [194] oraz uzyskane drogą pomiarów na rzeczywistym obiekcie przy wykorzystaniu miernika kąta przesunięcia fazowego. Z tego porównania wynika, iż wskutek właściwej identyfikacji parametrów modelu dykretno-ciągłego różnice odpowiadających sobie częstości własnych nie przekraczają 0.7%.

Nr	W przypadku modelu dyskretnego (54 st. swobody), wg [194]	W przypadku modelu dykretno-ciągłego	Uzyskane drogą pomiarów
1.	5.88	5.84	5.80
2.	106.54	90.23	~ 90.0
3.	108.71	118.86	---
4.	152.24	139.92	~ 140.0

Tabela 4.1 Porównanie pierwszych częstości drgań własnych układu napędowego

Do symulacji drgań wymuszonych modelu dykretno-ciągłego zastosowano falowe rozwiązania równań ruchu (2.1) typu d'Alemberta w postaci (3.3). Uzyskane w efekcie równania różniczkowe zwyczajne z przesuniętym argumentem typu (3.4a), (3.4b) i (3.6) dla funkcji  $f_i$  i  $g_i$ ,  $i=1,2,\dots,27$ , mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
p_{2m}g_m''(z) + p_{1m}g_m'(z) &= M_m(z-l_m) + u_{2m}f_m''(z-2l_m) + u_{1m}f_m'(z-2l_m), \\
g_{k1}(z) &= -f_{k1}(z-2l_{k1}) + f_k(z-l_{k1}) + g_k(z-l_{k1}), \\
g_s(z) &= -f_s(z-2l_s) + f_j(z-l_s) + g_j(z-l_s), \\
\begin{bmatrix} p_{2j1} & 0 \\ 0 & r_{2j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{j1}''(z+l_{j1}) \\ f_j''(z) \end{bmatrix} &+ \begin{bmatrix} p_{1j1}(z) & -\kappa_j E_j(\Delta_j(z)) \\ -\kappa_j E_j(\Delta_j(z)) & r_{1j}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{j1}'(z+l_{j1}) \\ f_j'(z) \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} \kappa_j^2 H_j(\Delta_j(z)) & -\kappa_j H_j(\Delta_j(z)) \\ -\kappa_j H_j(\Delta_j(z)) & H_j(\Delta_j(z)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{j1}(z+l_{j1}) \\ f_j(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_j^{(1)}(z) \\ R_j^{(2)}(z) \end{bmatrix}, \quad (4.10)
\end{aligned}$$

gdzie:  $\Delta_j(z) = \kappa_j [f_{j1}(z-l_{j1}) + g_{j1}(z+l_{j1})] - f_j(z) - g_j(z)$ ,

$$\begin{aligned}
R_j^{(1)}(z) &= M_j^{(1)} + u_{2j1}f_{j1}''(z-l_{j1}) + u_{1j1}(z)f_{j1}'(z-l_{j1}) + \kappa_j E_j(\Delta_j(z))g_j'(z) + \\
&+ \kappa_j H_j(\Delta_j(z))[g_j(z) - \kappa_j f_{j1}(z-l_{j1})] + \delta_{j1}[t_{r2}g_r''(z) + t_{r1}g_r'(z)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_j^{(2)}(z) &= M_j^{(2)} + s_{2j}g_j''(z) + s_{1j}(z)g_j'(z) + \kappa_j E_j(\Delta_j(z))f_{j1}'(z-l_{j1}) - \\
&- H_j(\Delta_j(z))[g_j(z) - \kappa_j f_{j1}(z-l_{j1})] + \delta_j[t_{s2}f_s''(z-l_s) + t_{s1}f_s'(z-l_s)],
\end{aligned}$$

$$r_{2i}f_i'(z) + r_{1i}f_i(z) = M_i(z) + s_{2i}g_i''(z) + s_{1i}g_i'(z),$$

$$r_{2k}f_k''(z) + r_{1k}f_k'(z) = M_k(z) + s_{2k}g_k''(z) + s_{1k}g_k'(z) + t_{2k}f_{k1}''(z-l_{k1}) + t_{1k}f_{k1}'(z-l_{k1}),$$

$$f_r(z) = -g_r(z) + f_{j1}(z-l_{j1}) + g_{j1}(z+l_{j1}),$$

$$\begin{aligned}
&\text{gdzie: } r_{2i} = a(C_i + aI_i), \quad r_{1i} = GJ_i + aD_i, \quad s_{2i} = a(C_i - aI_i), \quad s_{1i} = GJ_i - aD_i, \\
&p_{2,j1} = a(C_{j1} + \delta_{j1}C_q + aI_j^{(1)}), \quad p_{1,j1}(z) = GJ_{j1} + \delta_{j1}GJ_q + a(D_j^{(1)} + \kappa_j^2 E_j(\Delta_j(z))), \\
&u_{2,j1} = a(C_{j1} - \delta_{j1}C_q - aI_j^{(1)}), \quad u_{1,j1}(z) = GJ_{j1} - \delta_{j1}GJ_q - a(D_j^{(1)} - \kappa_j^2 E_j(\Delta_j(z))), \\
&r_{2,j} = a(C_j + \delta_j C_q + aI_j^{(2)}), \quad r_{1,j}(z) = GJ_j + \delta_j GJ_q + a(D_j^{(2)} + E_j(\Delta_j(z))), \\
&s_{2,j} = a(C_j - \delta_j C_q - aI_j^{(2)}), \quad s_{1,j}(z) = GJ_j - \delta_j GJ_q - a(D_j^{(2)} - E_j(\Delta_j(z))), \\
&t_{2q} = 2aC_q, \quad t_{1q} = 2GJ_q, \\
&r_{2k} = a(C_k + C_{k1} + aI_k), \quad r_{1k} = GJ_k + GJ_{k1} + aD_k, \quad t_{2k} = 2aC_{k1}, \\
&s_{2k} = a(C_k - C_{k1} - aI_k), \quad s_{1k} = GJ_k - GJ_{k1} - aD_k, \quad t_{1k} = 2GJ_{k1}, \\
&p_{2m} = a(C_m + aI_m), \quad p_{1m} = GJ_m + aD_m, \quad u_{2m} = a(C_m - aI_m), \quad u_{1m} = GJ_m - aD_m.
\end{aligned}$$

Podobnie jak w innych przypadkach zastosowania rozwiązania falowego typu d'Alemberta, każdemu z powyższych równań odpowiada jeden z warunków brzegowych (4.9). Dlatego indeksy  $i, j, j1, k, k1, m, r, s$  i współczynniki  $\delta_l, l=j1, j$ , mają identyczne wartości jak w (4.9). Stosując metodę Newmarka do sekwencyjnego rozwiązywania równań (4.9) otrzymywano przy wykorzystaniu (3.3) ustaloną bądź przejściową odpowiedź dynamiczną badanego układu w formie przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń kątowych oraz dynamicznych momentów skręcających w dowolnych zadanych przekrojach poprzecznych L-SMC.

Należy zauważyć, że wszystkie nieliniowe własności lepko-sprężyste omawianych układów mechanicznych są opisywane w równaniach dynamicznych warunków brzegowych oraz odpowiadających im równaniach różniczkowych z przesuniętym argumentem w formie przyrostowej. W rozpatrywanym doświadczalnym układzie napędowym ze względu na stosunkowo duże wartości różnic przemieszczeń kątowych tarcz sprzęgła podatnego  $\Delta\Theta_{18}$  przekraczające 1 rad podejście przyrostowe może okazać się niedostatecznie dokładne. Dlatego funkcja sprężystego momentu przywracającego sprzęgła (4.6) została podzielona na część liniową i nieliniową. Wówczas, przyjęto stałą sztywność skrętną sprzęgła podatnego  $H_{18}$  równą  $a_1$  w (4.6). Z kolei człony nieliniowe w (4.6) zastały potraktowane jako zewnętrzne momenty wymuszające zależne od odpowiedzi układu, które podstawiono do  $M_{18}^{(1)}$  i  $M_{18}^{(2)}$  w (4.9) i (4.10). Podczas symulacji drgań, tzn. rozwiązywania równań (4.10), ich chwilowe wartości wyznaczano metodą ekstrapolacji kubicznej. Równania ruchu (2.1) oraz równania z przesuniętym argumentem (4.10) rozwiązywano z quasi-statycznymi warunkami początkowymi, gdzie zakładano, że na początku procesu układ napędowy wiruje ze stałą prędkością obrotową w stanie wstępnego napięcia skrętnego zamkniętej pętli oraz wskutek stałych momentów oporowych wywoływanych momentami tarcia w łożyskach, uszczelnieniach obudów przekładni zębatach i oddziaływaniem mgły olejowej w zazębieniach tych przekładni.

Porównanie wyników pomiarów dokonanych na obiekcie rzeczywistym z analogicznymi wynikami teoretycznymi uzyskanymi drogą symulacji komputerowej procesu drgań skrętnych zostało przeprowadzone dla następujących przypadków:

- I - rezonansu z pierwszą postacią drgań własnych;
- II- poza-rezonansowych warunków pracy;
- III - rezonansu z drugą postacią drgań własnych;
- IV - rezonansu z czwartą postacią drgań własnych.

Wykorzystując nastawne sprzęgło sztywne przyłożono wstępne napięcie statyczne zamkniętej pętli rozpatrywanego układu napędowego za pomocą stałego momentu skrętnego równego 35 Nm w

przypadku I oraz 21 Nm w przypadkach pozostałych. Ponadto, we wszystkich wymienionych przypadkach przyjęto taką samą amplitudę składowej zmiennej zewnętrznego momentu wymuszającego silnika elektrycznego równą 5 Nm.

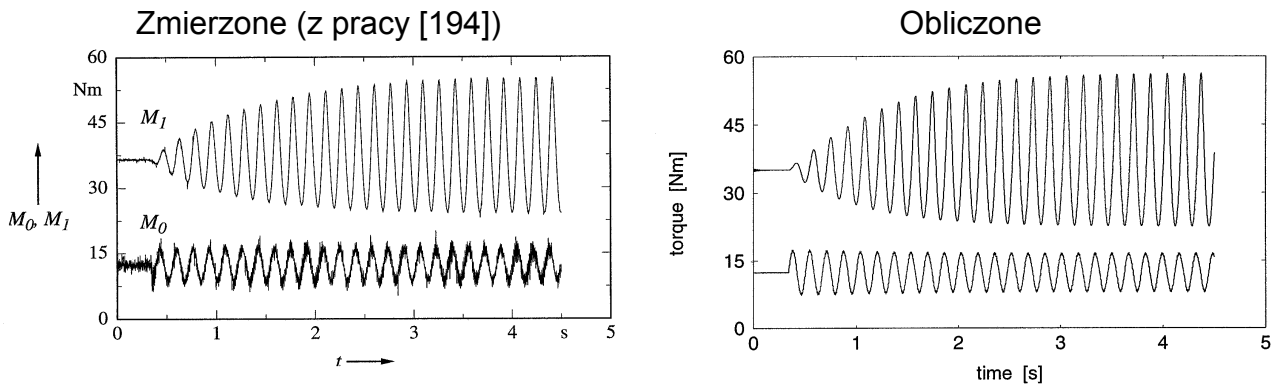
### I. Porównanie w warunkach rezonansu z pierwszą postacią drgań własnych

Jak wspomniano powyżej, wartość pierwszej częstości małych drgań układu zależy w dużej mierze od składowej stałej  $a_1$  sztywności skrętnej sprzęgła podanego definiowanej jako pochodnej momentu przywracającego  $M_K(\Delta\Theta)$  w (4.6) względem kąta  $\Delta\Theta$ . Wówczas sztywność ta jest uzależniona od tzw. centralnego punktu pracy sprzęgła o nieliniowej charakterystyce wyznaczonego w omawianym układzie napędowym wstępnym napięciem statycznym przyłożonym w pętli zamkniętej. Rezonans z pierwszą częstością drgań własnych badanego układu napędowego był szczegółowo badany doświadczalnie i teoretycznie w pracy [194]. Wyniki pomiarów uzyskane w [194] zostały następnie wykorzystane w pracach [108, 177] do porównania z analogicznymi wynikami obliczeniowymi otrzymanymi przy wykorzystaniu dyskretno-ciągłego modelu mechanicznego pokazanego na rysunku 4.46. Rozpatrzono następujące przypadki drgań:

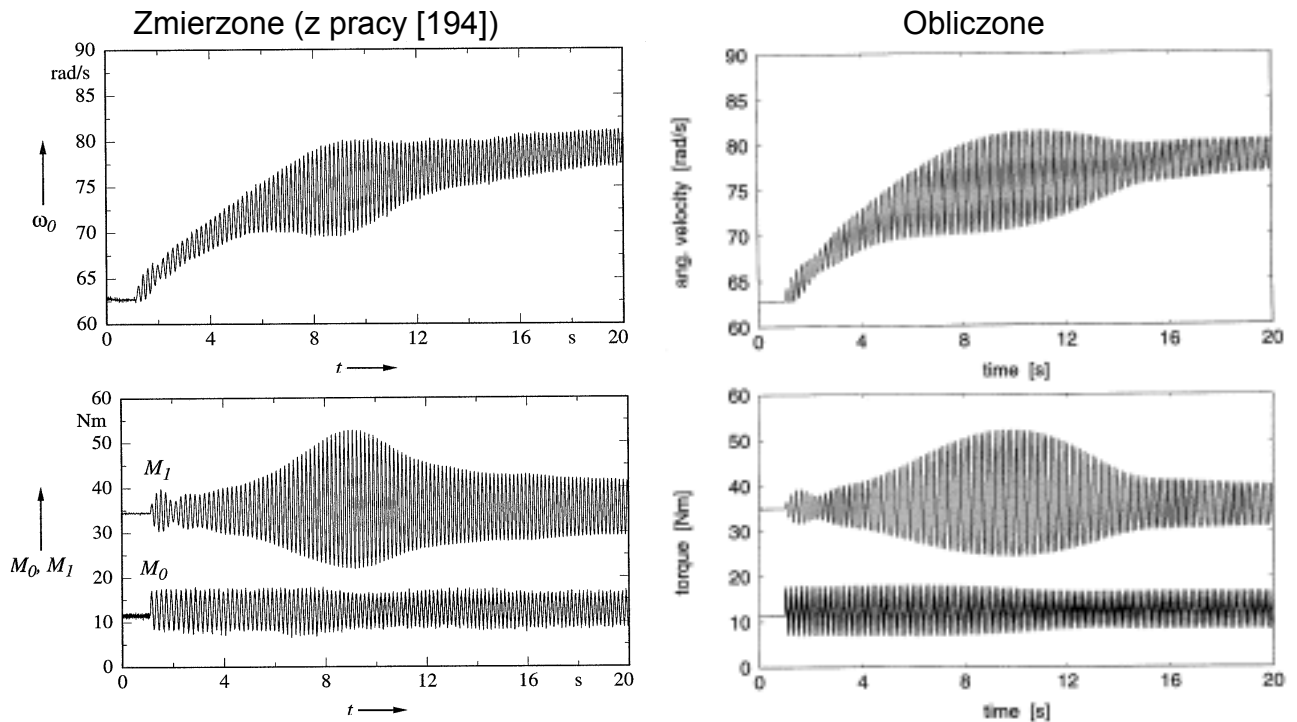
- Przypadek A: ustalone rezonansowe warunki działania przy stałej prędkości obrotowej wałów równej  $n=600$  obr/min;
- Przypadek B: nieustalone warunki działania wywołane nagłym przyłożeniem wymuszającego momentu harmonicznego o częstości równej pierwszej częstości drgań własnych rozpatrywanego układu przy stałej prędkości obrotowej wałów  $n=600$  obr/min;
- Przypadek C: nieustalone warunki działania wywołane momentem wymuszającym o liniowo narastającej częstości przechodzącej przez strefę rezonansu z pierwszą częstością drgań własnych przy stałej prędkości obrotowej wałów  $n=600$  obr/min;
- Przypadek D: nieustalone warunki działania wywołane przejściem przez strefę rezonansu z pierwszą częstością drgań własnych przy wymuszeniu momentem o częstości równej połowie częstości synchronicznej silnika przy narastającej stopniowo prędkości obrotowej wałów  $n$ .

Zaczerpnięte z pracy [194] wyniki pomiarów dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez „wał silnikowy” i „wał sprzęgłowy” w przypadkach A, B i C oraz odpowiadające im wyniki symulacji przeprowadzonych za pomocą przyjętego modelu dyskretno-ciągłego zamieszczono w [177]. Przykładowe przebiegi momentów przenoszonych przez „wał silnikowy” (moment  $M_0$ ) i „wał sprzęgłowy” (19) (moment  $M_1$ ) uzyskane drogą pomiarów i obliczeń w przypadku B pokazane są na rysunku 4.48. Z przeprowadzonych porównań w przypadkach A, B i C wynika dobra zgodność wyników pomiarów z wynikami symulacji komputerowej. Pewne istotniejsze różnice zauważono w przypadku przebiegów momentu skręcającego w „wale silnikowym” spowodowane najprawdopodobniej niedostatecznie dokładnym opisem matematycznym generowanego rzeczywistego momentu silnika.

W celu zbadania drgań przejściowych w przypadku D układ napędowy został przyspieszony z ustalonych warunków pracy ze stałą prędkością obrotową wałów  $n=600$  obr/min do prędkości  $n=750$  obr/min w ciągu 20 sekund. Wówczas stały moment napędowy silnika musiał nieznacznie przekroczyć sumaryczny moment oporowy całego układu napędowego, a częstość składowej zmiennej momentu napędowego wzrastała proporcjonalnie do wartości połowy chwilowej prędkości obrotowej wału silnika. W efekcie nastąpiło przejście wartości częstości wymuszenia zewnętrznego przez strefę rezonansu z pierwszą częstością drgań własnych układu. Zmierzone i obliczone przebiegi czasowe prędkości kątowej „masy dodatkowej” (26) oraz dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez „wał silnikowy” (moment  $M_0$ ) i „wał sprzęgłowy” (19) (moment  $M_1$ ) powstałe w wyniku wywołanych w ten sposób drgań przejściowych przedstawiono na rysunku 4.49.



Rys. 4.48 Zmierzone i obliczone dynamiczne momenty skracające powstałe w wyniku nagłego przyłożenia harmonicznie zmiennego momentu wymuszającego z częstotliwością równą pierwszej częstotliwości drgań własnych układu



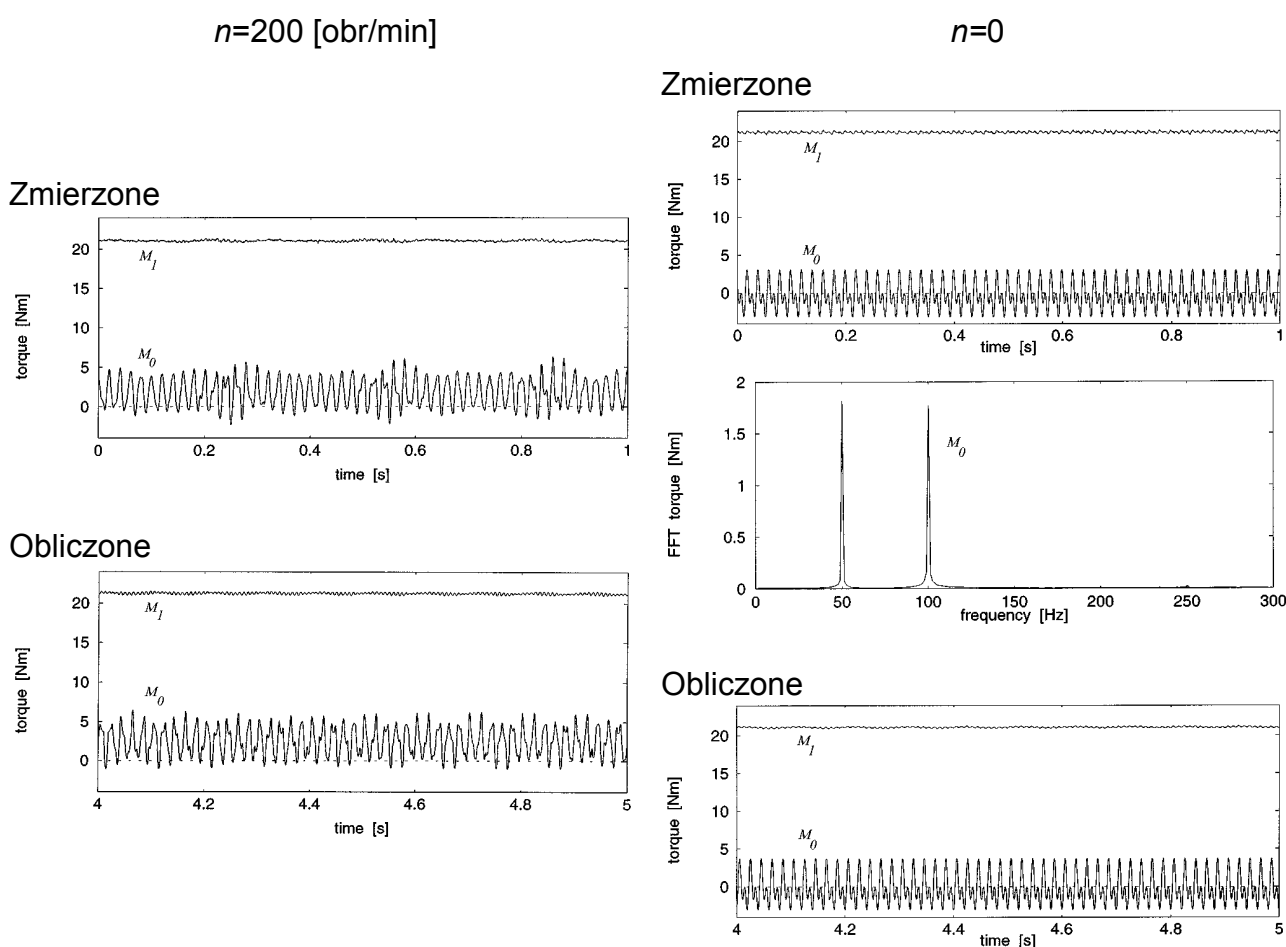
Rys. 4.49 Zmierzone i obliczone prędkość kątowna oraz dynamiczne momenty skracające powstałe w wyniku przejścia przez strefę rezonansu z pierwszą częstotliwością drgań własnych układu

Zarówno w przypadku prędkości kątownej oraz w przypadku momentów skracających otrzymano dobrą zgodność wyników doświadczalnych z teoretycznymi. Zaistniałe różnice przebiegów drgań przejściowych występują przed i po przejściu przez wspomniany rezonans wskutek przyjętego liniowego modelu tłumienia w materiale wałów, w którym stałe wartości współczynników materiałowego tłumienia właściwego  $\psi_i$  w (4.7) wyznaczano wg [90] w odniesieniu do maksymalnego spodziewanego poziomu naprężeń stycznych.

## II. Badania porównawcze w poza-rezonansowych warunkach działania

W tym przypadku układ napędowy został wzbudzony do drgań momentem wymuszającym silnika o częstotliwości 50 Hz przy stałej średniej prędkości obrotowej wałów  $n=200$  obr/min oraz w stanie bezruchu, tj. przy  $n=0$ . Przebiegi dynamicznych momentów skracających przenoszonych przez „wał silnikowy” ( $M_0$ ) oraz „wał sprzęgłowy” ( $M_1$ ) otrzymane drogą pomiarów i obliczeń odpowiednio dla układu wirującego i nie wirującego pokazano na rysunku 4.50. Dla układu wirującego otrzymano dobrą zgodność obliczonych przebiegów w stosunku do analogicznych przebiegów zmierzonych. Pewne drobne różnice wystąpiły jedynie w przypadku przebiegów

momentu w „wale silnikowym”, które można wytłumaczyć faktycznie nieznanym i niedostatecznie dokładnie zidentyfikowanym opisem rzeczywistego momentu zewnętrznego generowanego przez silnik elektryczny przy wirującym układzie napędowym. Natomiast w przypadku układu nie wirującego zmierzone przebiegi momentów skręcających są regularnymi funkcjami okresowymi odpowiedzi dynamicznej w ustalonych poza-rezonansowych warunkach działania. Jak wynika z szybkiej transformacji Fouriera (FFT) przebiegu momentu w „wale silnikowym”, przebieg ten jest superpozycją dwóch składowych harmonicznymi o częstotliwościach 50 i 100 Hz o prawie identycznych amplitudach, co przedstawiono na rys. 4.50. Ta druga składowa jest więc faktycznie generowana przez silnik elektryczny w przyjętych warunkach pracy układu napędowego w bezruchu. Wprowadzając tą dodatkową składową wymuszenia zewnętrznego do programu symulacyjnego otrzymuje się niemal identyczną odpowiedź dynamiczną w stosunku do odpowiedzi uzyskanej doświadczalnie, jak pokazano na rys. 4.50. Zarówno w przypadku układu wirującego i nie wirującego składowe zmienne momentu skręcającego przenoszonego przez „wał sprzęgłowy” są pomijalne w porównaniu ze składową stałą.

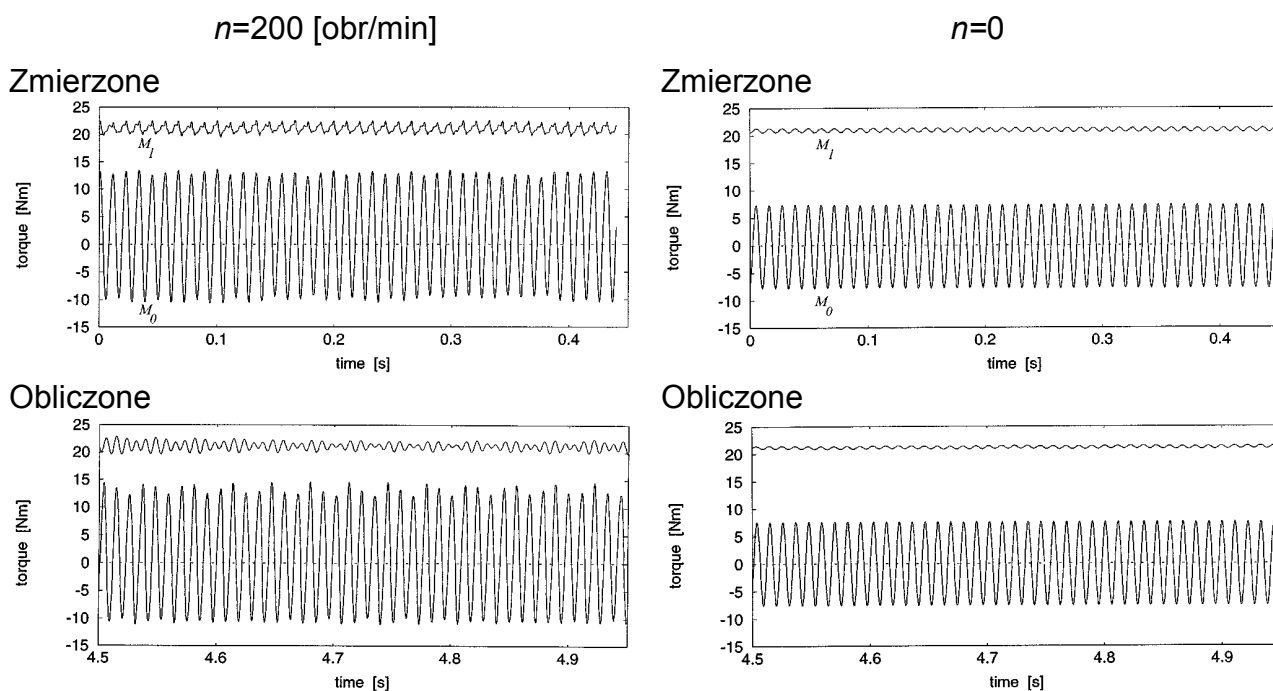


Rys. 4.50 Dynamiczne momenty skręcające w „wale silnikowym” ( $M_0$ ) i „wale sprzęgłowym” ( $M_1$ ) w poza-rezonansowych warunkach pracy układu wirującego i nie wirującego

### III. Porównanie w warunkach rezonansu z drugą postacią drgań własnych

Podobnie jak w przypadku poprzednim, układ napędowy został wzbudzony do drgań momentem wymuszającym silnika o częstotliwości 90 Hz przy stałej średniej prędkości obrotowej wałów  $n=200$  obr/min oraz w stanie bezruchu, tj. przy  $n=0$ . Przebiegi dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez „wał silnikowy” ( $M_0$ ) oraz „wał sprzęgłowy” ( $M_1$ ) otrzymane drogą pomiarów i obliczeń odpowiednio dla układu wirującego i nie wirującego pokazano na rysunku 4.51. W przypadku rezonansu z drugą częstotnością drgań własnych amplitudy dynamicznego

momentu skręcającego przenieszonego przez „wał silnikowy” (4) są znacznie większe niż amplitudy momentu przenieszonego przez „wał sprzęgłowy” (19) ponieważ drugą postacią drgań charakteryzuje węzeł w samym „wale silnikowym” oraz prawie zerowa kinetyczna i potencjalna energia własna w całej zamkniętej pętli układu napędowego, co przedstawiają odpowiednie wykresy na rysunku 4.47. Jak wynika z odpowiadających sobie przebiegów czasowych na rys. 4.51, otrzymano dobrą zgodność wyników doświadczalnych i teoretycznych, przy czym w przypadku układu nie wirującego zgodność ta jest niemal idealna. Natomiast w przypadku układu wirującego można zauważyć pewne drobne jakościowe różnice przebiegów momentu przenieszonego przez „wał sprzęgłowy” spowodowane prawdopodobnie ograniczoną dokładnością identyfikacji parametrów samej pętli zamkniętej badanego układu napędowego. Na podstawie odpowiedzi dynamicznej układu uzyskanej drogą pomiarów można stwierdzić, że część zmienna rzeczywistego momentu generowanego przez silnik elektryczny ma przebieg harmoniczny o założonej częstotliwości realizowanej przez sterownik bez żadnych dodatkowych składowych o wyższych częstotliwościach. Dzięki temu łatwiej jest otrzymać wyniki symulacji komputerowej bardzo podobne do analogicznych wyników doświadczalnych. Ponadto, należy zauważyć, że amplitudy badanych momentów skręcających w ustalonych warunkach rezonansu są większe w przypadku układu wirującego niż w przypadku układu nie wirującego, jak pokazano na rys. 4.51.



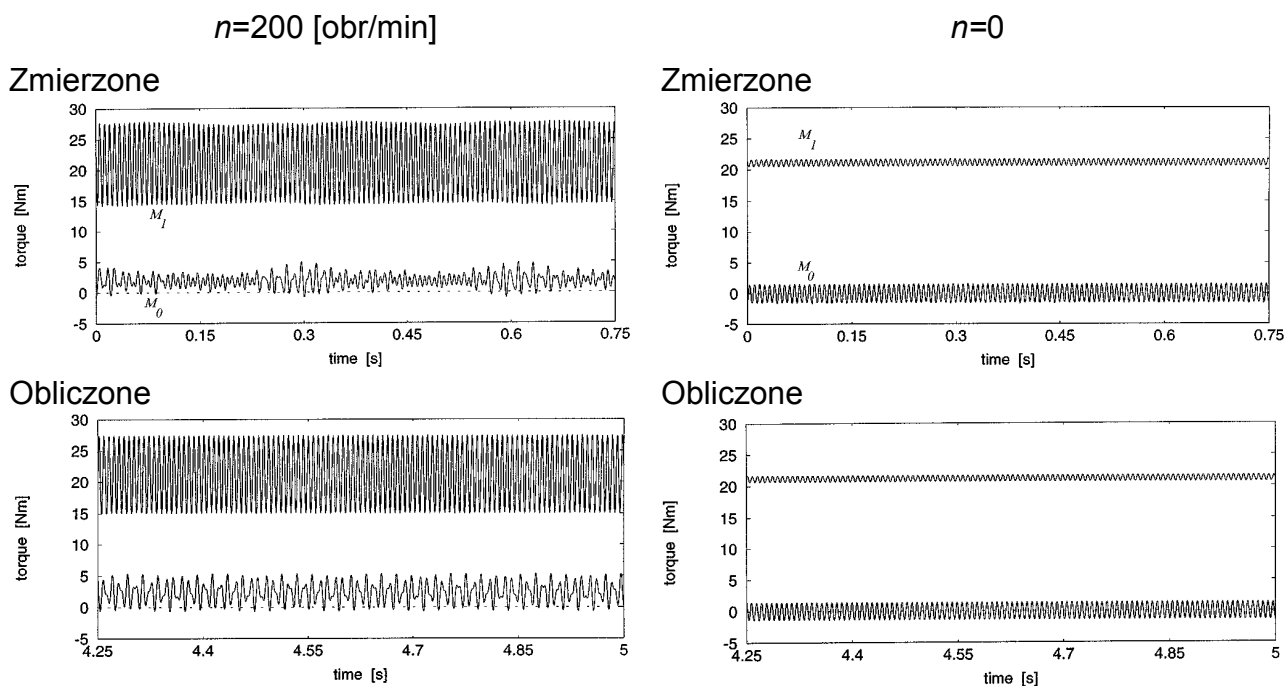
Rys. 4.51 Dynamiczne momenty skręcające w „wale silnikowym” ( $M_0$ ) i „wale sprzęgłowym” ( $M_1$ ) w warunkach rezonansu z drugą częstotnością drgań własnych w przypadku układu wirującego i nie wirującego

#### IV. Porównanie w warunkach rezonansu z czwartą postacią drgań własnych

Ze względu na brak tensometrów naklejonych na odcinek wału (16), w którym występuje węzeł trzeciej postaci drgań własnych rozpatrywanego układu napędowego, badanie odpowiadające tej postaci rezonansu byłoby zbyt kłopotliwe. Dlatego badano drgania ustalone w warunkach rezonansu z czwartą postacią drgań własnych, której węzeł drgań występuje właśnie w odcinku „wału sprzęgłowego” (19) mającego naklejone tensometry pomiarowe, co przedstawiają rysunki 4.44, 4.45 i 4.46.

Analogicznie jak w przypadku badania rezonansu z drugą postacią drgań własnych, układ napędowy został wzbudzony do drgań momentem wymuszającym silnika o częstotliwości 140 Hz przy stałej średniej prędkości obrotowej wałów  $n=200$  obr/min oraz w stanie bezruchu, tj. przy  $n=0$ .

Przebiegi dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez „wał silnikowy” ( $M_0$ ) oraz „wał sprzęgłowy” ( $M_1$ ) otrzymane drogą pomiarów i obliczeń odpowiednio dla układu wirującego i nie wirującego przedstawiono na rysunku 4.52. Podobnie jak w przypadku rezonansu z drugą postacią drgań własnych, lepszą zgodność zmierzonego i obliczonego przebiegu dynamicznego momentu skręcającego przeniesionego przez „wał silnikowy” otrzymano dla układu nie wirującego. Natomiast w przypadku przebiegów dynamicznego momentu skręcającego przeniesionego przez „wał sprzęgłowy” bardzo dobrą zgodność wyników pomiarów i symulacji obserwuje się zarówno dla układu wirującego i nie wirującego, jak pokazano na rys. 4.52. Wspomniane w przypadku rezonansu z drugą postacią drgań własnych różnice amplitud momentów skręcających dla układu wirującego i nie wirującego są w warunkach rezonansu z czwartą postacią drgań własnych znacznie większe. Jak wynika z odpowiednich przebiegów momentów na rys. 4.52, w przypadku układu nie wirującego wzbudzanego przez silnik elektryczny sygnałem harmonicznym o rezonansowej częstotliwości 140 Hz efekt rezonansu z czwartą postacią drgań własnych praktycznie nie występuje. Ten fakt można wytłumaczyć pokazaną na rys. 4.47 zerową wartością własnej energii kinetycznej w przekroju występowania źródła wymuszenia zewnętrznego, czyli wirnika silnika elektrycznego, charakteryzującą czwartą postać drgań własnych, co teoretycznie uniemożliwia wzbudzenie odpowiadającego tej postaci rezonansu przez silnik. Natomiast nawet przy małych prędkościach obrotowych  $n$  badanego układu napędowego rezonans o częstotliwości  $\sim 140$  Hz był wyraźnie widoczny zarówno w rzeczywistości, jak i w formie procesu symulacji komputerowej. Wówczas, w przypadku układu wirującego dodatkowymi źródłami wymuszenia stają się najprawdopodobniej siły tarcia w przekładniach zębatych i łożyskach, oddziaływanie których musiało więc zostać prawidłowo zidentyfikowane w formie odpowiednich momentów tłumienia bezwzględnego (4.8).



Rys. 4.52 Dynamiczne momenty skręcające w „wale silnikowym” ( $M_0$ ) i „wale sprzęgłowym” ( $M_1$ ) w warunkach rezonansu z czwartą częstotliwością drgań własnych w przypadku układu wirującego i nie wirującego

## V. Uwagi dotyczące weryfikacji doświadczalnej modelu dyskretno-ciągłego do analizy drgań skrętnych

Przeprowadzone przy wykorzystaniu istniejącego w Arbeitsbereich Meerestechnik II Uniwersytetu Technicznego w Hamburgu-Harburgu (TUHH) stanowiska doświadczalnego do



badania drgań skrętnych porównanie wyników pomiarów z wynikami obliczeń przy różnych warunkach działania układu napędowego i w różnych zakresach częstości wykazało w istocie bardzo dobrą zgodność teorii z eksperymentem. Zaobserwowane stosunkowo małe i niezbyt istotne z punktu widzenia praktycznego rozbieżności są spowodowane typowymi dla symulacji komputerowej trudnościami, takimi jak powszechnie stosowany zbyt prosty, liniowy model tłumienia materiałowego oraz niezbyt dokładnie zidentyfikowany opis matematyczny wymuszenia zewnętrznego. Niemniej jednak trzeba podkreślić, że dyskretno-ciągły sposób modelowania układów napędu maszyn i pojazdów oraz zastosowanie rozwiązania falowego typu d'Alemberta porównywane dotąd jedynie z wynikami teoretycznymi otrzymywanymi za pomocą innych analogicznych metod, w konfrontacji z wynikami uzyskanymi drogą pomiarów laboratoryjnych również wykazały swoją wiarygodność. W związku z powyższym należy stwierdzić, iż proponowana w niniejszej pracy metodyka analizy drgań skrętnych osiągnęła należyty stopień zaawansowania do zastosowań inżynierskich w praktyce przemysłowej.

Przeprowadzone badania doświadczalne i teoretyczne wykazały potrzebę wprowadzania nieliniowego modelu tłumienia materiałowego przy analizie drgań skrętnych układów napędowych. W tym modelu energia dyssypowana w czasie powinna być funkcją bieżącej wartości naprężenia stycznego w odkształcanym elemencie układu. Natomiast stosowanie powszechnie znanych liniowych modeli tłumienia materiałowego, na przykład modelu w opisanego w [90], w którym stopień dyssypacji energii zależy jest od spodziewanego i zakładanego *a priori* poziomu naprężenia stycznego, często prowadzi do niedostatecznie dokładnych wyników, zwłaszcza przy analizie drgań przejściowych.

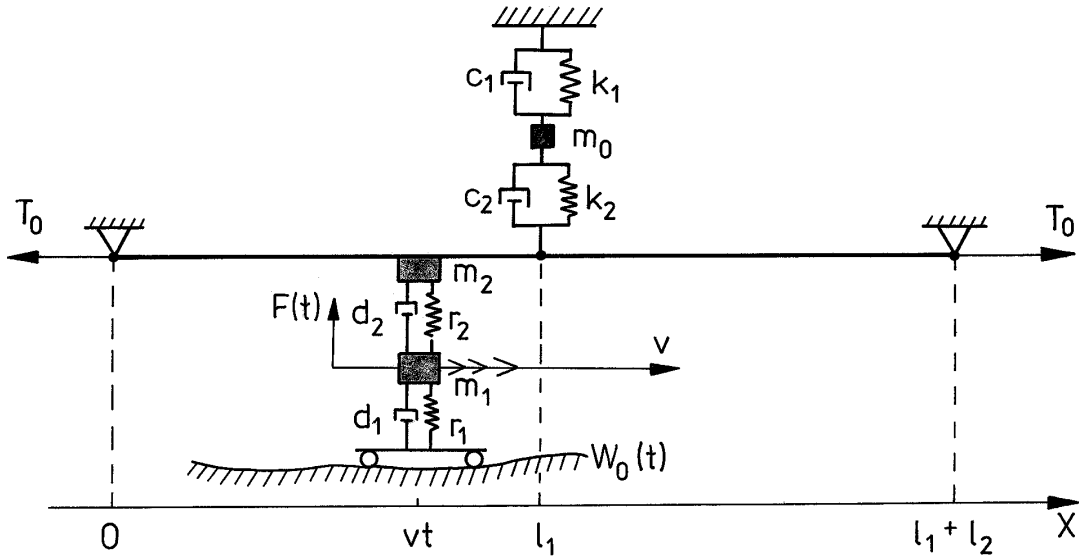
#### **4.2 Zastosowanie rozwiązania falowego typu d'Alemberta do badania układów strunowych drgających poprzecznie**

W rzeczywistości istnieje wiele urządzeń i mechanizmów, których szczególnie ważnymi elementami konstrukcyjnymi, tj. nośnymi lub napędowymi, są liny. Należą do nich napowietrzne sieci przesyłowe energii elektrycznej, napowietrzne sieci zasilania trakcji kolejowej i tramwajowej, układy nośne i napędowe wszelkiego rodzaju kolei linowych, kopalniane układy wyciągowe, linowe układy napędu maszyn roboczych takich jak dźwignice, żurawie, koparki, kafary i wiele innych. Będąc w stanie odpowiedniego naciągu liny tych konstrukcji i mechanizmów wykonują zwykle oscylujące ruchy poprzeczne i podłużne w stosunku do kierunków ich nie odkształconych osi w formie drgań oddziałując tym samym dynamicznie z otoczeniem, tj. z układami ich zawiesznień, przewodnic, bloków napędowych i innych. Drgania mechaniczne układów linowych mogą być niemniej szkodliwe i niebezpieczne dla ich trwałości i niezawodności niż na przykład drgania skrętne omawianych w punkcie 4.1 układów napędu maszyn roboczych i pojazdów oraz maszyn wirnikowych. Dlatego drganiom poprzecznym i podłużnym układów linowych poświęcono w literaturze wiele uwagi, m. in. w pracach [18, 78, 110, 151]. W modelach mechanicznych tych układów liny traktowane są najczęściej jako rozciągliwe bądź nierozciągliwe struny, a rzadziej jako belki. Dlatego w dalszej części pracy układy te będą nazywane układami strunowymi.

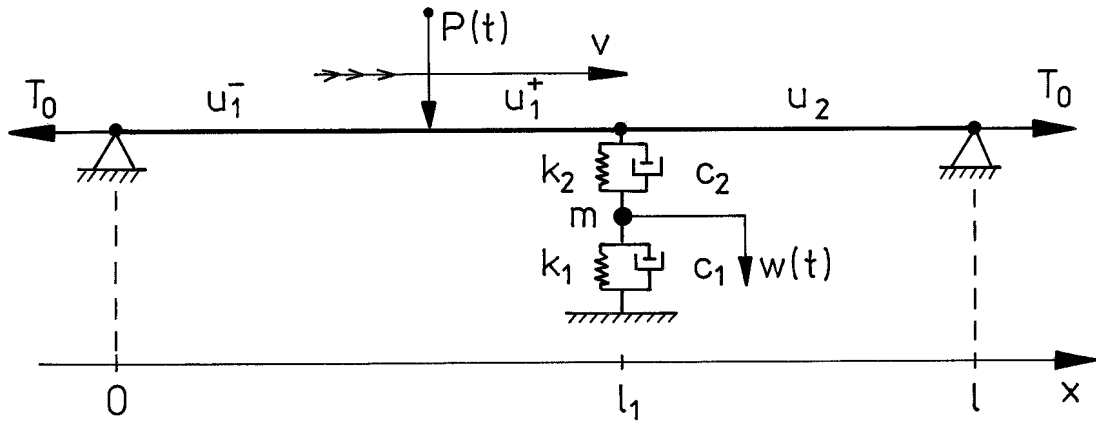
Ważnymi z punktu widzenia rozwoju i eksploatacji współczesnych szybkich kolei elektrycznych są drgania napowietrznych sieci zasilania trakcji wymuszane ruchem pantografów. Nadmierne amplitudy drgań poprzecznych lin nośnych i zasilających sieci mogą prowadzić do natychmiastowych zniszczeń pantografów, jak również są przyczyną odrywania się liny zasilającej od listwy zbierakowej pantografu powodując zjawisko łuku elektrycznego i następujące w efekcie szybkie zużycie samego pantografu oraz utrudnienia w prawidłowym zasilaniu w energię pojazdów szynowych, zwłaszcza przy dużych prędkościach jazdy. Dlatego te problemy stały się przedmiotem wnikliwych badań wielu autorów, m. in. [55, 105, 114, 150]. Mimo iż w normalnych warunkach działania amplitudy drgań linii napowietrznych sieci zasilania trakcji mogą mieścić się w granicach

od kilkunastu do kilkudziesięciu centymetrów, to w stosunku do długości lin i rozstawu ich podpór można te drgania traktować jako tzw. „małe drgania”. Następujące w wyniku tych drgań odkształcenia podłużne lin są wówczas małoznaczne i dlatego w badaniach zwykle pomijane. W stosowanych powszechnie modelach mechanicznych układu zasilająca sieć napowietrzna trakcji – pantograf pojazdu szynowego zarówno liny nośne jak i zasilające są więc zazwyczaj traktowane jako nierozciągliwe struny o skończonych bądź nieskończonych długościach. Natomiast pantograf jest reprezentowany przez ruchomy oscylator lepko-bezwładnościowo-sprężysty o 2 lub 3 stopniach swobody poruszający się wzdłuż liny zasilającej zazwyczaj ze stałą prędkością  $v$ . Podpory lin nośnych i zasilającej mogą być traktowane jako sztywne bądź podatne o zadanych charakterystykach lepko-bezwładnościowo-sprężystych. W celu rozwiązania zagadnienia oddziaływania dynamicznego układu zasilająca sieć napowietrzna – pantograf stosowano różne metody, na przykład metodę Ritz’a w [150] oraz najczęściej dyskretyzację strun metodą elementów skończonych w [55, 105, 114]. W obu przypadkach zastosowano podejście modalne sprowadzające się do superponowania dużej liczby funkcji drgań własnych modelu sieci wynoszącej przynajmniej 200÷300 by otrzymywać dostateczną dokładność wyników, szczególnie przy prędkości ruchomego oscylatora  $v$  bliskich prędkości propagacji fali poprzecznej w linie zasilającej. Ze względu na występujące zwykle w obydwu wymienionych metodach przybliżonych problemy zbieżności rozwiązania zastosowana metodyka jest kłopotliwa obliczeniowo, zwłaszcza w przypadku przyjmowania najczęściej nieliniowego modelu kontaktu między listwą pantografu a liną zasilającą, [105, 114]. Dlatego w pracach [28, 30, 32, 175] dokonano próby badania zjawiska dynamicznego oddziaływania pantografu pojazdu szynowego z trakcyjną siecią napowietrzną przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego i L-SMC.

W tych pracach rozpatrywano stosunkowo prosty układ mechaniczny składający się z jednorodnej struny sprężystej o długości  $l$  podpartej sztywno na końcach i lepko-bezwładnościowo-sprężystości w połowie długości za pomocą oscylatora o jednym stopniu swobody. Ten oscylator składa się z kolei z masy skupionej  $m_0$  i dwóch nieważkich elementów sprężysto-tłumiących o sztywnościach  $k_1$  i  $k_2$  oraz o współczynnikach tłumienia wiskotycznego  $c_1$  i  $c_2$ . Małe drgania poprzeczne struny w jednej płaszczyźnie są wymuszane poruszającym się w dodatnim kierunku współrzędnej przestrzennej  $x$  ze stałą prędkością  $v$  oscylatorem lepko-bezwładnościowo-sprężystym o 2 stopniach swobody, jak pokazano na rysunku 4.53, lub stałą albo harmonicznie zmienną siłą skupioną, co przedstawia rysunek 4.54. Masa skupiona  $m_2$  ruchomego oscylatora ślizga się wzdłuż struny, a masa  $m_1$  jest połączona z poruszającą się podstawą oraz z masą  $m_2$  za pomocą dwóch bezmasowych elementów sprężysto-tłumiących odpowiednio o sztywnościach  $r_1$  i  $r_2$  oraz o współczynnikach tłumienia wiskotycznego  $d_1$  i  $d_2$ . Do masy  $m_1$  przyłożono dowolnie zmienną w czasie siłę  $F(t)$ . Ponadto, oscylator może być poddawany wymuszeniu kinematycznemu zadanemu poprzecznie w stosunku do osi  $x$  ruchem podstawy  $w_0(t)$ . Taki sam układ mechaniczny rozpatrywano również w pracy [105], w której struna została zdyskretyzowana metodą elementów skończonych. W efekcie otrzymano model dyskretny o kilkuset stopniach swobody. W proponowanym podejściu zastosowanym w [28, 30, 32, 175], pozostając w porównaniu z modelem MES na tym samym poziomie błędów identyfikacji parametrów, obydwa odcinki struny, tj. od lewej podpory sztywnej do podpory podatnej oraz od podpory podatnej do prawej podpory sztywnej, rys. 4.53, 4.54, zastąpiono każdy odcinek jedynie po jednym L-SMC, które w tym przypadku lepiej jest nazwać „strunowymi” w odróżnieniu od prętowych L-SMC odkształcalnych skrętnie stosowanych do analizy drgań skrętnych.



Rys. 4.53 Jednorodna struna o skończonej długości pobudzana do drgań poprzecznych ruchomym oscylatorem



Rys. 4.54 Jednorodna struna o skończonej długości pobudzana do drgań poprzecznych ruchomą siłą skupioną

Równaniami ruchu przekrojów poprzecznych struny są jednorodne równania (2.1) dla  $\tau=0$  i  $\Gamma=T_0$ , gdzie  $T_0$  oznacza napięcie struny, a  $\mu$  jest jej masą jednostkową. Dalsze rozważania są przeprowadzane przy następujących wielkościach bezwymiarowych:

$$\tilde{x} = \frac{x}{l_s}, \quad \tau = \frac{at}{l_s}, \quad \lambda_i = \frac{l_i}{l_s}, \quad \tilde{u}_i(\tilde{x}, \tau) = \frac{u_i(x, t)}{l_s}, \quad \tilde{w}_j(\tau) = \frac{w_j(t)}{l_s}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{a}, \quad i = 1, 2, \quad j = 0, 1, 2, \quad (4.11)$$

gdzie  $u_i(x, t)$  są przemieszczeniami poprzecznymi przekrojów poprzecznych struny,  $a = \sqrt{T_0/\mu}$  jest prędkością propagacji fali poprzecznej w strunie,  $l_i$  są długościami obu makroelementów ( $l_1+l_2=l$ ),  $w_j(t)$  oznaczają przemieszczenia mas skupionych oscylatorów, a  $l_s$  [m] i  $u_i$  [m] są dowolnymi wartościami. W przypadku analizy drgań układu mechanicznego wymuszanych obciążeniami ruchomymi wygodnie jest wprowadzić przestrzenną współrzędną ruchomą  $\xi = \tilde{x} - \tilde{v}\tau$ . Wówczas, przy wykorzystaniu (4.11) równania ruchu przekrojów poprzecznych makroelementów strunowych przyjmują następującą postać

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_i(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} - 2\tilde{v} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i(\xi, \tau)}{\partial \xi \partial \tau} - (1 - \tilde{v}^2) \frac{\partial^2 \tilde{u}_i(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.12)$$

Równania te są rozwiązywane przy zerowych warunkach początkowych (2.10), co oznacza, że cały układ mechaniczny pozostaje w bezruchu przed najazdem ruchomego obciążenia, tj. oscylatora lub siły. W ruchomym układzie współrzędnych dynamiczne i geometryczne warunki brzegowe, przy których rozwiązywane są równania (4.12) przyjmują postać

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1(\xi, \tau) &= 0 & \text{dla } \xi = -\tilde{v}\tau, \\ \tilde{u}_2(\xi, \tau) &= 0 & \text{dla } \xi = \lambda_1 + \lambda_2 - \tilde{v}\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_0(\tau) \\ \tilde{u}_2(\xi, \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{12} & -C_2 \\ -C_2 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_0(\tau) \\ \tilde{u}_2(\xi, \tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{12} & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_0(\tau) \\ \tilde{u}_2(\xi, \tau) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0 \\ T \left( \frac{\partial \tilde{u}_2(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right) \end{bmatrix},\end{aligned}$$

$$\tilde{u}_1(\xi, \tau) = \tilde{u}_2(\xi, \tau) \quad \text{dla } \xi = \lambda_1 - \tilde{v}\tau,$$

$$P(\tau) = T \left( \frac{\partial \tilde{u}_j^+(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}_j^-(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right), \quad \tilde{u}_j^-(\xi, \tau) = \tilde{u}_j^+(\xi, \tau) \quad (4.13)$$

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(\tau) \\ \tilde{w}_2(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{12} & -D_2 \\ -D_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(\tau) \\ \tilde{w}_2(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{12} & -R_2 \\ -R_2 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(\tau) \\ \tilde{w}_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}(\tau) \\ -P(\tau) \end{bmatrix},$$

$$\text{dla } \xi = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} M_0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_0(\tau) \\ \tilde{w}_2(\tau) \\ \tilde{w}_1(\tau) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{12} & -C_2 & 0 \\ -C_2 & C_2 + D_2 & -D_2 \\ 0 & -D_2 & D_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_0(\tau) \\ \tilde{w}_2(\tau) \\ \tilde{w}_1(\tau) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} K_{12} & -K_2 & 0 \\ -K_2 & K_2 + R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_0(\tau) \\ \tilde{w}_2(\tau) \\ \tilde{w}_1(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ T \left( \frac{\partial \tilde{u}_2(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{u}_1(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right) \\ \tilde{F}(\tau) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\text{dla } \xi = 0 \text{ i } \tau = \frac{\lambda_1}{\tilde{v}}, \quad \text{tj. dla } \xi = \lambda_1 - \tilde{v}\tau = 0,$$

$$\text{gdzie: } j=1 \text{ dla } 0 < \tau < \frac{\lambda_1}{\tilde{v}}, \text{ i } j=2 \text{ dla } \frac{\lambda_1}{\tilde{v}} < \tau < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\tilde{v}}, \quad M_k = \frac{m_k}{m_s}, \quad k = 0, 1, 2,$$

$$C_{12} = \frac{(c_1 + c_2)l_s}{am_s}, \quad C_2 = \frac{c_2 l_s}{am_s}, \quad K_{12} = \frac{(k_1 + k_2)l_s^2}{a^2 m_s}, \quad K_2 = \frac{k_2 l_s^2}{a^2 m_s}, \quad \tilde{T}_0 = T_0 \frac{l_s}{a^2 m_s},$$

$$D_{12} = \frac{(d_1 + d_2)l_s}{am_s}, \quad D_2 = \frac{d_2 l_s}{am_s}, \quad R_{12} = \frac{(r_1 + r_2)l_s^2}{a^2 m_s}, \quad R_2 = \frac{r_2 l_s^2}{a^2 m_s}, \quad T = \tilde{T}_0 (1 - \tilde{v}^2),$$

$$\tilde{F}(\tau) = \left( F(t) + r_1 w_0(t) + d_1 \dot{w}_0(t) \right) \frac{l_s^2}{a^2 m_s u_s},$$

$m_s$  [kg] jest dowolną wartością, a górne indeksy „+” i „-” oznaczają części  $j$ -tego makroelementu znajdujące się odpowiednio przed i za poruszającym się źródłem zaburzenia. Rozwiązaniem jednorodnych równań ruchu (4.12) są rozwiązania falowe typu d'Alemberta (3.1). W tym przypadku należy jednak zauważyć, że jeżeli źródło zaburzenia porusza się z prędkością mniejszą od prędkości fali poprzecznej w strunie, czyli z tzw. prędkością podkrytyczną  $v < a$ , wtedy front pierwszego zaburzenia porusza się jak fala poprzeczna z prędkością  $a$ . Natomiast w przypadku prędkości nadkrytycznej  $v > a$  front pierwszego zaburzenia struny porusza się razem ze źródłem, tj. wraz z oscylatorem lub siłą skupioną. Dlatego szczegółowe postaci rozwiązania typu d'Alemberta są różne w przypadku prędkości pod- i nadkrytycznej, przez co należy je rozpatrywać oddzielnie.

#### A. Przypadek podkrytycznej prędkości ruchu zaburzenia $v < a$

W tym przypadku poruszający się oscylator lub siła skupiona wywołuje w strunie dwie poprzeczne fale bieżące o różnych długościach. Fala „krótsza” propaguje się przed źródłem w dodatnim kierunku osi  $x$ , tj. „w prawo”, a fala „dłuższa” propaguje się za źródłem w ujemnym kierunku osi  $x$ , tj. „w lewo”, rys. 4.53, 4.54. Wówczas, po wprowadzeniu ruchomej współrzędnej przestrzennej  $\xi = \tilde{x} - \tilde{v}\tau$  rozwiązanie typu d'Alemberta dla obu makroelementów strunowych przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} u_1(\xi, \tau) &= f_1(\tau - \tilde{v}\tau - \xi) + g_1(\tau + \tilde{v}\tau + \xi) & \text{dla } -\tilde{v}\tau \leq \xi \leq \lambda_1 - \tilde{v}\tau, \\ u_2(\xi, \tau) &= f_2(\tau - \tilde{v}\tau - \xi) + g_2(\tau + \tilde{v}\tau + \xi - 2\lambda_1) & \text{dla } \lambda_1 - \tilde{v}\tau \leq \xi \leq \lambda_1 + \lambda_2 - \tilde{v}\tau. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Po wprowadzeniu (4.14) do (4.13) i po oznaczeniu w każdej równości (4.13) największego argumentu przez  $z$  dostaje się następujące równania różniczkowe zwyczajne z przesuniętym argumentem dla funkcji  $f_i(z)$  i  $g_i(z)$ ,  $i=1,2$ :

$$\begin{aligned} g_2(z) &= -f_2(z - 2\lambda_2), \\ g_1(z) &= -f_1(z - 2\lambda_1) + f_2(z - 2\lambda_1) + g_2(z - 2\lambda_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} M_1(1+\tilde{v}^2) & 0 \\ 0 & M_2(1+\tilde{v}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1''\left(\frac{z+2\lambda_1\eta}{1+\tilde{v}}\right) \\ g_j''(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{12}(1+\tilde{v}) & -D_2(1+\tilde{v}) \\ -D_2(1+\tilde{v}) & (2\tilde{T}_0 + D_2)(1+\tilde{v}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1'\left(\frac{z+2\lambda_1\eta}{1+\tilde{v}}\right) \\ g_j'(z) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} R_{12} & -R_2 \\ -R_2 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1\left(\frac{z+2\lambda_1\eta}{1+\tilde{v}}\right) \\ g_j(z) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{aligned} &\tilde{F}\left(\frac{z+2\lambda_1\eta}{1+\tilde{v}}\right) + D_2(1-\tilde{v})f_j'\left(\frac{1-\tilde{v}}{1+\tilde{v}}(z+2\lambda_1\eta)\right) + \\ &2\tilde{T}_0(1+\tilde{v})g_j'(z) - M_2(1-\tilde{v})^2 f_j''\left(\frac{1-\tilde{v}}{1+\tilde{v}}(z+2\lambda_1\eta)\right) - \\ &+ R_2 f_j\left(\frac{1-\tilde{v}}{1+\tilde{v}}(z+2\lambda_1\eta)\right) \\ &- D_2(1-\tilde{v})f_j'\left(\frac{1-\tilde{v}}{1+\tilde{v}}(z+2\lambda_1\eta)\right) - R_2 f_j\left(\frac{1-\tilde{v}}{1+\tilde{v}}(z+2\lambda_1\eta)\right) \end{aligned} \right\}, \\ &f_1(z) = -g_1(z), \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{bmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_0''(z) \\ f_2''(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{12} & -C_2 \\ -C_2 & 2T + C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_0'(z) \\ f_2'(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{12} & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_0(z) \\ f_2(z) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} C_2 g_2'(z) + K_2 g_2(z) \\ 2T f_2'(z) - C_2 g_2'(z) - K_2 g_2(z) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} M_1(1-\tilde{\nu}^2) & 0 \\ 0 & M_2(1-\tilde{\nu}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1''\left(\frac{z}{1-\tilde{\nu}}\right) \\ f_j''^+(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{12}(1-\tilde{\nu}) & -D_2(1-\tilde{\nu}) \\ -D_2(1-\tilde{\nu}) & (2\tilde{T}_0 + D_2)(1-\tilde{\nu}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1'\left(\frac{z}{1-\tilde{\nu}}\right) \\ f_j'^+(z) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} R_{12} & -R_2 \\ -R_2 & R_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1\left(\frac{z}{1-\tilde{\nu}}\right) \\ f_j^+(z) \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{F}\left(\frac{z}{1-\tilde{\nu}}\right) + D_2(1+\tilde{\nu})g_j'\left(\frac{1+\tilde{\nu}}{1-\tilde{\nu}}z - 2\lambda_1\eta\right) + \\ 2\tilde{T}_0(1-\tilde{\nu})f_j'(z) - M_2(1+\tilde{\nu})^2 g_j''\left(\frac{1+\tilde{\nu}}{1-\tilde{\nu}}z - 2\lambda_1\eta\right) - \\ + R_2 g_j\left(\frac{1+\tilde{\nu}}{1-\tilde{\nu}}z - 2\lambda_1\eta\right) \\ - D_2(1-\tilde{\nu})g_j'\left(\frac{1+\tilde{\nu}}{1-\tilde{\nu}}z - 2\lambda_1\eta\right) - R_2 g_j\left(\frac{1+\tilde{\nu}}{1-\tilde{\nu}}z - 2\lambda_1\eta\right) \end{array} \right\},$$

$j=1, \eta=0$  dla  $0 < \tau < \frac{\lambda_1}{\tilde{\nu}}$  i  $j=2, \eta=1$  dla  $\frac{\lambda_1}{\tilde{\nu}} < \tau < \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\tilde{\nu}}$ , a dla  $z$  odpowiadającego  $\tau = \frac{\lambda_1}{\tilde{\nu}}$

$$\begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1''(z + \lambda_1) \\ f_2''(z) \\ \tilde{w}_0''(z + \lambda_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{12} & -D_2 & 0 \\ -D_2 & D_2 + C_2 + 2T & -C_2 \\ 0 & -C_2 & C_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1'(z + \lambda_1) \\ f_2'(z) \\ \tilde{w}_0'(z + \lambda_1) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} R_{12} & -R_2 & 0 \\ -R_2 & R_2 + K_2 & -K_2 \\ 0 & -K_2 & K_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_1(z + \lambda_1) \\ f_2(z) \\ \tilde{w}_0(z + \lambda_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}(z + \lambda_1) + D_2 g_2'(z) + R_2 g_2(z) \\ 2T f_1'(z) - M_2 g_2''(z) - (C_2 + D_2) g_2'(z) - (K_2 + R_2) g_2(z) \\ C_2 g_2'(z) + K_2 g_2(z) \end{bmatrix}.$$

W tych równaniach górne indeksy „+” i „-” funkcji  $f_i(z)$  i  $g_i(z)$ ,  $i=1,2$ , oznaczają odpowiednio „krótszą” i „dłuższą” falę generowaną bezpośrednio przez poruszające się obciążenie. Natomiast funkcje  $f_i(z)$  i  $g_i(z)$  bez górnych indeksów opisują fale odbite od podpór struny. W celu uzyskania odpowiedzi dynamicznej badanego układu równania (4.15) rozwiązujemy analogicznie jak w przypadku analizy drgań skrętnych, tzn. drogą sekwencyjnego całkowania numerycznego metodą Newmarka.

#### B. Przypadek nadkrytycznej prędkości ruchu zaburzenia $v > a$

W tym przypadku nie występują żadne zaburzenia struny przed poruszającym się źródłem, dzięki czemu struna pozostaje również nieugięta w punkcie kontaktu ze źródłem, co można zapisać:  $u_j^+(\xi, \tau) = 0, j=1,2$ , i  $\tilde{w}_2(\tau) = 0$ . Z kolei bezpośrednio za źródłem zaburzenia propagują się dwie fale o różnych długościach, z których fala „krótsza” przemieszcza się w dodatnim kierunku osi  $x$ , tj. w prawo, a fala „dłuższa” przemieszcza się w kierunku ujemnym osi  $x$ , tzn. w lewo, rys. 4.53, 4.54. W przypadku poruszania się źródła zaburzenia z prędkością nadkrytyczną rozwiązania typu d'Alemberta równań ruchu (4.12) po wprowadzeniu ruchomej współrzędnej przestrzennej  $\xi = \tilde{x} - \tilde{\nu}\tau$  przyjmują następującą postać:

$$u_1(\xi, \tau) = f_1(\tau - \tilde{\nu}\tau - \xi) + g_1(\tau + \tilde{\nu}\tau + \xi) \quad \text{dla } -\tilde{\nu}\tau < \xi < \lambda_1 - \tilde{\nu}\tau, \quad (4.16)$$

$$u_2(\xi, \tau) = f_2\left(\tau - \tilde{\nu}\tau - \xi + \lambda_1\left(1 - \frac{1}{\tilde{\nu}}\right)\right) + g_2\left(\tau + \tilde{\nu}\tau + \xi - \lambda_1\left(1 + \frac{1}{\tilde{\nu}}\right)\right) \quad \text{dla } \lambda_1 - \tilde{\nu}\tau < \xi < \lambda_1 + \lambda_2 - \tilde{\nu}\tau.$$

Wówczas, po podstawieniu (4.16) do (4.13) otrzymywane są następujące równania z przesuniętym argumentem

$$g_2(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \tilde{\nu}\tau \leq \lambda_1 + \lambda_2, \\ -f_2^+(2\lambda_2 - z) & \text{dla } \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\tilde{\nu}} < \tau \leq \lambda_1 + \lambda_2, \\ -f_2(z - 2\lambda_2) & \text{dla } \tau > \lambda_1 + \lambda_2, \end{cases}$$

$$g_1(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } \tilde{\nu}\tau \leq \lambda_1, \\ -f_1^+(2\lambda_1 - z) + f_2\left(z - \lambda_1\left(1 + \frac{1}{\tilde{\nu}}\right)\right) + g_2\left(z - \lambda_1\left(1 + \frac{1}{\tilde{\nu}}\right)\right) & \text{dla } \frac{\lambda_1}{\tilde{\nu}} < \tau \leq \lambda_1, \\ -f_1(z - 2\lambda_1) + f_2\left(z - \lambda_1\left(1 + \frac{1}{\tilde{\nu}}\right)\right) + g_2\left(z - \lambda_1\left(1 + \frac{1}{\tilde{\nu}}\right)\right) & \text{dla } \tau > \lambda_1, \end{cases}$$

$$g_{j'}^-(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\tilde{T}_0(1+\tilde{\nu})} (D_2(1+\tilde{\nu})\tilde{w}'_1(\kappa) + R_2\tilde{w}_1(\kappa)) & \text{dla } \tilde{\nu}\tau \leq \sum_{i=1}^j \lambda_i, \\ 0 & \text{dla } \tilde{\nu}\tau > \sum_{i=1}^j \lambda_i, \end{cases}$$

$$M_1(1+\tilde{\nu})^2 \tilde{w}''_1(\kappa) + D_{12}(1+\tilde{\nu})\tilde{w}'_1(\kappa) + R_{12}\tilde{w}_1(\kappa) = \tilde{F}(\kappa), \quad \text{gdzie } \kappa = \frac{z + \eta\lambda_1\left(1 + \frac{1}{\tilde{\nu}}\right)}{1+\tilde{\nu}},$$

$$f_{j'}^+(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\tilde{T}_0(\tilde{\nu}-1)} (D_2(\tilde{\nu}-1)\tilde{w}'_1(\chi) + R_2\tilde{w}_1(\chi)) & \text{dla } \tilde{\nu}\tau \leq \sum_{i=1}^j \lambda_i, \\ 0 & \text{dla } \tilde{\nu}\tau > \sum_{i=1}^j \lambda_i, \end{cases}$$

$$M_1(\tilde{\nu}-1)^2 \tilde{w}''_1(\chi) + D_{12}(\tilde{\nu}-1)\tilde{w}'_1(\chi) + R_{12}\tilde{w}_1(\chi) = \tilde{F}(\chi), \quad \text{gdzie } \chi = \frac{z + \eta\lambda_1\left(1 - \frac{1}{\tilde{\nu}}\right)}{\tilde{\nu}-1},$$

przy  $j=1$ ,  $\eta=0$  dla  $0 < \tilde{\nu}\tau < \lambda_1$  i  $j=2$ ,  $\eta=1$  dla  $\lambda_1 < \tilde{\nu}\tau < \lambda_1 + \lambda_2$ ,

$$f_1(z) = -g_1(z), \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} M_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_0\left(z + \frac{\lambda_1}{\tilde{\nu}}\right) \\ f_2''(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{12} & -C_2 \\ -C_2 & 2T + C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_0\left(z + \frac{\lambda_1}{\tilde{\nu}}\right) \\ f_2'(z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{12} & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{w}_0\left(z + \frac{\lambda_1}{\tilde{\nu}}\right) \\ f_2(z) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} C_2 g_2'(z) + K_2 g_2(z) \\ \mathfrak{R} - C_2 g_2'(z) - K_2 g_2(z) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } \mathfrak{R} = \begin{cases} 0 & \text{dla } \tilde{v}\tau \leq \lambda_1, \\ -2Tf_1' + (\lambda_1(1 - \frac{1}{\tilde{v}}) - z) & \text{dla } \frac{\lambda_1}{\tilde{v}} < \tau \leq \lambda_1, \\ +2Tf_1'(z - \lambda_1(1 - \frac{1}{\tilde{v}})) & \text{dla } \tau > \lambda_1, \end{cases}$$

które są rozwiązywane identycznie jak (4.15) w celu uzyskania odpowiedzi dynamicznej układu w formie ugięć dowolnie wybranych przekrojów poprzecznych struny, przemieszczeń mas skupionych czy siły kontaktowej między struną a oscylatorem.

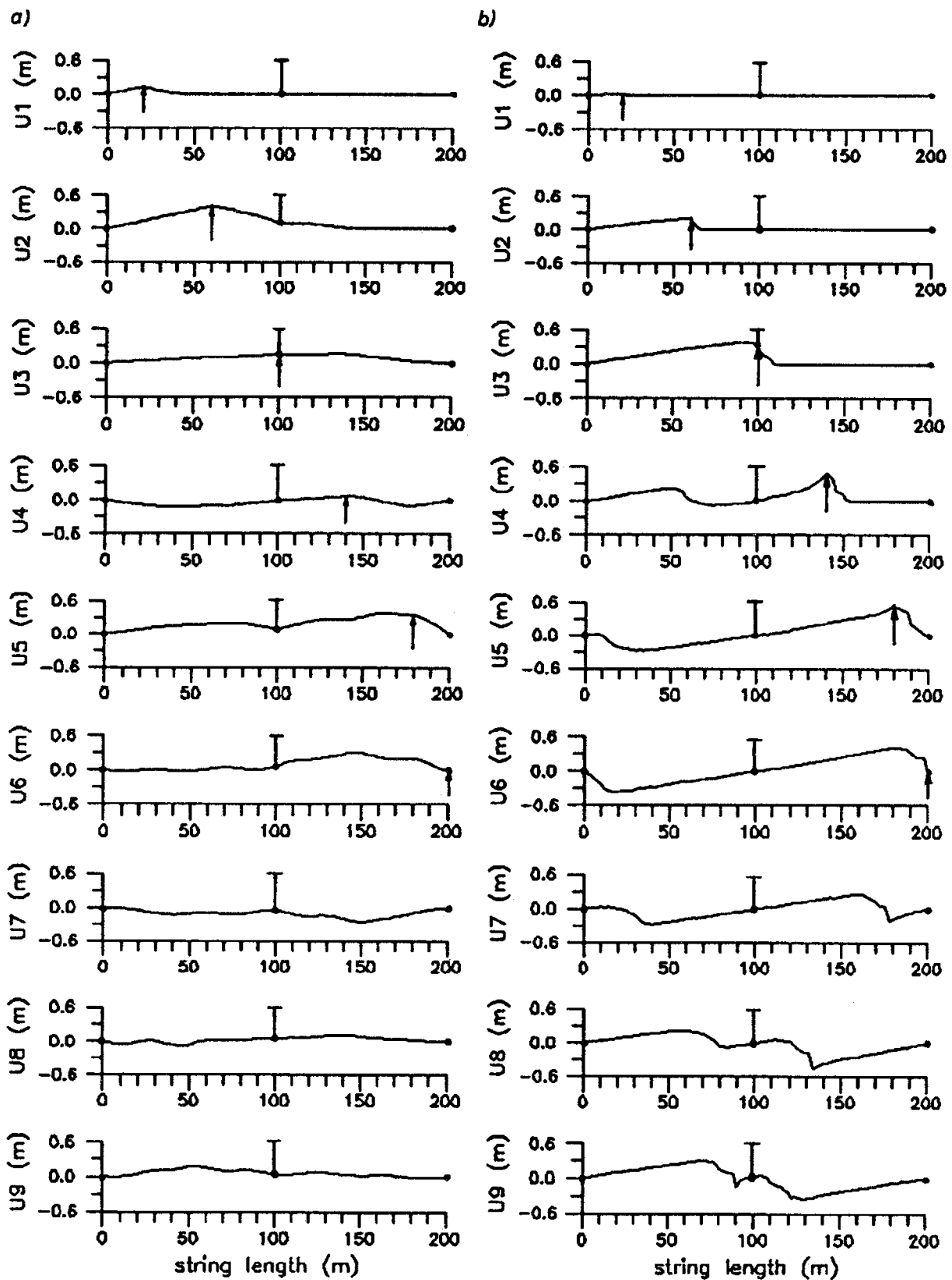
Zależności (4.13), (4.15) i (4.17) zostały wyprowadzone w przypadku bardziej ogólnym wymuszania drgań poprzecznych struny ruchem oscylatora, jak pokazano na rysunku 4.53. Kiedy rozpatrywana struna ulega wymuszeniu ruchem siły skupionej, równania te ulegają odpowiednim uproszczeniom przez przyłożenie siły  $F(t)$  bezpośrednio do struny oraz przyjmując  $m_1=m_2=0$ ,  $r_1=r_2=0$  i  $d_1=d_2=0$ .

Obliczenia numeryczne przeprowadzono przy identycznych parametrach rozpatrywanego obiektu jak w pracy [105], tj. dla struny o długościach  $l_1=l_2=100$  m,  $T_0=10000$  N,  $\mu=0.89$  kg/m i w przypadku wzbudzenia drgań ruchem oscylatora dla stałej siły  $F(t)=F_0=90$  N przy pominięciu zewnętrznego wymuszenia kinematycznego  $w_0(t)=0$ . Pozostałe parametry liczbowe podano w [28, 32, 175]. Rysunki 4.55 a i b, 4.56 a i b, 4.57 a i b oraz 4.58 a i b przedstawiają wyniki symulacji dynamicznego oddziaływania ruchomego oscylatora ze struną. Na rysunkach 4.55 a i b oraz 4.57 a i b zamieszczono wykresy linii ugięcia struny w kolejnych dziewięciu równo odległych od siebie chwilach czasu, gdzie chwile 1÷6 odpowiadają sześciu położeniom przemieszczającego się wzdłuż struny oscylatora, a chwile 7÷9 odpowiadają drganiom swobodnym struny po zjechaniu zeń oscylatora. Na rysunku 4.55a pokazano wyniki symulacji dla prędkości ruchu oscylatora  $\tilde{v} = 0.4$ , a na rysunku 4.55b dla  $\tilde{v} = 0.95$  prędkości krytycznej. Z kolei wyniki przedstawione na rysunkach 4.57 a i b uzyskano przy nadkrytycznych prędkościach ruchu oscylatora, tj. odpowiednio dla  $\tilde{v} = 1.1$  i  $\tilde{v} = 1.6$ . Na podstawie wykresów linii ugięcia zamieszczonych na wymienionych rysunkach można obserwować generowanie fal poprzecznych w strunie przez ruchomy oscylator oraz odbicia fal od podpór. Natomiast rysunek 4.56a dla  $\tilde{v} = 0.4$  oraz rysunek 4.56b dla  $\tilde{v} = 0.95$  pokazują przebiegi ugięcia struny i dynamicznej siły kontaktowej między struną a oscylatorem w punkcie ich chwilowego kontaktu. Te przebiegi są zaprezentowane w dziedzinie długości struny, co przy stałej prędkości  $v$  ruchu oscylatora odpowiada dziedzinie czasu. Ponieważ, jak zaznaczono powyżej, przy nadkrytycznych prędkościach ruchu źródła wymuszenia ugięcie struny w punkcie chwilowego kontaktu ze źródłem jest równe zeru, na rysunkach 4.58 a i b odpowiednio dla  $\tilde{v} = 1.1$  i  $\tilde{v} = 1.6$  prędkości krytycznej zamieszczono jedynie wykresy dynamicznej siły kontaktowej między struną a oscylatorem w punkcie ich chwilowego kontaktu.

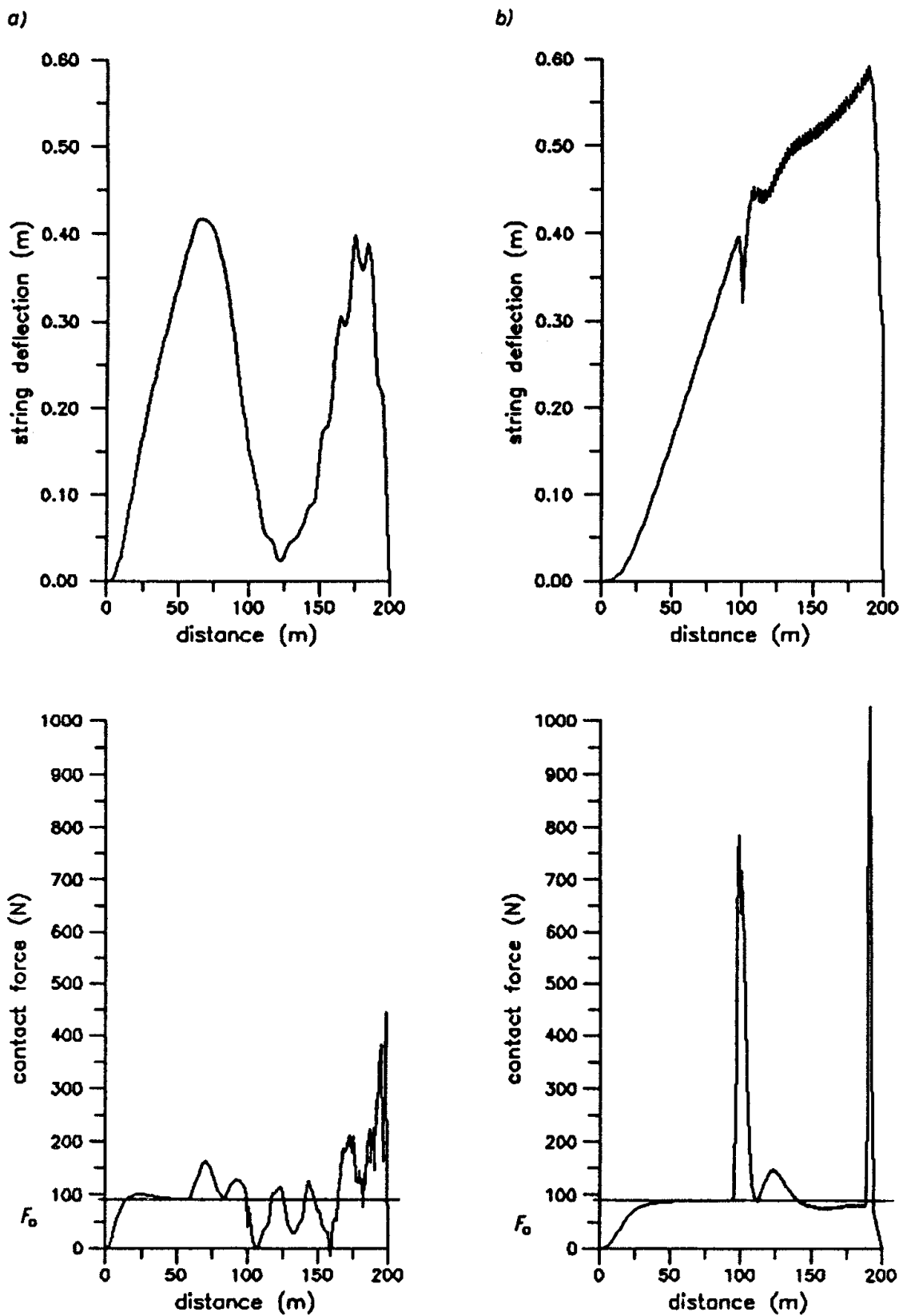
W przypadku podkrytycznych prędkości ruchu oscylatora, tj. dla  $\tilde{v} = 0.4$  i  $\tilde{v} = 0.95$ , na początku procesu, gdy oscylator nie dotarł jeszcze do podpory podatnej, tzn. przy  $vt < 100$  m, odpowiedź układu ma charakter quasi-statyczny, gdzie stopniowo narasta ugięcie struny w punkcie kontaktu z oscylatorem, a siła kontaktowa dąży do wartości stałej równej zadanej sile obciążenia  $F_0=90$  N. Proces ten zostaje następnie zaburzony falami odbitymi od kolejnych podpór, szczególnie przy mniejszej prędkości ruchu  $\tilde{v} = 0.4$ , w przeciwieństwie do przypadku  $\tilde{v} = 0.95$ , w którym fale odbite docierają do oscylatora dopiero w ostatniej chwili przed jego najazdem na podporę. Wtedy przejazdowi oscylatora przez podpory z prędkością  $\tilde{v} = 0.95$  bliską krytycznej towarzyszą znacznie większe wartości chwilowe siły kontaktowej niż dla  $\tilde{v} = 0.4$  oraz większe lokalne gradienty i wartości ekstremalne ugięcia struny, co widać na podstawie odpowiednich wykresów przedstawionych na rysunkach 4.55 a i b oraz 4.56 a i b.



Wyniki pokazane na rysunkach 4.56 a i b zostały porównane w [32] z uzyskanymi w pracy [105] analogicznymi wynikami symulacji dynamicznego oddziaływania rozpatrywanego identycznego ruchomego oscylatora z taką samą struną zdyskretyzowaną metodą elementów



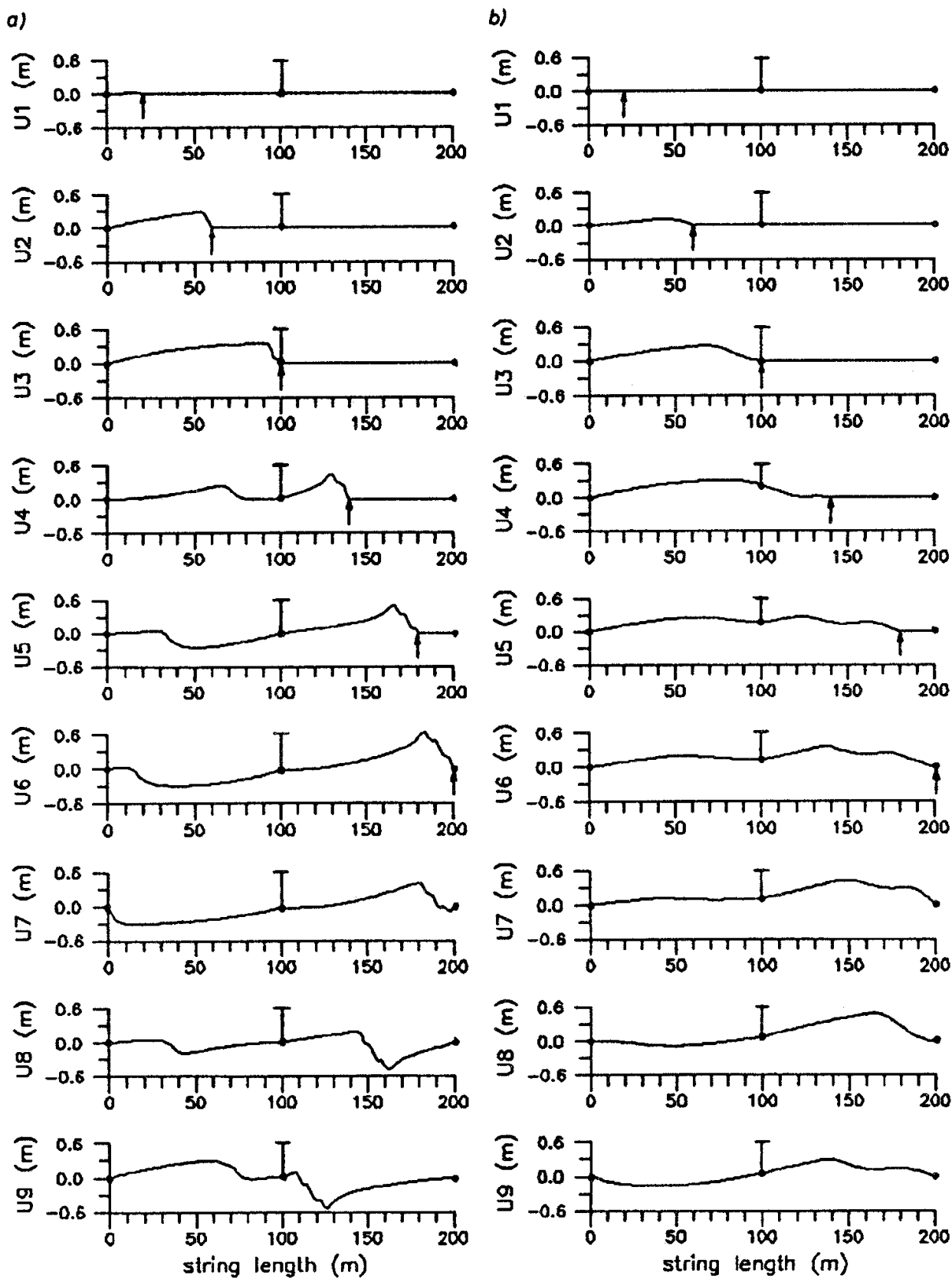
Rys. 4.55 Linie ugięcia struny w kolejnych chwilach czasu przy prędkości ruchu oscylatora  $\tilde{v} = 0.4$  (a) i  $\tilde{v} = 0.95$  (b)



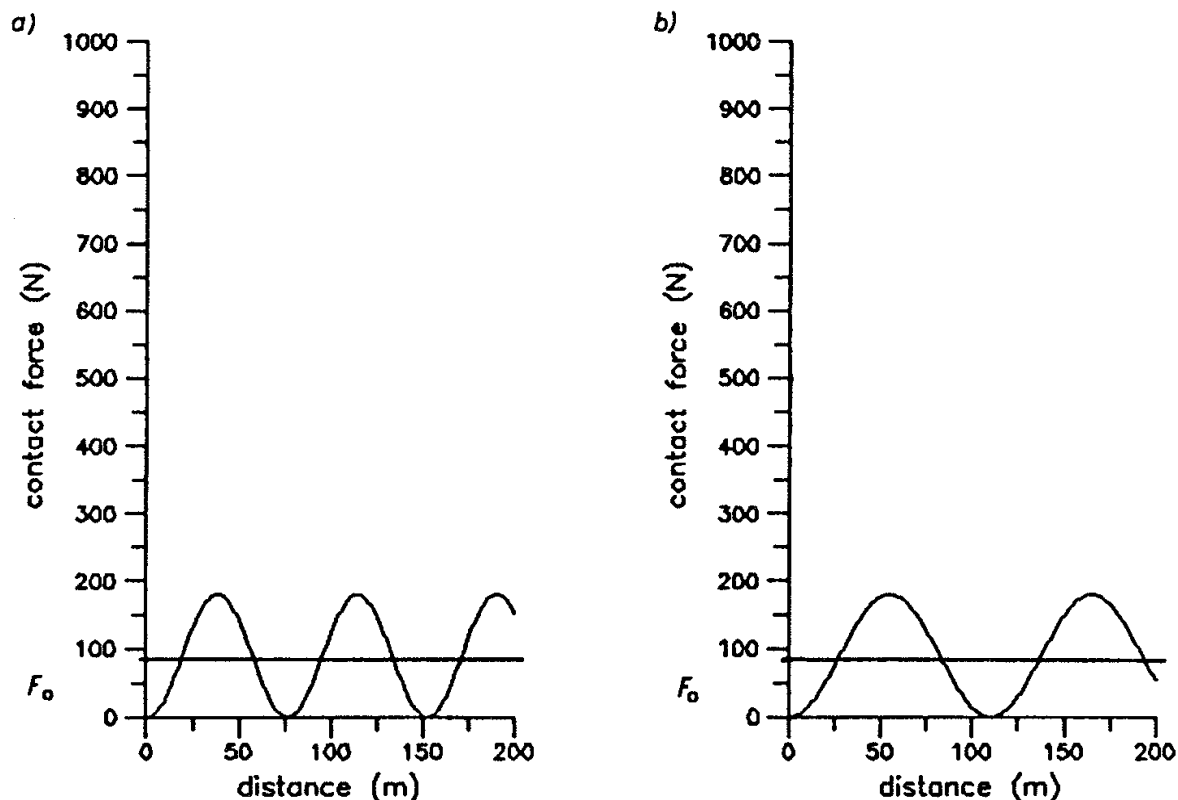
Rys. 4.56 Ugięcie struny i dynamiczna siła kontaktowa w punkcie chwilowego kontaktu z oscylatorem przy prędkości ruchu oscylatora  $\tilde{v} = 0.4$  (a) i  $\tilde{v} = 0.95$  (b)

skończonych. Wykorzystując różne modele mechaniczne i matematyczne w obydwu przypadkach prędkości ruchu oscylatora  $\tilde{v} = 0.4$  i  $\tilde{v} = 0.95$  otrzymano podobne jakościowo wyniki przebiegów ugięć struny i dynamicznej siły kontaktowej między oscylatorem a struną. Zaistniały jednak istotne różnice ilościowe dotyczące jedynie wartości ekstremalnych mieszcząc się w zakresie 20÷60%, przy czym górna granica odpowiada prędkości ruchu oscylatora  $\tilde{v} = 0.95$ . Przy tej prędkości za pomocą modelu dyskretno-ciągłego i rozwiązania falowego typu d'Alemberta uzyskano szczególnie duże lokalne gradienty siły kontaktowej w formie „pików”. Analogiczne „piki” otrzymane w pracy [105] wydają się być wygładzone w porównaniu z „pikami” pokazanymi na rysunkach 4.56 a i b. Przyczyną zaistniałych różnic może być słaba zbieżność rozwiązania w przypadku modelu MES przy wykorzystaniu w [105] superpozycji nawet 200 funkcji własnych badanego układu. Na podstawie przeprowadzonego porównania należy wnioskować, iż zastosowanie przy tych samych parametrach wyjściowych rozpatrywanego obiektu dwóch strunowych L-SMC oraz analitycznego rozwiązania falowego typu d'Alemberta równań ruchu daje dokładniejsze wyniki symulacji drgań niż nawet „gęsta” dyskretyzacja struny metodą elementów skończonych.

Analiza dynamicznego oddziaływania struny z oscylatorem poruszającym się z prędkościami nadkrytycznymi  $\tilde{v} > 1$  nie ma specjalnego znaczenia aplikacyjnego, lecz została przeprowadzona w aspekcie czysto teoretycznym w celu zademonstrowania możliwości sposobu modelowania dyskretno-ciągłego przy wykorzystaniu strunowych L-SMC i rozwiązania falowego typu d'Alemberta. W tym przypadku obliczenia numeryczne przeprowadzono przy zerowej masie oscylatora  $m_2$  będącej w kontakcie ze struną oraz przy pominięciu tłumienia w oscylatorze, tj. dla  $d_1=d_2=0$ . Pozostałe parametry badanego układu pozostały bez zmian w porównaniu do wartości przyjętych do analizy drgań wywoływanych ruchem oscylatora z prędkościami podkrytycznymi. Z wykresów linii ugięcia struny w kolejnych chwilach czasu pokazanych na rysunku 4.57 a i b wynika, że ze względu na brak ugięcia struny przed poruszającym się źródłem zaburzenia nie występują odbicia fal od podpory podatnej ani od prawej podpory sztywnej przed dotarciem do nich oscylatora. Podobnie jak w rozpatrywanych poprzednio przypadkach podkrytycznych prędkości ruchu źródła, większe wartości ugięć struny oraz lokalnych gradientów tych ugięć wystąpiły przy prędkości ruchu oscylatora  $\tilde{v} = 1.1$ , która jest bliższa prędkości krytycznej  $\tilde{v} = 1$ , niż przy prędkości jeszcze większej, tj.  $\tilde{v} = 1.6$ , jak pokazano na rysunku 4.57 a i b. Natomiast przedstawione na rysunku 4.58 a i b przebiegi dynamicznej siły kontaktowej między struną a oscylatorem odpowiednio przy prędkości  $\tilde{v} = 1.1$  i  $\tilde{v} = 1.6$  mają zupełnie inny charakter niż analogiczne przebiegi uzyskane przy prędkościach podkrytycznych i pokazane na rysunku 4.56 a i b. Ponieważ jak wspomniano powyżej, przy prędkościach nadkrytycznych  $\tilde{v} > 1$  nie występują ugięcia struny w punkcie jej chwilowego kontaktu z ruchomym źródłem zaburzenia, wartość siły kontaktowej jest funkcją przemieszczeń masy  $m_1$  oscylatora. Wówczas, ruch tej masy sprowadza się do drgań układu o jednym stopniu swobody wymuszonych stałą siłą  $F(t)=F_0=90$  N. Przy pominięciu w tym przypadku tłumienia oscylatora ( $d_1=d_2=0$ ) drgania te mają przebieg harmoniczny o wartości średniej równej  $F_0$  i stałej amplitudzie także równej  $F_0$ , co potwierdza podstawową teorię drgań mechanicznych opisaną na przykład w [74]. Rzecz jasna, częstotliwość przebiegów siły kontaktowej w obu przypadkach prędkości ruchu źródła zaburzenia  $\tilde{v}$  jest taka sama zależąc jedynie od własności bezwładnościowo-sprężystych oscylatora. Natomiast liczba wykonanych cykli drgań jest tym większa im dłuższy czas poruszania się oscylatora wzdłuż struny. Przykładowo, przy  $\tilde{v} = 1.1$  można zaobserwować 2.6 cykli fluktuacji siły kontaktowej, a przy  $\tilde{v} = 1.6$  - tylko 1.8 cyklu, jak pokazują to odpowiednie wykresy na rysunku 4.58 a i b.



Rys. 4.57 Linie ugięcia struny w kolejnych chwilach czasu przy prędkości ruchu oscylatora  $\tilde{\nu} = 1.1$  (a) i  $\tilde{\nu} = 1.6$  (b)



Rys. 4.58 Dynamiczna siła kontaktowa w punkcie chwilowego kontaktu z oscylatorem przy prędkości ruchu oscylatora  $\tilde{v} = 0.4$  (a) i  $\tilde{v} = 0.95$  (b)

Analizę drgań poprzecznych omawianej struny wymuszanych poruszającą się stałą i harmonicznie zmienną siłą skupioną przeprowadzono zarówno dla pod- i nadkrytycznych wartości prędkości ruchu  $\tilde{v}$ . Celem wykonanych obliczeń było porównanie wyników zastosowania rozwiązania falowego typu d'Alemberta równań ruchu przekrojów poprzecznych makroelementów strunowych z analogicznymi wynikami uzyskanymi przy wykorzystaniu rozwiązania tych równań metodą Fouriera w postaci nieskończonych szeregów rozwinięć względem funkcji własnych badanego układu mechanicznego. Ponieważ zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera zostanie opisane w następnym rozdziale, w nim też będą przedstawione wyniki symulacji drgań struny pokazanej na rysunku 4.54 przy wykorzystaniu rozwiązania falowego typu d'Alemberta.

## 5. Zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera

W porównaniu z omawianym w poprzednim rozdziale rozwiązaniem falowym typu d'Alemberta, rozwiązanie metodą Fouriera ma znacznie szersze zastosowanie i nie ogranicza się do makroelementów sprężystych z oddziaływaniem tłumienia materiałowego spowodowanego do przekrojów skrajnych, lecz umożliwia uwzględnianie tłumienia materiałowego rozłożonego w sposób ciągły wzdłuż makroelementu przy przyjęciu  $\tau \neq 0$  i  $e \neq 0$  w równaniach ruchu (2.1)÷(2.6) przekrojów poprzecznych L-SMC. Rozwiązanie metodą Fouriera można stosować do wszystkich zdefiniowanych w rozdziale 2 makroelementów, tak by za jego pomocą móc badać wymuszone drgania skrętne wałów i osi, drgania poprzeczne układów strunowych, drgania giętne i giętno-skrętne belek, osi i wałów, drgania wzdłużne prętów i inne.

### 5.1 Zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera do badania układów strunowych drgających poprzecznie

Rozwiązanie metodą Fouriera do analizy drgań poprzecznych układu strunowego zastosowano w pracach [28, 175] w celu porównania otrzymanych wyników z analogicznymi wynikami uzyskanymi przy wykorzystaniu rozwiązania falowego typu d'Alemberta, o czym wspomniano w punkcie 4.2. Przedmiotem rozważań jest pokazana na rysunku 4.54 jednorodna struna sprężysta sztywno zawieszona na obu końcach i podparta dodatkowo w połowie długości za pomocą jednomasowego oscylatora o własnościach lepko-sprężystych. Drgania poprzeczne struny są wymuszane przez stałą i harmoniczną zmienną w czasie siłę skupioną  $P(t)$  poruszającą się wzdłuż struny ze stałą prędkością  $v$ , jak założono w punkcie 4.2. Równaniami ruchu przekrojów poprzecznych dwóch L-SMC reprezentujących oba odcinki struny, tj. między lewą podporą sztywną a podporą podatną oraz między podporą podatną a prawą podporą sztywną, są w tym przypadku niejednorodne równania różniczkowe cząstkowe (2.1), w których do celów porównawczych również pominięto tłumienie materiałowe przyjmując  $\tau=0$ . Z kolei, analogicznie jak w [74], w przypadku drgań giętnych belki, obciążenie pochodzące od ruchomej siły skupionej  $P(t)$  potraktowano jako obciążenie ruchome równomiernie rozłożone w sposób ciągły na nieskończenie małej długości  $\varepsilon$ , co można zapisać

$$q_i(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } 0 < x < vt - \varepsilon, \\ \frac{P(t)}{\varepsilon} & \text{dla } vt - \varepsilon < x < vt, \\ 0 & \text{dla } vt < x < l. \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (5.1)$$

Zgodnie z założeniami przyjętymi w punkcie 4.2, równania ruchu rozwiązywano z zerowymi warunkami początkowymi oraz z warunkami brzegowymi analogicznymi do (4.13), które przy nieruchomej współrzędnej przestrzennej  $x$ , pominięciu tłumienia w podporze podatnej, tzn. dla  $c_1=c_2=0$ , oraz w przypadku wymuszania drgań ruchomą siłą skupioną upraszczają się do następującej postaci

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= 0 & \text{dla } x = 0, \\ m_0 \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + (k_1 + k_2)w(t) - k_2 u_2(x,t) &= 0, \\ -k_2 w(t) + k_2 u_2(x,t) + T_0 \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} - T_0 \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x} &= 0, \\ u_1(x,t) &= u_2(x,t) & \text{dla } x = l_1 \\ u_2(x,t) &= 0 & \text{dla } x = l, \end{aligned} \quad (5.2)$$

gdzie wszystkie oznaczenia pozostały niezmienione. Zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera do symulacji drgań wymuszonych musi być poprzedzone analizą drgań własnych nietłumionych badanego układu. Przy wykorzystaniu metody rozdzielania zmiennych w postaci (3.7) oraz lokalnych funkcji własnych makroelementów strunowych (3.9), otrzymano równanie charakterystyczne typu (3.21). Ze względu na prostotę badanego układu warunek zerowania się wyznacznika macierzy charakterystycznej można zapisać w następującej postaci:

$$k_2 \sin\left(\frac{\omega l_1}{a}\right) \sin\left(\frac{\omega l_2}{a}\right) (k_1 - m\omega^2) + T_0 \frac{\omega}{a} (k_1 + k_2 - m\omega^2) \sin\left(\frac{\omega l}{a}\right) = 0, \quad (5.3)$$

gdzie  $\omega$  oznacza szukane częstości drgań własnych struny pokazanej na rysunku 4.54. Obliczenie na podstawie (5.3) kolejnych częstości  $\omega_m, m=1,2,\dots$ , pozwoliło na wyznaczenie odpowiadających im globalnych funkcji własnych  $U_{im}(x), i=1,2$ . Wykorzystując (3.25) dokonano następnie transformacji ruchomego obciążenia zewnętrznego  $q_i(x,t)$  do ortogonalnej bazy funkcji własnych  $U_{im}(x)$ . Wówczas, w przypadku granicznym  $\varepsilon \rightarrow 0$  obciążenie to przyjmuje postać

$$Q_m(t) = \begin{cases} \frac{P(t)}{\gamma_m^2} U_{1m}(vt) = \frac{P(t)}{\gamma_m^2} \sin\left(\frac{\omega_m v t}{a}\right) & \text{dla } 0 \leq vt \leq l_1, \\ \frac{P(t)}{\gamma_m^2} U_{2m}(vt) = \frac{P(t)}{\gamma_m^2} \left[ \sin\left(\frac{\omega_m v t}{a}\right) + A_m \sin\left(\frac{\omega_m}{a}(vt - l_1)\right) \right] & \text{dla } l_1 \leq vt \leq l, \\ 0 & \text{dla } vt > l, \end{cases} \quad (5.4)$$

gdzie  $\gamma_m^2$  są masami modalnymi a  $A_m, m=1,2,\dots$ , wyznaczanymi z warunków brzegowych (5.2) stałymi współczynnikami w wyrażeniu (3.9) opisującym lokalne funkcje własne.

Otrzymane w wyniku zastosowania opisanej w punkcie 3.2.2 procedury opartej na rozwiązaniu metodą Fouriera do analizy drgań wymuszonych równanie różniczkowe zwyczajne typu (3.26) dla nieznanych modalnych funkcji czasu  $\xi_m(t)$  charakteryzuje się w omawianym przypadku zerową macierzą tłumieniowo-żyroskopową  $\mathbf{C}$  oraz stałymi i diagonalnymi macierzami bezwładności  $\mathbf{M}$  i sztywności  $\mathbf{K}$ . Stąd, każde z rozprzężonych równań różniczkowych układu typu (3.26) ma rozwiązanie analityczne w postaci całki Cauchy-Duhamela odpowiadające  $m$ -tej modalnej funkcji czasu  $\xi_m(t)$ :

$$\xi_m(t) = \frac{1}{\mu \omega_m} \int_0^t Q_m(\tau) \sin(\omega_m(t - \tau)) d\tau, \quad m=1,2,\dots, \quad \omega_m \neq 0. \quad (5.5)$$

Przy zadanej funkcji wymuszenia  $P(t)$  wykorzystując (5.4) i ogólną postać rozwiązania metodą Fouriera (3.23) można wyznaczyć analityczne rozwiązanie omawianego problemu ugięcia struny w określonym jej przekroju poprzecznym i w dowolnej chwili czasu. W przypadku stałej ruchomej siły skupionej  $P(t)=P_0=\text{const}$  rozwiązanie to przyjmuje następującą postać, które odpowiadają kolejnym dwóm fazom położenia obciążenia na strunie oraz po zejściu obciążenia ze struny:

$$u_i(x,t) = \frac{P_0 a^2}{\mu(a^2 - v^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m^2 \omega_m^2} \left[ \sin\left(\frac{\omega_m v t}{a}\right) - \frac{v}{a} \sin(\omega_m t) \right] U_{im}(x) \quad \text{dla } 0 \leq vt \leq l_1, \\ u_i(x,t) = \frac{P_0 a^2}{\mu(a^2 - v^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m^2 \omega_m^2} \left\{ \sin\left(\frac{\omega_m v t}{a}\right) - \frac{v}{a} \sin(\omega_m t) + \right. \\ \left. + A_m \left[ \sin\left(\frac{\omega_m v}{a} \left(t - \frac{l_1}{v}\right)\right) - \frac{v}{a} \sin\left(\omega_m \left(t - \frac{l_1}{v}\right)\right) \right] \right\} U_{im}(x) \quad \text{dla } l_1 \leq vt \leq l, \quad (5.6)$$

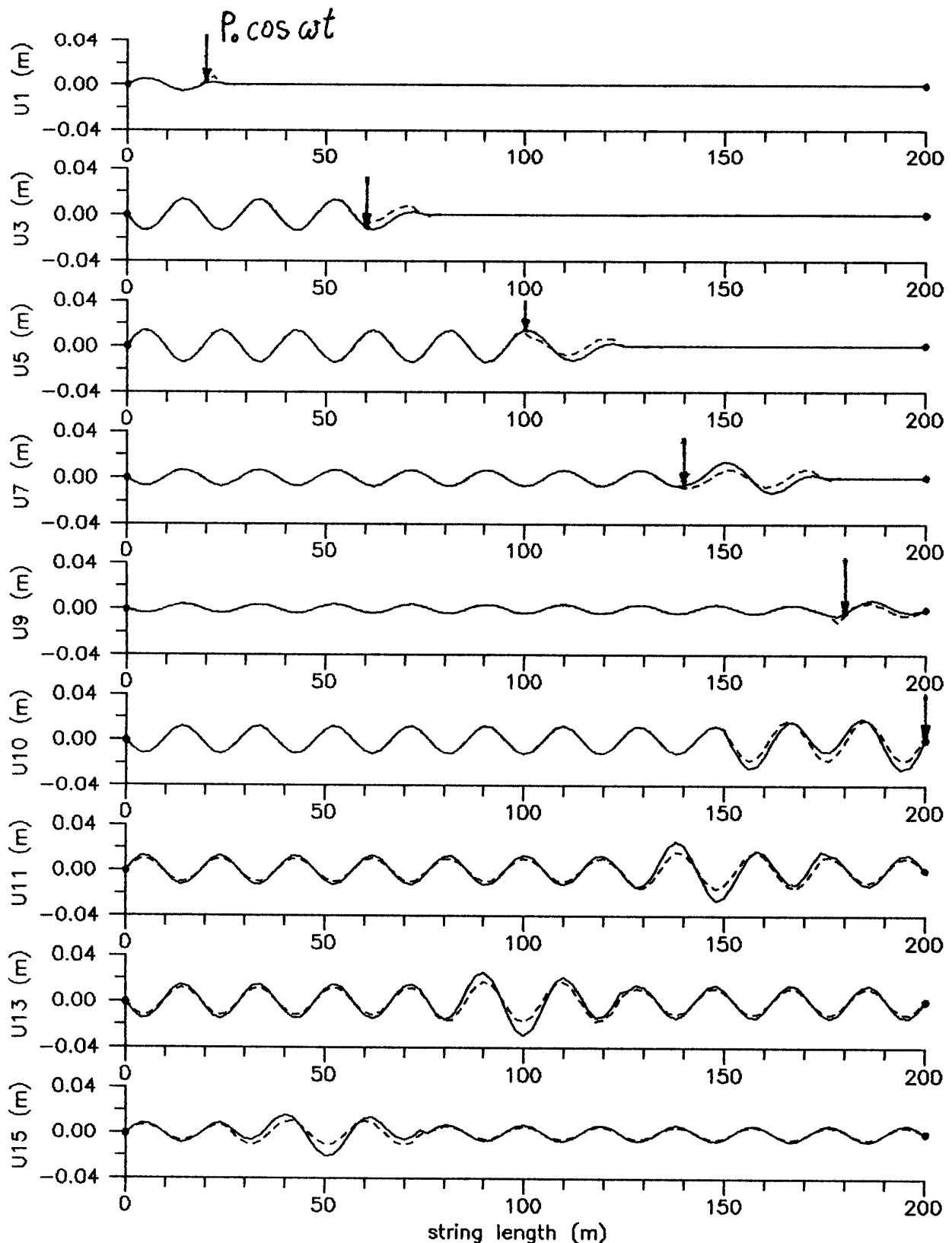
$$\begin{aligned}
u_i(x,t) = & \frac{P_0 a^2}{\mu(a^2 - v^2)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_m^2 \omega_m^2} \left\{ \sin\left(\frac{\omega_m l}{a}\right) \cos\left(\omega_m \left(t - \frac{l}{v}\right)\right) - \right. \\
& - \frac{v}{a} \left[ \cos\left(\frac{\omega_m l}{a}\right) \sin\left(\omega_m \left(t - \frac{l}{v}\right)\right) - \sin(\omega_m t) \right] + A_m \left[ \sin\left(\frac{\omega_m l_2}{a}\right) \cos\left(\omega_m \left(t - \frac{l}{v}\right)\right) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{v}{a} \left[ \cos\left(\frac{\omega_m l_2}{a}\right) \sin\left(\omega_m \left(t - \frac{l}{v}\right)\right) - \sin\left(\omega_m \left(t - \frac{l_1}{v}\right)\right) \right] \right] \right\} U_{im}(x) \text{ dla } vt > l, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

Analogiczne rozwiązania analityczne w postaci szeregów rozwinięć względem funkcji własnych można znaleźć w [74] w przypadku drgań poprzecznych jednorodnej ciągłej dwupodporowej belki Bernoulliego-Eulera obciążonej ruchomą siłą skupioną.

Obliczenia porównawcze poprzecznych drgań struny wymuszanych ruchomą siłą skupioną przeprowadzono przy tych samych wartościach parametrów liczbowych jak w punkcie 4.2. Porównanie dynamicznych linii ugięcia struny uzyskanych za pomocą rozwiązania falowego typu d'Alemberta oraz przy wykorzystaniu metody Fouriera wykazało, że przy pominięciu podpory podatnej, tj. dla  $k_1=k_2=0$ ,  $c_1=c_2=0$  i  $m_0=0$ , oraz przy stałej sile wymuszającej  $P(t)=P_0=\text{const}$  w przypadkach pod- ( $\tilde{v} < 1$ ) i nadkrytycznych ( $\tilde{v} > 1$ ) prędkości ruchu siły otrzymano niemal identyczne wyniki już przy stosunkowo małej liczbie wyrazów szeregów (5.6)  $m \geq 20$ . Natomiast przy sile  $P(t)$  harmonicznie zmiennej, zarówno w przypadku prędkości podkrytycznych, jak i nadkrytycznych, zaobserwowano pewne różnice wyników uzyskanych za pomocą obu porównywanych metod. Przy poruszającej się z prędkością  $\tilde{v} = 0.8$  wartości krytycznej sile harmonicznie zmiennej z częstotliwością odpowiadającą 20 pełnym cyklom podczas przejazdu dystansu  $l=200$  m równego długości rozpatrywanej struny rysunek 5.1 pokazuje przykładowe wykresy linii ugięcia struny w kolejnych dziewięciu równo odległych od siebie chwilach czasu, gdzie chwile  $1 \div 6$ , tj. U1, U3, U5, U7, U9, U10, odpowiadają sześciu położeniom przemieszczającej się wzdłuż struny siły, a chwile  $7 \div 9$ , tj. U11, U13, U15, odpowiadają drganiom swobodnym struny po zjechaniu zeń źródła zaburzenia. Na rysunku 5.1 liniami ciągłymi oznaczono ugięcia uzyskane za pomocą rozwiązania falowego typu d'Alemberta, a liniami przerywanymi ugięcia otrzymane przy wykorzystaniu rozwiązania metodą Fouriera. W tym przypadku w celu uzyskania najlepszego podobieństwa wyników w stosunku do rezultatów otrzymanych przy wykorzystaniu rozwiązania falowego typu d'Alemberta należało uwzględnić przynajmniej  $m=50 \div 100$  wyrazów szeregu rozwiązania metodą Fouriera. Obserwując wykresy linii ugięcia struny uzyskanych za pomocą obu metod, należy stwierdzić pokrywanie się wyników odpowiadających fali dłuższej propagującej się za źródłem oraz pewne różnice wyników odpowiadających fali krótszej propagującej się przed źródłem, gdzie w przypadku rozwiązania metodą Fouriera zauważa się charakterystyczne „wygładzenie” nagłych zmian gradientów ugięcia struny w porównaniu z analogicznymi zmianami gradientów ugięcia otrzymanymi za pomocą rozwiązania falowego typu d'Alemberta.

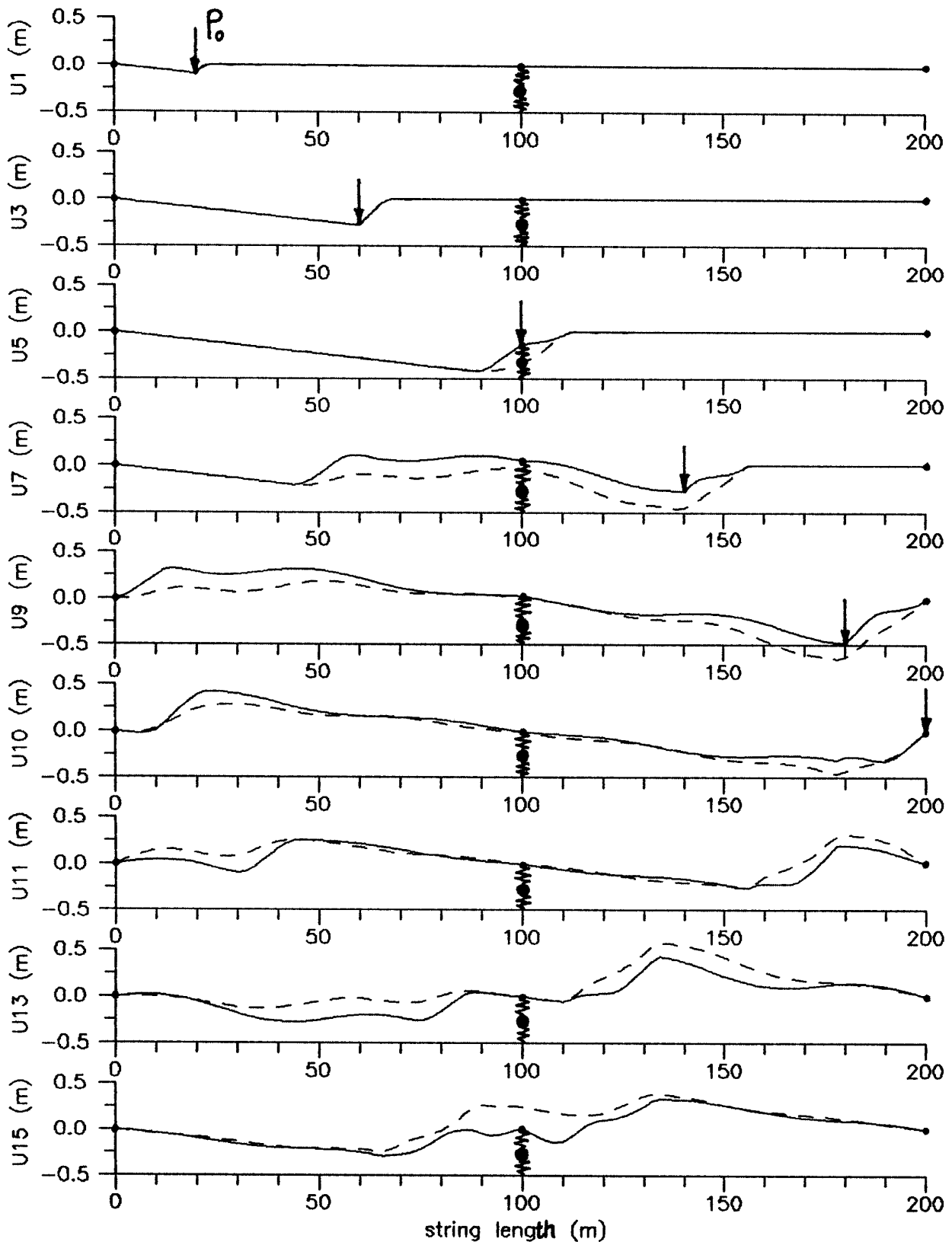
Przy istniejącej sprężystej podporze podatnej, tj. dla  $k_1 \neq 0$ ,  $k_2 \neq 0$ ,  $m_0 \neq 0$ , i  $c_1=c_2=0$  wyniki uzyskane za pomocą obu metod są podobne przy prędkości ruchu siły w granicach  $0 < \tilde{v} < 0.4$  i zaczynają się stopniowo różnić w miarę zbliżania się do prędkości krytycznej  $\tilde{v} \rightarrow 1$ . Analogicznie jak w przypadku poprzednim, w kolejnych dziewięciu równo odległych od siebie chwilach czasu rysunek 5.2 pokazuje linie ugięcia struny wywołane stałą siłą  $P(t)=P_0=\text{const}$  poruszającą się z prędkością  $\tilde{v} = 0.9$  wartości krytycznej. Widoczne na tym rysunku różnice linii ugięcia struny otrzymanych za pomocą rozwiązania falowego typu d'Alemberta (linia ciągła) oraz za pomocą rozwiązania metodą Fouriera (linia przerywana) sprawiają wrażenie różnic jakościowych zarówno w odniesieniu do fal generowanych bezpośrednio przez poruszającą się siłę, jak i w odniesieniu do





Rys. 5.1 Linie ugięcia struny w kolejnych chwilach czasu przy prędkości ruchu harmonicznie zmiennej siły skupionej  $\tilde{v} = 0.8$  uzyskane za pomocą rozwiązania typu d'Alemberta (—) i metodą Fouriera (---)

fal odbitych od podpór. Z porównania odpowiadających sobie wykresów przedstawionych na rysunkach 5.1 i 5.2 wynika, że w obu przypadkach prędkości bliskich prędkości krytycznej linie ugięcia struny uzyskane za pomocą rozwiązania falowego typu d'Alemberta mają charakter



Rys. 5.2 Linie ugięcia struny w kolejnych chwilach czasu przy prędkości ruchu stałej siły skupionej  $\tilde{v} = 0.9$  uzyskane za pomocą rozwiązania typu d'Alemberta (—) i metodą Fouriera (---)

typowych fal bieżących, co szczególnie widać po zejściu źródła obciążenia ze struny, tj. w chwilach 7÷9 (U11, U13, U15). Natomiast linie ugięcia otrzymane przy wykorzystaniu rozwiązania Fouriera stanowią superpozycję skończonej liczby  $m$  fal stojących. Wykorzystując udowodnioną

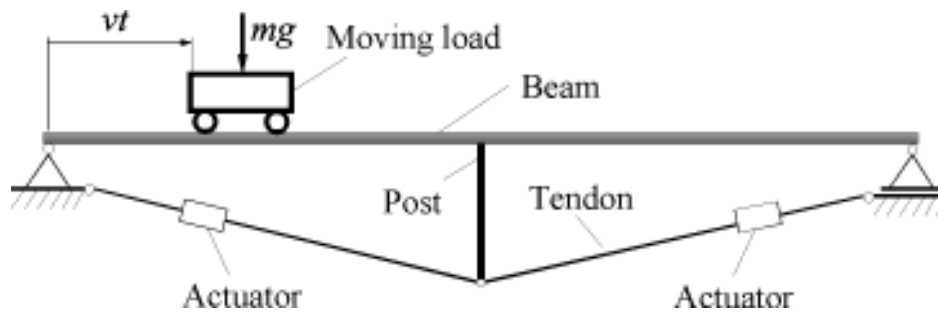
matematycznie zbieżność rozwiązania analitycznego metodą Fouriera uzyskuje się stopniowo coraz dokładniejsze wyniki w miarę zwiększania liczby wyrazów szeregu (3.23) lub (5.6), tzn. zwiększając liczbę uwzględnionych analitycznych i ortogonalnych funkcji własnych badanego obiektu. Ograniczenie dokładności wyników rozwiązania mogą tu stanowić jedynie błędy arytmetyczne popełniane podczas superponowania coraz większej liczby wyrazów szeregów (3.23) lub (5.6) przejawiające się głównie „wygładzaniem pików” ugięć odpowiadających im szczególnie dużym zmianom lokalnych gradientów. Należy zauważyć, że w przypadku zastosowania do rozpatrywanego układu mechanicznego metody przybliżonej, jaką w istocie jest metoda elementów skończonych, poszukiwanie rozwiązania we współrzędnych głównych sprowadzające się również do superponowania skończonej liczby fal stojących napotyka na znane trudności związane z częstą słabą zbieżnością takiego rozwiązania w miarę zwiększania liczby uwzględnianych funkcji własnych, co zauważono w pracy [105]. Natomiast wykorzystując do analizy drgań omawianego układu inną typowo numeryczną metodę przybliżoną, tj. metodę elementów czasoprzestrzennych, w pracy [6] przy odpowiednio „gęstej” dyskretyzacji struny obciążonej ruchomą stałą i harmonicznym zmienną siłą otrzymano bardzo zbliżone linie ugięcia do analogicznych wyników uzyskanych za pomocą rozwiązania metodą Fouriera.

Reasumując należy stwierdzić, iż w przypadku drgań poprzecznych struny wyniki uzyskane przy wykorzystaniu rozwiązania falowego typu d'Alemberta wydają się być dokładniejsze niż rezultaty otrzymane za pomocą rozwiązania metodą Fouriera. Na uwagę zasługuje również ok. 30-krotnie większa efektywność numeryczna sekwencyjnego rozwiązywania równań różniczkowych z przesuniętym argumentem (4.10) lub (4.12) w porównaniu do wyznaczania odpowiedzi dynamicznej drogą superponowania dużej liczby wyrazów szeregów (5.6) rozwiązania metodą Fouriera. Z drugiej strony trzeba pamiętać, że duże lokalne zmiany gradientów ugięć struny w wyniku małych jej drgań poprzecznych są własnością teoretyczną wynikającą z założonego z definicji braku sztywności giętej struny. Ponadto, przy stosunkowo małych realnych wartościach bezwzględnych prędkości propagacji fal poprzecznych w linach występujących w spotykanych rzeczywistych układach mechanicznych i konstrukcjach efekty falowe w postaci fal bieżących są w praktyce najlepiej zauważalne w strunach. Dlatego właśnie w przypadku drgań poprzecznych struny rozwiązanie falowe typu d'Alemberta ma szczególną przewagę nad podejściem modalnym, na którym opiera się rozwiązanie metodą Fouriera. Natomiast w innych obiektach, takich jak wały czy belki mające sztywność oraz znacznie większe wartości bezwzględne prędkości propagacji fal skrętnych i giętych, nagłe duże zmiany gradientów przemieszczeń w formie „pików” na ogół nie występują, a efekty falowe są praktycznie słabo zauważalne biorąc pod uwagę ograniczone rzeczywiste wymiary tych elementów. Dlatego do zastosowań technicznych rozwiązanie metodą Fouriera okazuje się szczególnie przydatne i dostatecznie dokładne w przypadku analizy drgań innych obiektów, co zostanie przedstawione w następnych punktach.

## **5.2 Zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera do analizy aktywnie sterowanych drgań giętych wywołanych obciążeniami ruchomymi**

Analiza drgań giętych układów belkowych i płytowych wymuszanych obciążeniami ruchomymi była przeprowadzana dotychczas przez bardzo wielu autorów przy wykorzystaniu różnych metod modelowania, co zostało opisane m. in. w pracach przeglądowych [167, 168] oraz w [96, 97]. Za pomocą modelu dyskretno-ciągłego zbudowanego z L-SMC i elementów o parametrach dyskretnych wykorzystując rozwiązanie metodą Fouriera można badać aktywnie sterowane drgania gięte przedstawionej na rysunku 5.3 jednorodnej belki zawieszanej obustronnie przegubowo oraz podpartej dodatkowo tzw. wieszarem jednowieszakowym (ang. king-post truss system). Źródłem wymuszenia drgań giętych belki jest ruchoma masa przemieszczająca wzdłuż jej długości ze stałą prędkością  $v$ . W rzeczywistości belka ta reprezentuje prowadnicę precyzyjnego

narzędzia robota wykonującego szybkie ruchy poziome na całej jej długości. Zgodnie z powszechną tendencją minimalizacji masy części maszyn i konstrukcji, taka belka powinna być z jednej strony elementem smukłym, co wpływa na wzrost jej podatności giętej. Z drugiej strony, belka ta jako prowadnica musi zapewniać możliwie prostoliniowy ruch poruszającego się po niej narzędzia. W celu pogodzenia tych dwóch przeciwstawnych kryteriów stosowane jest aktywne sterowanie tego typu konstrukcji przez wprowadzenie dodatkowych sił i momentów zewnętrznych mających za zadanie zminimalizowanie odchyłek ruchu narzędzia od prostoliniowego. Odpowiadający omawianej belce obiekt rzeczywisty w postaci pokazanego na rysunku 5.4 stanowiska laboratoryjnego znajduje się w Instytucie Mechaniki Uniwersytetu w Hanowerze (RFN). W tym obiekcie wprowadzenie sił i momentów sterujących jest dokonywane przez specjalne akтуatory zamontowane w odciegach linowych układu wieszara jednowieszakowego. Sterowane elektrycznie akтуatory ściągając odciegi linowe generują w odpowiednich przekrojach belki skupioną siłę poprzeczną do osi belki  $F(t)$  oraz skupiony moment giący  $M(t)$ .



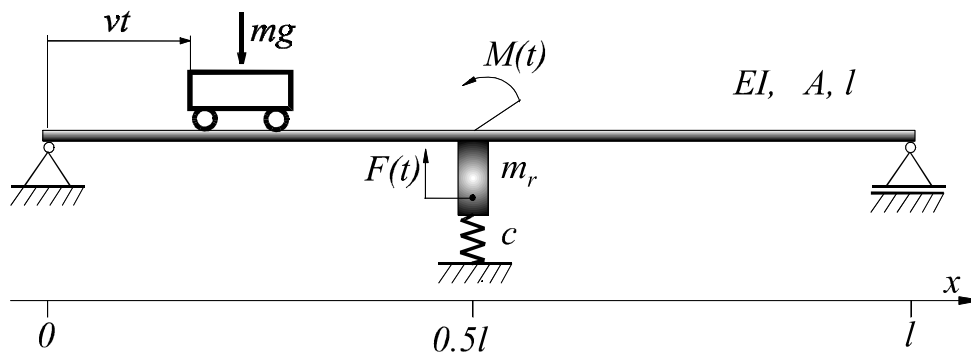
Rys. 5.3 Aktywnie sterowana belka obciążona ruchomą masą



Rys. 5.4 Stanowisko laboratoryjne do badania aktywnej sterowanych drgań belki

W pracy [54] przyjęto dwa modele omawianego układu mechanicznego w postaci jednorodnej smukłej belki o długości  $l$  podpartej na końcach za pomocą sztywnych przegubów. Wieszar jednowieszakowy zastąpiono osadzoną w przekroju jego zamocowania, tzn. w odległości  $l_1$  od lewego końca belki, masą skupioną  $m_r$  reprezentującą bezwładność tego wieszara. Masa  $m_r$  jest połączona dodatkowo z podłożem za pomocą bezmasowego elementu sprężystego o sztywności  $c$  zastępującego podatność odciegów linowych. Przyjęty w ten sposób model mechaniczny w

przypadku symetrycznego wieszara jednowieszakowego, tj. dla  $l_1=0.5l$ , pokazano na rysunku 5.5. W jednym z tych modeli przyjętym w pracy [54] belkę zdyskretyzowano za pomocą 24 belkowych elementów skończonych. Drugi model zastosowany w [38, 54] jest modelem dyskretno-ciągłym, gdzie belkę zastąpiono jedynie dwoma belkowymi L-SMC o długościach  $l_1$  i  $l_2=l-l_1$  o takiej samej sztywności giętej  $EI$  jak w przypadku elementów belkowych w modelu MES. Pozostałe komponenty obu modeli badanego obiektu są identyczne.



Rys. 5.5 Model mechaniczny aktywnie sterowanej belki obciążonej ruchomą masą

Przyjęto dwie zasadnicze koncepcje aktywnego sterowania drganiami giętymi belki. W przypadku modelu MES zastosowano sterowanie w ramach pętli zamkniętej, tzn. ze sprzężeniem zwrotnym, wykorzystując metodę alokacji biegunowej, [113], do dwóch pierwszych postaci drgań. Sterowanie jest wtedy realizowane za pomocą skupionej siły poprzecznej  $F(t)$  oraz skupionego momentu gnącego  $M(t)$  przyłożonych w przekroju belki o współrzędnej  $x=l_1$ . Natomiast w przypadku modelu dyskretno-ciągłego zastosowano sterowanie w ramach pętli otwartej, jako z jednej strony teoretycznie mniej doskonałe, lecz znacznie prostsze i tańsze w realizacji oraz, co najważniejsze, do badanego układu niemniej skuteczne. W przypadku tej koncepcji zagadnienie aktywnego sterowania drgań rozwiązano w trojaki sposób:

- w odniesieniu do symetrycznego wieszara jednowieszakowego, tj. dla  $l_1=l_2=l/2$ , przy pomocy przyłożonych w przekroju  $x=l_1$  skupionej siły poprzecznej  $F(t)$  oraz skupionego momentu gnącego  $M(t)$ , tzn. w sposób analogiczny jak w modelu MES sterowanym w ramach pętli zamkniętej;
- w odniesieniu do symetrycznego wieszara jednowieszakowego, jak w wariancie (a), gdzie sterowanie odbywa się za pomocą skupionego momentu gnącego  $M_1(t)$  przyłożonego w prawym końcu belki o współrzędnej  $x=l$ , przy  $F(t)=0$ ,  $M(t)=0$ ;
- w odniesieniu do niesymetrycznego wieszara jednowieszakowego, gdzie sterowanie odbywa się jedynie za pomocą skupionej siły poprzecznej  $F(t)$  przyłożonej w przekroju belki o współrzędnej  $x=0.75l$  odpowiadającym w przybliżeniu przekrojowi największego dynamicznego ugięcia jednorodnej belki dwupodporowej wywołanego ruchomą siłą lub masą przemieszczającymi się z prędkością krytyczną w sensie Kryłowa, [74], ( $M(t)=0$ ,  $M_1(t)=0$ ).

Opis matematyczny modelu MES badanego układu mechanicznego podano w pracy [54]. W celu uniknięcia konieczności numerycznego całkowania dużej liczby równań różniczkowych ruchu odpowiadającej liczbie stopni swobody modelu dyskretnego dokonano transformacji rozwiązania do współrzędnych modalnych wprowadzając przybliżone wektory własne uwzględniające znane kolejne położenia ruchomej masy skupionej na belce. Te wektory własne aproksymowano wielomianami w postaci szeregów Czebyszewa. Pominięto przy tym wpływ efektów Coriolisa oraz siły odśrodkowej wywoływanych ruchem masy wzdłuż podatnej giętnej belki. Zarówno w modelu MES jak i w modelu dyskretno-ciągłym wykorzystano teorię lepko-sprężystej belki Bernoulliego-Eulera. W związku z tym równaniami ruchu przekrojów poprzecznych makroelementów belkowych

są niejednorodne równania (2.2), w których rozłożone w sposób ciągły obciążenie zewnętrzne można zdefiniować następująco:

$$q_i(x,t) = \delta(x-vt)m \left( g - \frac{d^2 u_i(x,t)}{dt^2} \Big|_{x=vt} \right), \quad i=1,2, \quad (5.7)$$

gdzie  $u_i(x,t)$  oznacza przemieszczenie translacyjne przekroju poprzecznego  $i$ -tego makroelementu,  $\delta$  jest funkcją Dirac'a, a  $g$  oznacza przyspieszenie ziemskie. Wpływ rozłożonego w sposób ciągły obciążenia grawitacyjnego wywołującego składową statyczną ugięcia belki został pominięty ponieważ założono że ugięcie to jest stale kompensowane wstępnym napięciem odciągów linowych wieszara jednowieszakowego oraz siłą wzdłużną  $P$  przyłożoną do belki. Równania ruchu (2.2) są rozwiązywane przy warunkach brzegowych, które do badanego układu sformułowano zgodnie z przyjętymi powyżej założeniami

$$\begin{aligned} u_1(x,t) = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dla } x = 0, \\ u_1(x,t) = u_2(x,t), \quad \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial x}, \\ m_r \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} + c u_2(x,t) + EI \frac{\partial^3 u_2(x,t)}{\partial x^3} - EI \frac{\partial^3 u_1(x,t)}{\partial x^3} = F(t), \\ M(t) + EI \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - EI \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} + c_M u_2(x,t) = 0 \quad \text{dla } x = l_1, \\ u_2(x,t) = 0 \quad \text{i} \quad M_1(t) - EI \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dla } x = l, \end{aligned} \quad (5.8)$$

gdzie:  $c = c_s l_r^2 \left( \frac{1}{l_r^2 + (l-l_1)^2} + \frac{1}{l_r^2 + l_1^2} \right)$ ,  $c_M = c_s l_r^2 \left( \frac{l_1}{l_r^2 + l_1^2} - \frac{l-l_1}{l_r^2 + (l-l_1)^2} \right)$ ,

$c_s$  oznacza sztywność rozciągania odciagu linowego, a  $l_r$  jest długością wieszara.

Zagadnienie własne rozwiązywano za pomocą jednorodnych równań ruchu (2.2) przyjmując w (5.8)  $F(t)=0$ ,  $M(t)=M_1(t)=0$  i wykorzystując lokalne funkcje własne makroelementów belkowych (3.11). Zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera (3.23) niejednorodnych równań ruchu (2.2) drgań giętych belki wymuszanych ruchomą masą sprowadza się podobnie jak w przypadku omawianych w poprzednim punkcie drgań poprzecznych struny do superponowania nieskończonej liczby fal stojących. Rozłożone w sposób ciągły obciążenie zewnętrzne (5.7) wywołane ruchem masy oraz sterujące obciążenia skupione  $F(t)$ ,  $M(t)$  i  $M_1(t)$  przetransformowane do ortogonalnej bazy globalnych funkcji własnych badanego układu  $X_{im}(x)$ ,  $i=1,2$ , przyjmują następującą postać:

$$\begin{aligned} H_m(t) = \frac{1}{\gamma_m^2} \left[ m \left( g - \frac{d^2 u_i(x,t)}{dt^2} \right) X_{im}(x) \Big|_{x=vt} + F(t) X_{2m}(l_1) + \right. \\ \left. + M(t) X'_{2m}(x) \Big|_{x=l_1} + M_1(t) X'_{2m}(x) \Big|_{x=l} \right], \quad m = 1,2,\dots \end{aligned} \quad (5.9)$$

gdzie  $\gamma_m^2$  są masami modalnymi. Występujące w (5.9) chwilowe przyspieszenie ruchomej masy jest wyrażane za pomocą wzoru Renaudot'a stosowanego m. in. w klasycznych pracach [65, 161], który po wprowadzeniu rozwiązania Fouriera (3.23) przyjmuje postać następującego szeregu

$$\frac{d^2 u_i(x,t)}{dt^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[ X_{im}(x) \ddot{\xi}_m(t) + 2v X'_{im}(x) \dot{\xi}_m(t) + v^2 X''_{im}(x) \xi_m(t) \right] \text{ dla } x = vt, \quad i=1,2. \quad (5.10)$$

Otrzymany w efekcie układ równań różniczkowych zwyczajnych typu (3.26) dla nieznanymi modalnych funkcji czasu  $\xi_m(t)$  przyjmuje w tym przypadku postać parametryczną

$$\mathbf{M}(vt) \ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}(vt) \dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}(vt) \mathbf{z}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (5.11)$$

gdzie  $\mathbf{z}(t)$  jest wektorem modalnych funkcji czasu  $\xi_m(t)$ , a składowe wektora wymuszenia zewnętrznego  $\mathbf{F}(t)$  są następujące:

$$F_m(t) = mgX_{im}(vt) + F(t)X_{2m}(l_1) + M(t)X'_{2m}(x)|_{x=l_1} + M_1(t)X'_{2m}(x)|_{x=l}, \quad m = 1,2,\dots \quad (5.12)$$

Wyrażenia opisujące elementy pełnych macierzy  $\mathbf{M}(vt)$ ,  $\mathbf{C}(vt)$  i  $\mathbf{K}(vt)$  są podane w pracy [54].

Podobnie jak w przypadku modelu MES i koncepcji sterowania według pętli zamkniętej, koncepcja sterowania według pętli otwartej zastosowana w modelu dyskretno-ciągłym obejmuje również tylko dwie pierwsze postaci drgań giętnych belki jako dominujące. Wykorzystanie analitycznych metod rozwiązania cząstkowych równań ruchu (2.2) przekrojów poprzecznych L-SMC, czyli metody rozdzielania zmiennych i metody Fouriera, pozwala na wnikliwą jakościową analizę drgań badanego obiektu. Znajomość analitycznych globalnych funkcji własnych omawianego układu i przetransformowanie do ich ortogonalnej bazy wymuszeń zewnętrznych, w tym i sterujących, pozwala 'a priori' wyznaczyć przebiegi w czasie siły  $F(t)$  oraz momentów sterujących  $M(t)$  i  $M_1(t)$  by wyeliminować modalne składowe wymuszenia zewnętrznego pierwszych dwóch postaci drgań własnych belki przyjmując  $F_m(t)=0$  w (5.12) dla  $m=1,2$ .

W przypadku belki podpartej symetrycznym wieszarem jednowieszakowym, tj. dla  $l_1=l_2=l/2$ , charakteryzującej się symetryczną pierwszą funkcją drgań własnych oraz antysymetryczną drugą funkcją drgań własnych realizacja koncepcji sterowania według pętli otwartej i wariantu (a) pozwala na jednoczesne wyeliminowanie składowych wektora wymuszenia tych dwóch postaci drgań. Wówczas, przy  $M_1(t)=0$  siła  $F(t)$  oraz moment sterujący  $M(t)$  są opisane analitycznie zmieniając się w czasie zgodnie z odpowiednio pierwszą i drugą globalną funkcją własną drgań giętnych belki

$$F(t) = \frac{mgX_{i1}(vt)}{X_{21}(l_1)} \quad \text{i} \quad M(t) = \frac{mgX_{i2}(vt)}{X'_{22}(l_1)}, \quad i = 1,2.$$

Natomiast sterowanie ruchem belki podpartej symetrycznym wieszarem jednowieszakowym według wariantu (b), tzn. jedynie za pomocą momentu  $M_1(t)$ , pozwala na wyeliminowanie wymuszenia jednej tylko postaci drgań własnych, tj. pierwszej lub drugiej. Z kolei w przypadku belki podpartej niesymetrycznym wieszarem jednowieszakowym charakteryzującej się brakiem symetrii i antysymetrii odpowiednio pierwszej i drugiej funkcji drgań własnych, jednoczesne wyeliminowanie wymuszenia tych dwóch postaci drgań według wariantu (c) staje się problematyczne i w praktyce ogranicza się do jednej tylko formy.

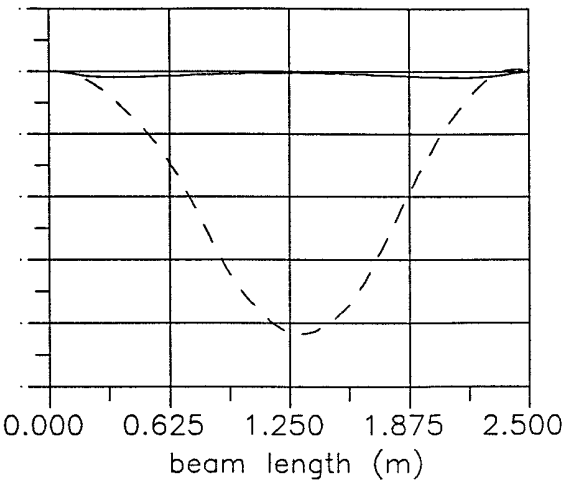
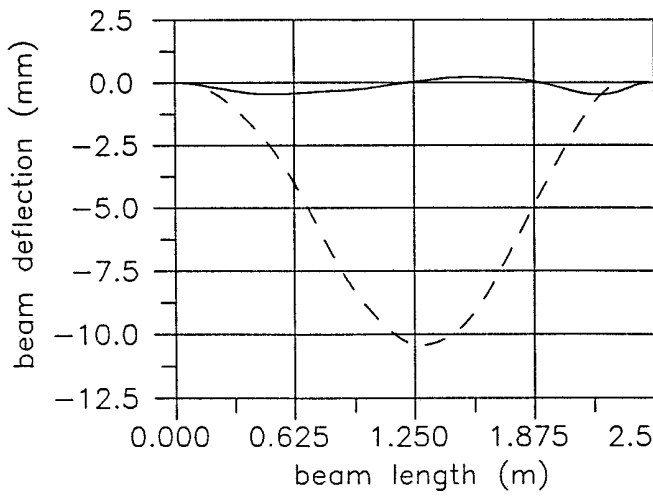
Obliczenia numeryczne wykonano przyjmując dwie wartości sztywności  $EI$  i masy jednostkowej  $\rho A$  badanej belki:

- w przypadku tzw. „belki miękkiej” (SB)  $EI=173.2 \text{ Nm}^2$  i  $\rho A=1.0 \text{ kg/m}$ ,
- w przypadku tzw. „belki twardej” (HB)  $EI=1550.2 \text{ Nm}^2$  i  $\rho A=3.0 \text{ kg/m}$ .

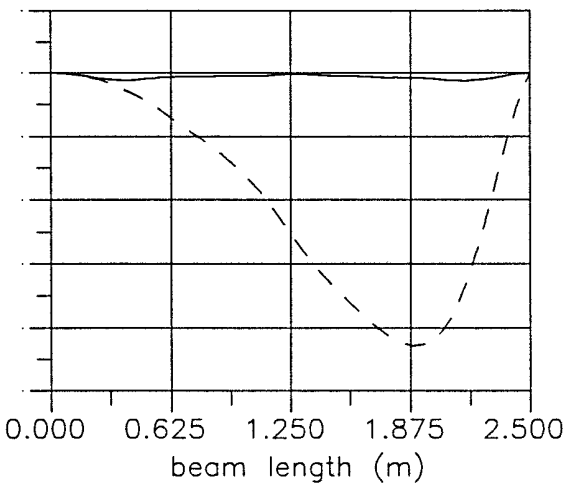
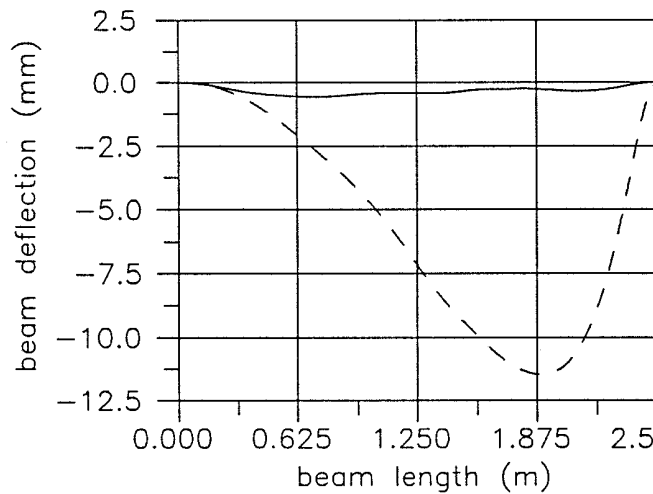
Przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego

Przy wykorzystaniu modelu dyskretnego (MES)

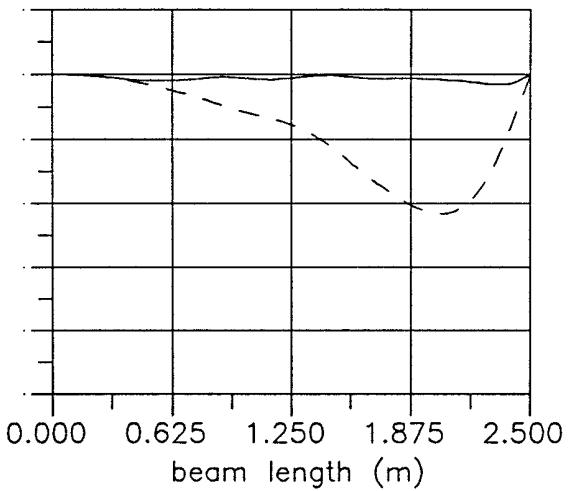
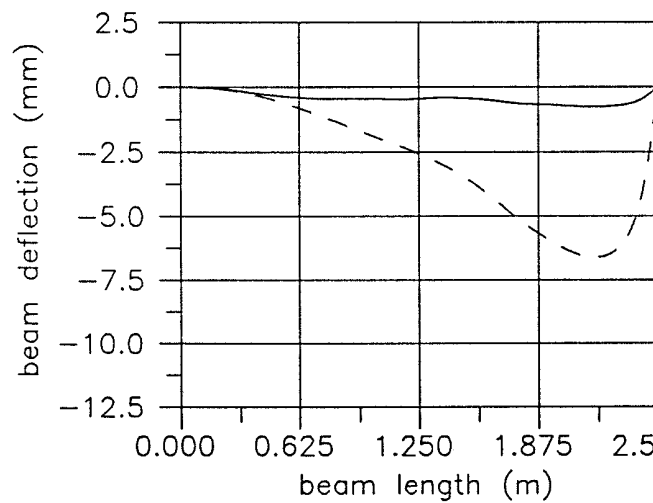
$\alpha=0.25$



$\alpha=0.5$



$\alpha=1.0$



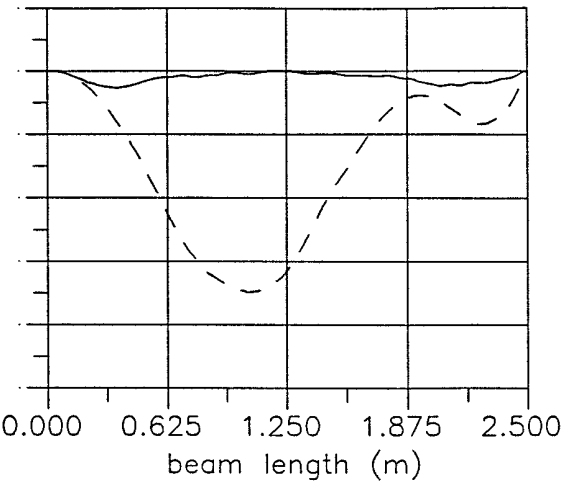
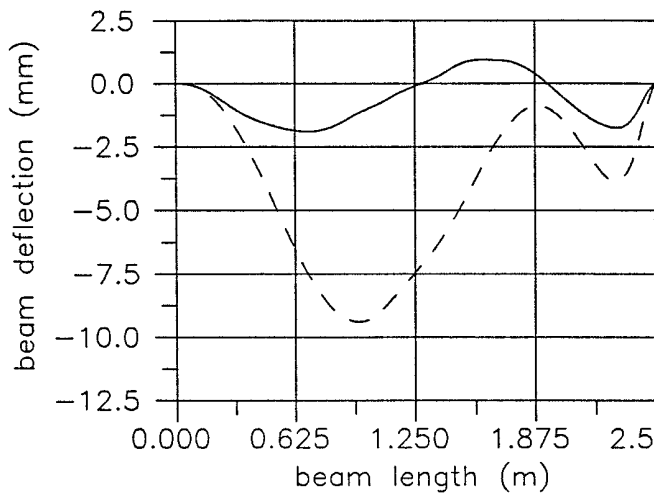
Rys. 5.6 Ugięcie „belki twardej” (HB) obciążonej ruchomą masą w funkcji chwilowego położenia masy na belce: w układzie pasywnym (---) i aktywnie sterowanym (—)



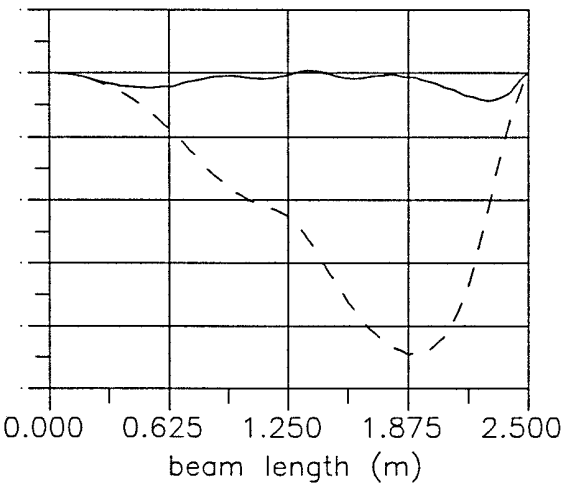
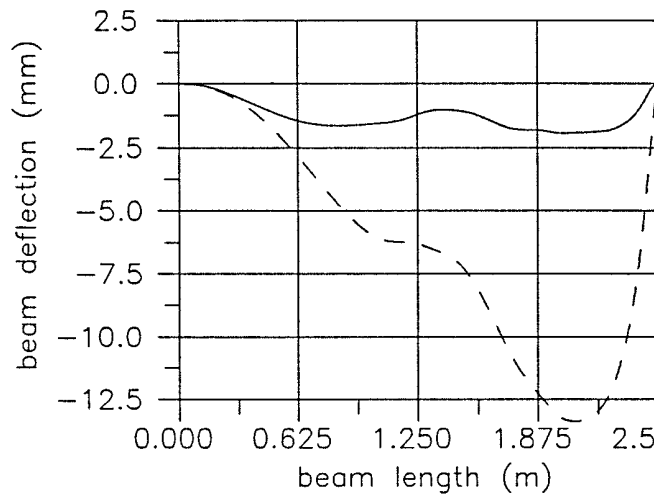
Przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego

Przy wykorzystaniu modelu dyskretnego (MES)

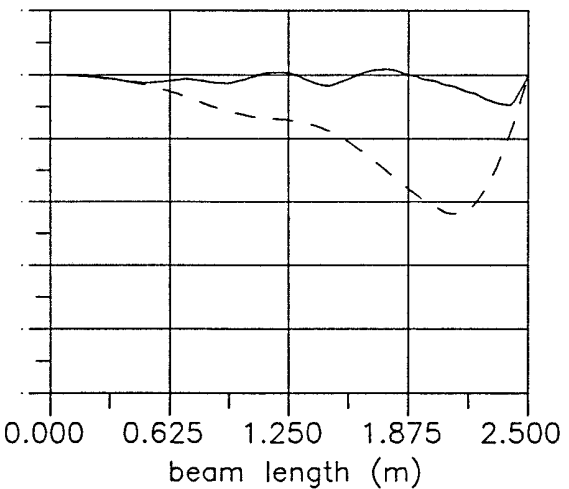
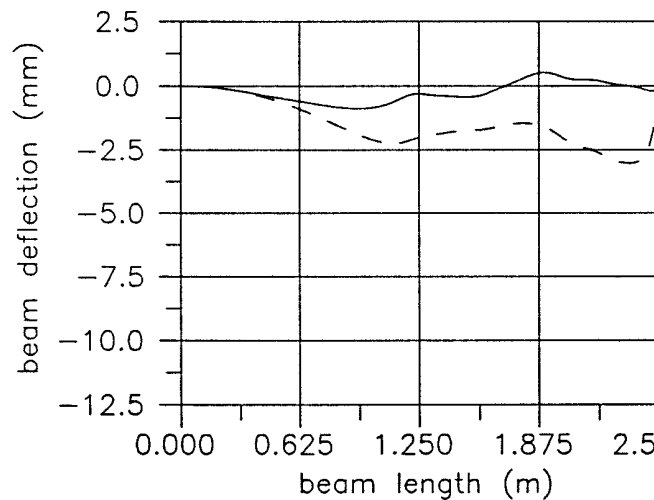
$\alpha=0.25$



$\alpha=0.5$



$\alpha=1.0$



Rys. 5.7 Ugięcie „belki miękkiej” (SB) obciążonej ruchomą masą w funkcji chwilowego położenia masy na belce: w układzie pasywnym (---) i aktywnie sterowanym (—)

Ponadto, wprowadzono następujące parametry bezwymiarowe:

$\mu = \frac{m}{\rho A l}$ , tj. stosunek ruchomej masy do masy belki oraz  $\alpha = \frac{\pi v}{\omega_1 l}$  będący współczynnikiem

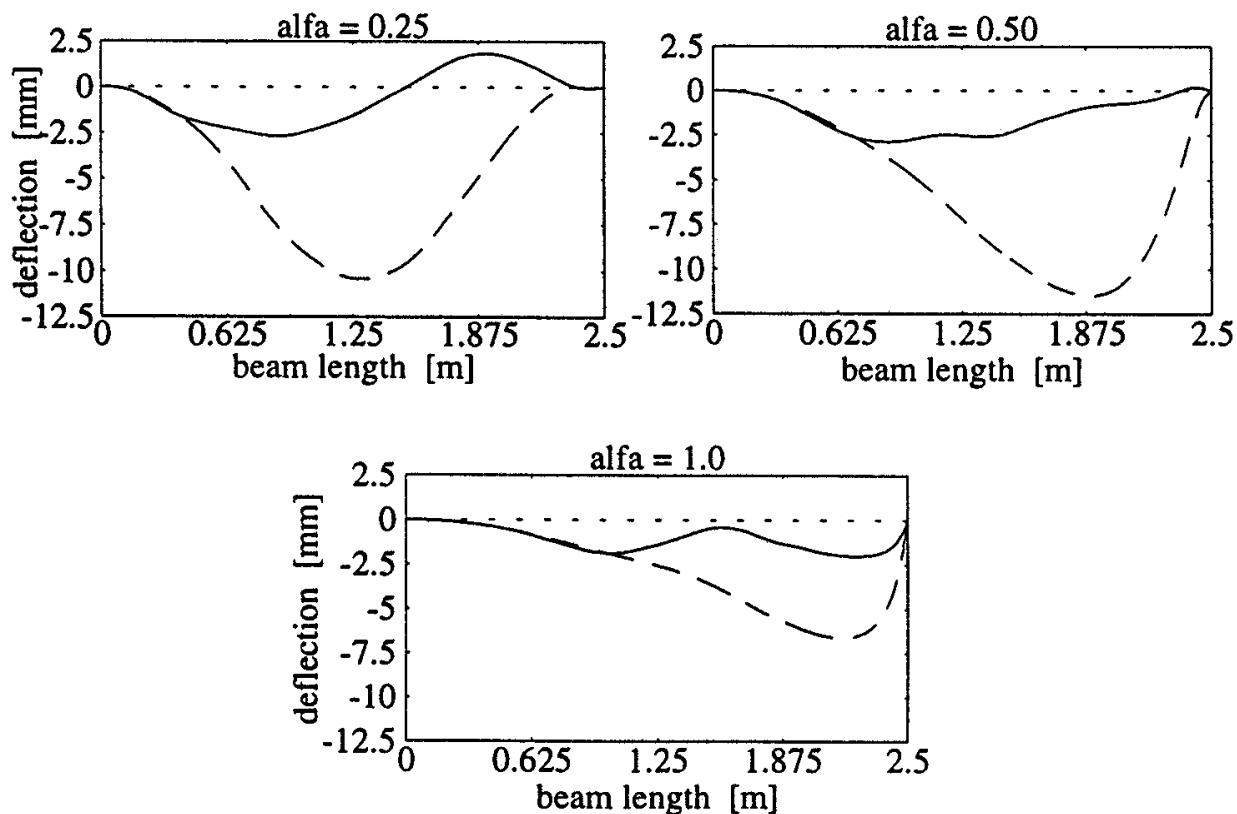
prędkości ruchu masy względem pierwszej częstości drgań giętnych. Wartość  $\alpha=0.5$  odpowiada prędkości krytycznej w sensie Kryłowa, [74].

Na rysunku 5.6 pokazano wyniki symulacji wymuszonych ruchem masy drgań giętnych podpartej symetrycznym wieszarem jednowieszakowym „belki twardej” (HB) dla  $\mu=1.0$ . Wykresy w kolumnie lewej otrzymano za pomocą modelu dyskretno-ciągłego, a w kolumnie prawej - przy wykorzystaniu modelu MES. Przystawione krzywe obrazują ugięcia belki w punkcie chwilowego kontaktu z poruszającą się masą względem bieżącego położenia tej masy na belce  $x=vt$  odpowiednio dla  $\alpha=0.25$ , 0.50 i 1.0, gdzie linie przerywane dotyczą odpowiedzi dynamicznej układu pasywnego, tj. nie sterowanego, a linie ciągłe dotyczą odpowiedzi układu aktywnie sterowanego. Z otrzymanych wykresów wynika, że za pomocą modelu dyskretno-ciągłego i modelu MES otrzymano podobne ugięcia belki drgającej w układzie pasywnym, szczególnie dla  $\alpha=0.25$ . Natomiast przy większych prędkościach ruchu masy, tj. dla  $\alpha=0.5$  i  $\alpha=1.0$ , uwzględnienie jedynie w modelu dyskretno-ciągłym efektów Coriolisa i sił odśrodkowych w (5.10) daje w porównaniu z wynikami uzyskanymi przy wykorzystaniu modelu MES większe wartości maksymalne ugięć odpowiadających chwilowym położeniom masy bliższym prawej podpory belki. W przypadku „belki twardej” (HB) obydwie koncepcje sterowania, tzn. według pętli zamkniętej zastosowanej w modelu MES oraz według pętli otwartej przyjętej w modelu dyskretno-ciągłym zgodnie z wariantem (a), dają efektywne zmniejszenie ugięć, przy czym nieco mniejsze ugięcia belki uzyskano stosując koncepcję pętli zamkniętej, gdzie największe różnice odpowiadają parametrowi prędkości masy  $\alpha=1.0$ .

Na rysunku 5.7 przedstawiono analogiczne wyniki obliczeń wykonanych przy wykorzystaniu parametrów „belki miękkiej” (SB) podpartej również symetrycznym wieszarem jednowieszakowym, tj. dla  $l_1=l_2=l/2$ . W tym przypadku uzyskano większe różnice odpowiadających sobie wykresów ugięcia belki otrzymanych przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego i modelu dyskretnego zbudowanego metodą elementów skończonych. W przypadku układu drgającego w sposób pasywny kształty wykresów ugięcia wykazują większy wpływ podparcia wieszarem jednowieszakowym niż w przypadku „twardej belki” (HB). Ponadto, rozpatrując „belkę miękką” (SB) przy wszystkich rozpatrywanych wartościach parametru prędkości ruchu masy  $\alpha$  obserwuje się większy wpływ uwzględnionych w modelu dyskretno-ciągłym efektów Coriolisa i siły odśrodkowej w postaci występowania maksimów ugięcia belki w chwilowych położeniach masy bliżej prawej podpory. Dla  $\alpha=0.25$  i  $\alpha=0.5$  za pomocą modelu dyskretno-ciągłego otrzymano większe maksymalne ugięcia belki niż przy wykorzystaniu modelu MES. Natomiast przy  $\alpha=1.0$  w przypadku obydwu modeli uzyskano znacznie mniejsze wartości maksymalne ugięć, jak również największe różnice wzajemne przebiegów przemieszczenia belki.

Obserwując wykresy ugięcia otrzymane za pomocą obu modeli układu aktywnie sterowanego, tzn. linie ciągłe na rys. 5.7, należy stwierdzić, że sterowanie w układzie pętli zamkniętej w porównaniu ze sterowaniem w pętli otwartej daje w przypadku „miękkiej belki” (SB) znacznie lepsze rezultaty niż w przypadku „twardej belki” (HB), rys. 5.6, gdzie dla  $\alpha=0.25$  i  $\alpha=0.5$  uzyskano szczególnie małe przemieszczenia poprzeczne. Tylko przy  $\alpha=1.0$  maksymalne ugięcia belki otrzymane przy założeniu sterowania w pętli zamkniętej i otwartej są porównywalne.

Symulacja komputerowa aktywnego sterowania drgań omawianego układu mechanicznego według wariantów (b) i (c) realizacji koncepcji pętli otwartej nie daje już tak efektywnego zmniejszania ugięć belki wywoływanych poruszającą się po niej masą jak według wariantu (a), co



Rys. 5.8 Ugięcie „belki twardej” (HB) obciążonej ruchomą masą w funkcji chwilowego położenia masy na belce: w układzie pasywnym (---) i aktywnie sterowanym (—) według wariantu (b) realizacji pętli otwartej

stanowiło przedmiot porównania w pracy [38]. W układzie drgającym pasywnie, co zaznaczono liniami przerywanymi, oraz w układzie aktywnie sterowanym według wariantu (b) realizacji pętli otwartej (linie ciągłe) na rysunku 5.8, w sposób analogiczny jak na rysunkach 5.6 i 5.7, pokazano przebiegi ugięcia „twardej belki” (HB) wywołanego poruszającą się masą uzyskane przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego dla  $\mu=1.0$  i prędkości ruchu masy odpowiadających współczynnikom  $\alpha=0.25, 0.50$  i  $1.0$ . W tym przypadku za pomocą momentu sterującego  $M_1(t)$  eliminowano wymuszenie jedynie pierwszej postaci drgań własnych belki. Porównując odpowiadające sobie wykresy przedstawione na rysunkach 5.6 i 5.8 nietrudno zauważyć wyraźne różnice w efektywności minimalizacji ugięć belki na korzyść zastosowania wariantu sterowania (a). Zastosowanie realizacji sterowania według wariantu (c) za pomocą siły  $F(t)$  eliminującej wymuszenie tylko pierwszej postaci drgań własnych omawianego układu dało nieznaczną poprawę efektywności minimalizacji ugięć belki w porównaniu do wariantu (b), [38].

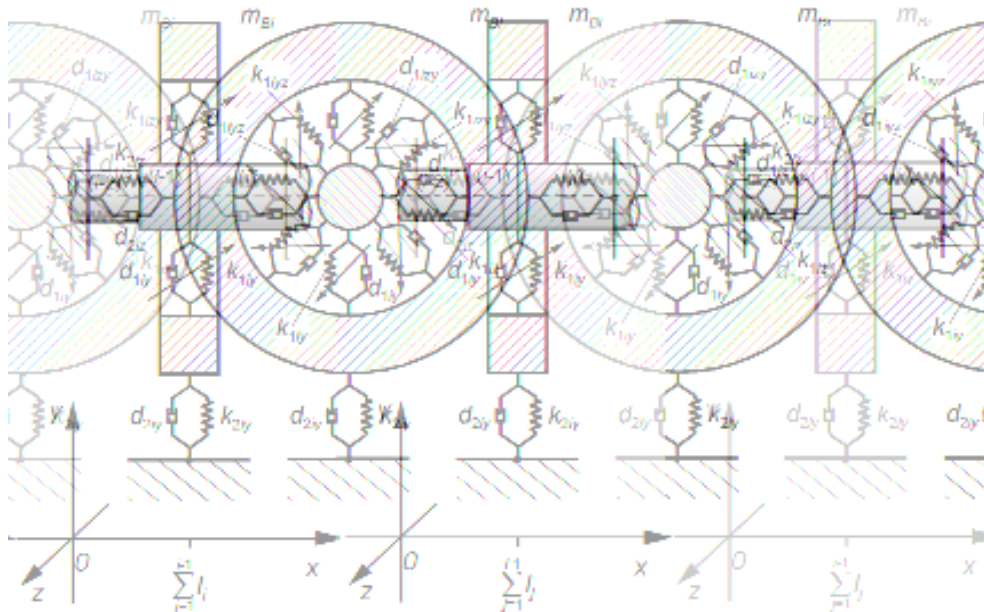
W zakończeniu niniejszego punktu należy stwierdzić, że wspomniana szybka zbieżność szeregow (3.23) w rozwiązaniu metodą Fouriera pozwoliła podczas całkowania numerycznego układu równań (5.11) na ograniczenie liczby pierwszych funkcji własnych badanego układu do 6 w celu otrzymania dostatecznej dokładności wyników. Równania (5.11) rozwiązywano również uwzględniając pierwsze 10 i 14 funkcji własnych badanego układu, lecz nie wpłynęło to w widoczny sposób na poprawę dokładności uzyskiwanych rezultatów.

### 5.3 Zastosowanie rozwiązania metodą Fouriera do analizy drgań giętnych i giętno-skrętnych wałów maszyn wirnikowych

Układy wałów wirnikowych są podstawowymi elementami roboczymi takich maszyn i urządzeń jak turbogeneratory, silniki przepływowe, sprężarki, pompy, dmuchawy, wentylatory i inne zwane powszechnie maszynami wirnikowymi. Jak wspomniano powyżej, najważniejszymi rodzajami drgań, jakich doznają te elementy w czasie normalnej eksploatacji, są drgania giętne i skrętne będące zazwyczaj w stanie mniej lub bardziej istotnego sprzężenia wzajemnego oraz sprzężenia z drganiami osiowymi. Na drgania giętne linii wałów wirnikowych niezwykle istotny wpływ mają własności dynamiczne i statyczne podpór łożyskowych, przez co w przyjmowanych modelach mechanicznych i matematycznych tych układów własności te należy możliwie dokładnie uwzględniać. Do budowy strukturalnych modeli dyskretno-ciągłych układów wałów wirnikowych do analizy drgań giętnych zastosowano belkowe lepko-sprężyste makroelementy ciągłe, których ruch przekrojów poprzecznych jest opisany według teorii wirującej belki Rayleigha, tzn. za pomocą równania ruchu (2.3) lub teorii wirującej belki Timoshenki, tj. za pomocą równania ruchu (2.4). Te makroelementy reprezentują kolejne cylindryczne odcinki rzeczywistych wałów maszyn wirnikowych.

Inną niezwykle ważną grupą elementów konstrukcyjnych występujących zwykle w badanym układzie są różnego rodzaju wirniki, tarcze sprzęgieł, koła zębate, kołnierze, kryzy i inne. W procesie drgań giętnych, skrętnych i osiowych linii wałów wirnikowych w szczególnie ważnym z punktu widzenia zastosowań technicznych zakresie częstości oddziaływania wału z łożyskami odkształcenia tych elementów są zazwyczaj małoznaczne w porównaniu z odkształceniami samych wałów oraz ugięciami podpór. Natomiast istotne znaczenie na charakter drgań mają własności bezwładnościowe tych elementów. Dlatego w modelu mechanicznym układu wałów wirnikowych do analizy drgań giętnych, skrętnych i osiowych we wspomnianym zakresie częstości wymienione elementy konstrukcyjne zostają zastępowane przez sztywne tarcze o masach  $m_i$ , średnicowych masowych momentach bezwładności  $J_i$  i o biegunowych masowych momentach bezwładności  $I_{0i}$  osadzone zgodnie ze strukturą rzeczywistego obiektu w skrajnych lewych przekrojach poprzecznych odpowiednich  $i$ -tych makroelementów, jak pokazano na rysunku 2.8a. Te elementy konstrukcyjne mogą być również reprezentowane przez sztywne pierścienie o tych samych parametrach bezwładnościowych zamocowane we wspomnianych przekrojach poprzecznych w sposób podatny za pomocą nieważkich membran sprężystych o sztywnościach  $\mu_i$ , co przedstawiono na rysunku 2.8b. Membrany te umożliwiają zarówno obroty sztywnych pierścieni wokół ich dowolnych średnic oraz przemieszczenia translacyjne pierścieni wzdłuż osi obrotu. Pierwszy z wymienionych sposobów uwzględniania wirników, tarcz, kół zębatach i in. przedstawiony na rys. 2.8a jest powszechnie znany i stosowany w przypadku jednowymiarowych modeli linii wałów wirnikowych otrzymywanych metodą elementów skończonych (MES) lub macierzy przeniesienia, [60]. Natomiast drugi, nieco dokładniejszy sposób modelowania pokazany na rys. 2.8b może mieć zastosowanie w przypadku stosunkowo podatnych wirników, tarcz sprzęgieł, kół zębatach i in., których wartości podstawowych częstości własnych drgań mieszczą się w rozpatrywanym zakresie drgań giętnych lub osiowych układu linia wałów - łożyska.

W przypadku modelowania podpór łożyskowych należy uwzględniać możliwie dokładnie własności lepko-bezwładnościowo-sprężyste samych łożysk oraz ich obudów związanych z podstawą lub korpusem maszyny wirnikowej. W tym celu zarówno w przypadku łożysk ślizgowych oraz tocznych najwygodniej jest stosować z dostateczną do celów technicznych dokładnością dyskretny model podpory w postaci oscylatora o 2 stopniach swobody, który sprowadza oddziaływanie łożyska do jednego przekroju wału w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach przecinających się wzdłuż osi obrotu wału. Ten model łożyska składa się ze sztywnego pierścienia o masie  $m_{Bi}$  połączonego za pomocą bezmasowych elementów sprężysto-

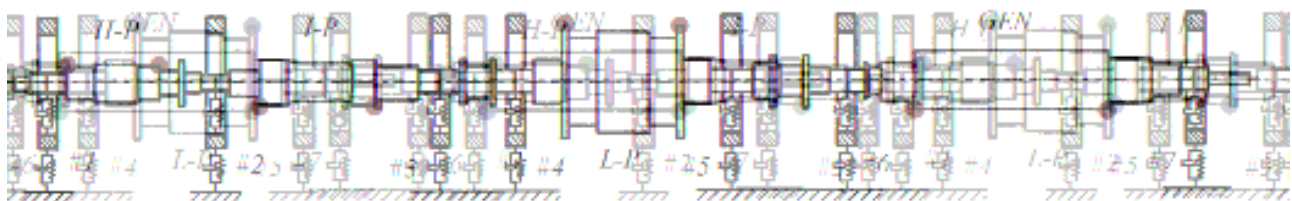


Rys. 5.9 Dyskretny model podpory łożyskowej wału wirnikowego

tłumiących o liniowych bądź nieliniowych charakterystykach - z jednej strony z lewym przekrojem skrajnym zadanego  $i$ -tego makroelementu belkowego, a z drugiej strony ze sztywnym otoczeniem, jak pokazano na rysunku 5.9. Należy zauważyć, że w przypadku łożysk ślizgowych przy wykorzystaniu tego modelu można uwzględniać nieliniowe, anizotropowe i niesymetryczne własności lepko-sprężyste filmu olejowego. Wspomniane charakterystyki tak przyjętego modelu podpory łożyskowej są wyznaczane za pomocą stałych lub zmiennych składowych sztywności  $k_{2iy}$ ,  $k_{2iz}$ ,  $k_{1iy}$ ,  $k_{1iz}$ ,  $k_{1iyz}$ ,  $k_{1izy}$  oraz odpowiadających im współczynników tłumienia zewnętrznego  $d_{2iy}$ ,  $d_{2iz}$ ,  $d_{1iy}$ ,  $d_{1iz}$ ,  $d_{1iyz}$ ,  $d_{1izy}$ , gdzie  $k_{2iy}$ ,  $k_{2iz}$ , i  $d_{2iy}$ ,  $d_{2iz}$  są parametrami elementów sprężysto-tłumiących reprezentujących własności obudowy łożyska odpowiednio w kierunku pionowym i poziomym,  $k_{1iy}$ ,  $k_{1iz}$ , i  $d_{1iy}$ ,  $d_{1iz}$  są parametrami elementów sprężysto-tłumiących reprezentujących własności filmu olejowego łożyska odpowiednio w kierunku pionowym i poziomym, a  $k_{1iyz}$ ,  $k_{1izy}$  i  $d_{1iyz}$ ,  $d_{1izy}$  są „ukośnymi” składowymi sztywności i współczynnikami tłumienia zewnętrznego wyznaczającymi symetryczne, tj. przy  $k_{1iyz}=k_{1izy}$ ,  $d_{1iyz}=d_{1izy}$ , względnie niesymetryczne własności łożyska, tj. dla  $k_{1iyz} \neq k_{1izy}$ ,  $d_{1iyz} \neq d_{1izy}$ , [81].

### 5.3.1 Analiza drgań giętnych układu linii wałów wirnikowych parowego turbogenerators energetycznego

Za pomocą opisanej techniki dyskretno-ciągłego modelowania układów wirujących zbudowano przedstawiony na rysunku 5.10 model linii wałów parowego turbogenerators energetycznego średniej mocy mającego po jednym wirniku wysokiego, średniego i niskiego ciśnienia podpartych na siedmiu łożyskach ślizgowych oznaczonych kolejno symbolami #1÷#7. Poszczególne cylindryczne odcinki linii wałów są zastąpione 40 belkowymi L-SMC, których ruch przekrojów poprzecznych jest opisany równaniem (2.3) wirującej belki Rayleigha oraz celem porównania - równaniem (2.4) wirującej belki Timoshenki. Te równania są rozwiązywane przy



Rys. 5.10 Dyskretno-ciągły model mechaniczny do analizy drgań giętnych układu linii wałów wirnikowych turbogenerators energetycznego

odpowiednich geometrycznych i dynamicznych warunkach brzegowych sformułowanych dla przekrojów skrajnych każdego makroelementu belkowego. Są to warunki zgodności przemieszczeń i kątów ugięcia oraz równania równowagi momentów gnących i sił poprzecznych. Poniżej przedstawiono wspólną postać geometrycznych i dynamicznych warunków brzegowych opisujących połączenie dwóch sąsiednich makroelementów w przekroju odpowiadającym występowaniu sztywnej tarczy oraz oddziaływania łożyska ślizgowego anizotropowego i niesymetrycznego. W przypadku zastosowania teorii belki Rayleigha takie warunki brzegowe przyjmują następującą postać:

$$v_{i-1}(x,t) = v_i(x,t), \quad \frac{\partial v_{i-1}(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x}, \quad (5.13a, b)$$

$$\begin{aligned} & m_i \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial t^2} + EI_i \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 v_i(x,t)}{\partial x^3} - EI_{i-1} \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 v_{i-1}(x,t)}{\partial x^3} - \\ & - \rho I_i \frac{\partial^3 v_i(x,t)}{\partial x \partial t^2} + \rho I_{i-1} \frac{\partial^3 v_{i-1}(x,t)}{\partial x \partial t^2} + 2j\Omega\rho \left[ I_i \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial x \partial t} - I_{i-1} \frac{\partial^2 v_{i-1}(x,t)}{\partial x \partial t} \right] + \\ & + d_{1iy} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} - \frac{ds_i(t)}{dt} \right] + jd_{1iz} \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} - \frac{ds_i(t)}{dt} \right] + k_{1iy} \operatorname{Re} [v_i(x,t) - s_i(t)] + \\ & + jk_{1iz} \operatorname{Im} [v_i(x,t) - s_i(t)] + d_{1iyz} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} - \frac{ds_i(t)}{dt} \right] + jd_{1izy} \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} - \frac{ds_i(t)}{dt} \right] + \\ & + k_{1iyz} \operatorname{Re} [v_i(x,t) - s_i(t)] + jk_{1izy} \operatorname{Im} [v_i(x,t) - s_i(t)] = 0, \end{aligned} \quad (5.13c)$$

$$- J_i \frac{\partial^3 v_i(x,t)}{\partial x \partial t^2} + EI_i \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial x^2} - EI_{i-1} \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v_{i-1}(x,t)}{\partial x^2} + j\Omega I_{0i} \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial x \partial t} = 0, \quad (5.13d)$$

$$\begin{aligned} & m_{Bi} \frac{d^2 s_i(t)}{dt^2} + d_{2iy} \operatorname{Re} \left[ \frac{ds_i(t)}{dt} \right] + jd_{2iz} \operatorname{Im} \left[ \frac{ds_i(t)}{dt} \right] + k_{2iy} \operatorname{Re} [s_i(t)] + jk_{2iz} \operatorname{Im} [s_i(t)] + \\ & + d_{1iy} \operatorname{Re} \left[ \frac{ds_i(t)}{dt} - \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right] + jd_{1iz} \operatorname{Im} \left[ \frac{ds_i(t)}{dt} - \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right] + k_{1iy} \operatorname{Re} [s_i(t) - v_i(x,t)] + \\ & + jk_{1iz} \operatorname{Im} [s_i(t) - v_i(x,t)] + d_{1iyz} \operatorname{Re} \left[ \frac{ds_i(t)}{dt} - \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right] + jd_{1izy} \operatorname{Im} \left[ \frac{ds_i(t)}{dt} - \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right] + \\ & + k_{1iyz} \operatorname{Re} [s_i(t) - v_i(x,t)] + jk_{1izy} \operatorname{Im} [s_i(t) - v_i(x,t)] = 0 \quad \text{dla } x = \sum_{j=1}^{i-1} l_j, \quad i = k, \quad k = 1, 2, \dots, n_B. \end{aligned} \quad (5.13e)$$

Z kolei w przypadku zastosowania teorii belki Timoshenki powyższe warunki połączenia dwóch wymienionych sąsiadujących ze sobą makroelementów przyjmują postać nieco odmienną:

$$v_{i-1}(x,t) = v_i(x,t), \quad \phi_{i-1}(x,t) = \phi_i(x,t), \quad (5.14a, b)$$

$$\begin{aligned} & m_i \frac{\partial^2 v_i(x,t)}{\partial t^2} - \kappa G A_i \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \left( \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial x} - \phi_i(x,t) \right) + \kappa G A_{i-1} \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \left( \frac{\partial v_{i-1}(x,t)}{\partial x} - \phi_{i-1}(x,t) \right) + \\ & + d_{1iy} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} - \frac{d s_i(t)}{dt} \right] + j d_{1iz} \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} - \frac{d s_i(t)}{dt} \right] + k_{1iy} \operatorname{Re} [v_i(x,t) - s_i(t)] + \\ & + j k_{1iz} \operatorname{Im} [v_i(x,t) - s_i(t)] + d_{1iyz} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} - \frac{d s_i(t)}{dt} \right] + j d_{1izy} \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} - \frac{d s_i(t)}{dt} \right] + \\ & + k_{1iyz} \operatorname{Re} [v_i(x,t) - s_i(t)] + j k_{1izy} \operatorname{Im} [v_i(x,t) - s_i(t)] + 2j\Omega \rho \left[ I_i \frac{\partial \phi_i(x,t)}{\partial t} - I_{i-1} \frac{\partial \phi_{i-1}(x,t)}{\partial t} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.14c)$$

$$- J_i \frac{\partial^2 \phi_i(x,t)}{\partial t^2} + E I_i \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \phi_i(x,t)}{\partial x} - E I_{i-1} \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \phi_{i-1}(x,t)}{\partial x} + j\Omega I_{0i} \frac{\partial \phi_i(x,t)}{\partial t} = 0, \quad (5.14d)$$

$$\begin{aligned} & m_{Bi} \frac{d^2 s_i(t)}{dt^2} + d_{2iy} \operatorname{Re} \left[ \frac{d s_i(t)}{dt} \right] + j d_{2iz} \operatorname{Im} \left[ \frac{d s_i(t)}{dt} \right] + k_{2iy} \operatorname{Re} [s_i(t)] + j k_{2iz} \operatorname{Im} [s_i(t)] + \\ & + d_{1iy} \operatorname{Re} \left[ \frac{d s_i(t)}{dt} - \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right] + j d_{1iz} \operatorname{Im} \left[ \frac{d s_i(t)}{dt} - \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right] + k_{1iy} \operatorname{Re} [s_i(t) - v_i(x,t)] + \\ & + j k_{1iz} \operatorname{Im} [s_i(t) - v_i(x,t)] + d_{1iyz} \operatorname{Re} \left[ \frac{d s_i(t)}{dt} - \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right] + j d_{1izy} \operatorname{Im} \left[ \frac{d s_i(t)}{dt} - \frac{\partial v_i(x,t)}{\partial t} \right] + \\ & + k_{1iyz} \operatorname{Re} [s_i(t) - v_i(x,t)] + j k_{1izy} \operatorname{Im} [s_i(t) - v_i(x,t)] = 0 \quad \text{dla } x = \sum_{j=1}^{i-1} l_j, \quad i = k, \quad k = 1, 2, \dots, n_B, \end{aligned} \quad (5.14e)$$

gdzie  $\phi_i(x,t)$  oznacza kąt obrotu przekroju poprzecznego belki wywołwanego czystym zginaniem,  $s_i(t) = y_i(t) + jz_i(t)$  jest zespoloną współrzędną uogólnioną opisującą ruch sztywnego pierścienia reprezentującego bezwładność obudowy łożyska, przy czym  $y_i(t)$  oznacza przemieszczenie pierścienia w kierunku pionowym, tj. wzdłuż osi  $Oy$ ,  $z_i(t)$  jest przemieszczeniem poziomym w kierunku osi  $Oz$ , a  $n_B$  jest liczbą podpór łożyskowych w rozpatrywanym układzie wałów wirnikowych. W powyższych warunkach brzegowych sformułowanych według teorii belki Rayleigha i Timoshenki równania (5.13a) i (5.14a) są odpowiednio geometrycznymi warunkami zgodności przemieszczeń poprzecznych przylegających do siebie skrajnych przekrojów poprzecznych sąsiadujących ze sobą  $i-1$  - szego i  $i$ -tego makroelementu, a równania (5.13b) i (5.14b) warunkami zgodności kątów obrotu tych przekrojów. Równania (5.13c) i (5.14c) są równaniami równowagi sił poprzecznych, a (5.13d) i (5.14d) - równaniami równowagi momentów zginających. Sprzężone z (5.13c) i (5.14c) odpowiednio równania (5.13e) i (5.14e) stanowią równania ruchu sztywnego pierścienia o masie  $m_{Bi}$  reprezentującego bezwładność obudowy łożyska, jak pokazano na rys. 5.9. Konkretna postać warunków brzegowych opisujących połączenie dwóch makroelementów w przekroju występowania podpory łożyskowej jest uzyskiwana przez podstawienie nie w równaniach (5.13c) i (5.14c)  $m_i = 0$  oraz w równaniach (5.13d) i (5.14d)  $J_i = 0$  i  $I_{0i} = 0$ . Natomiast w przypadku połączenia dwóch makroelementów w przekroju występowania sztywnej tarczy bez podpory łożyskowej należy pominąć równania (5.13e) i (5.14e) oraz przyjąć

zerowe wartości wszystkich składowych sztywności łożyskowych i współczynników tłumienia zewnętrznego w równaniach (5.13c) i (5.14c). Wszystkie składowe sztywności modelu podpory łożyskowej oraz współczynniki tłumienia są w ogólnym przypadku są zmienne i zależne od szeregu parametrów w zależności od typu łożyska. W omawianym przypadku, zgodnie na przykład z [60, 81], przy założonych dostatecznie małych przemieszczeniach poprzecznych czopów przyjęto uśrednione stałe wartości sztywności i współczynników tłumienia podpór łożyskowych modelu linii wałów turbogeneratora.

W celu rozwiązania tak sformułowanego problemu przy użyciu obu teorii belki zastosowano metodę rozdzielania zmiennych (3.7) dla przemieszczeń poprzecznych przekrojów makroelementów. Rozdzielenie zmiennych w przypadku kąta obrotu przekroju poprzecznego belki Timoshenki wywołwanego czystym zginaniem  $\phi_i(x,t)$  przyjmuje postać

$$\phi_i(x,t) = \Phi_i(x) \cdot T(t) \quad \text{dla} \quad \sum_{k=1}^{i-1} l_k \leq x \leq \sum_{k=1}^i l_k, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.15)$$

gdzie  $\Phi_i(x)$  jest zespoloną funkcją własną kąta obrotu w obydwu płaszczyznach drgań linii wałów. Funkcje własne dla przemieszczeń poprzecznych mają taką samą postać (3.11) w przypadku obu teorii belki, różniąc się jedynie współczynnikami  $\kappa_i$  i  $\chi_i$  określonymi na podstawie wyrażen (3.12) i (3.13) odpowiednio wg teorii belki Rayleigha i belki Timoshenki. Z kolei funkcja własna kąta obrotu  $\Phi_i(x)$  zgodnie na przykład z [42, 170] przyjmuje postać analogiczną do (3.11):

$$\Phi_i(x) = \bar{A}_{1i} \sin(k\kappa_i x) + \bar{A}_{2i} \cos(k\kappa_i x) + \bar{A}_{3i} \sinh(k\chi_i x) + \bar{A}_{4i} \cosh(k\chi_i x), \quad (5.16)$$

przy czym pomiędzy odpowiadającymi sobie stałymi stojącymi przy funkcjach trygonometrycznych i hiperbolicznych w (3.11) i (5.16) mają miejsce następujące zależności:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{1i} &= A_{1i} \left( k\kappa_i - k^3 \frac{E}{\kappa G} \frac{1}{\kappa_i} \right), & \bar{A}_{2i} &= A_{2i} \left( -k\kappa_i + k^3 \frac{E}{\kappa G} \frac{1}{\kappa_i} \right), \\ \bar{A}_{3i} &= A_{3i} \left( k\chi_i + k^3 \frac{E}{\kappa G} \frac{1}{\chi_i} \right), & \bar{A}_{4i} &= A_{4i} \left( k\chi_i + k^3 \frac{E}{\kappa G} \frac{1}{\chi_i} \right), \end{aligned} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

W obydwu rozpatrywanych przypadkach teorii belki wprowadzenie (3.11) do warunków brzegowych (5.13 a-e) oraz wprowadzenie (3.11) i (5.16) do (5.14 a-e) prowadzi do równania charakterystycznego o takiej samej postaci (3.21) lub (3.22). Rozwiązanie równań charakterystycznych pozwala na uzyskanie kolejnych częstości oraz odpowiadających tym częstościom funkcji własnych giętych drgań własnych nietłumionych pokazanego na rys. 5.10 dyskretno-ciągłego modelu wirującego układu linii wałów wirnikowych turbogeneratora energetycznego.

Obliczenia numeryczne wykonano dla parametrów linii wałów wspomnianego turbogeneratora energetycznego o mocy 200 MW badanego w pracy [199], w przypadku którego uśrednione wartości składowych sztywności podpór łożyskowych i współczynników tłumienia zewnętrznego uzyskano drogą pomiarów przeprowadzonych na obiekcie rzeczywistym. W tabeli 4.1 zestawiono uzyskane przy wykorzystaniu teorii belki Rayleigha i Timoshenki pierwsze 12 częstości giętych drgań własnych linii wałów wirujących ze znamionową prędkością obrotową 3000 obr/min. Jak wynika z dokonanego porównania, uwzględnienie efektu ścinania przekrojów w przypadku teorii belki Timoshenki daje w wyniku na ogół mniejsze wartości odpowiednich częstości własnych. Niekiedy wyjątek mogą stanowić niektóre wyższe postacie drgań, gdzie następuje wzajemne kompensowanie się efektów ścinania przekrojów. Ponadto należy zauważyć, że w najważniejszym z punktu widzenia praktycznego w tego typu układach mechanicznych



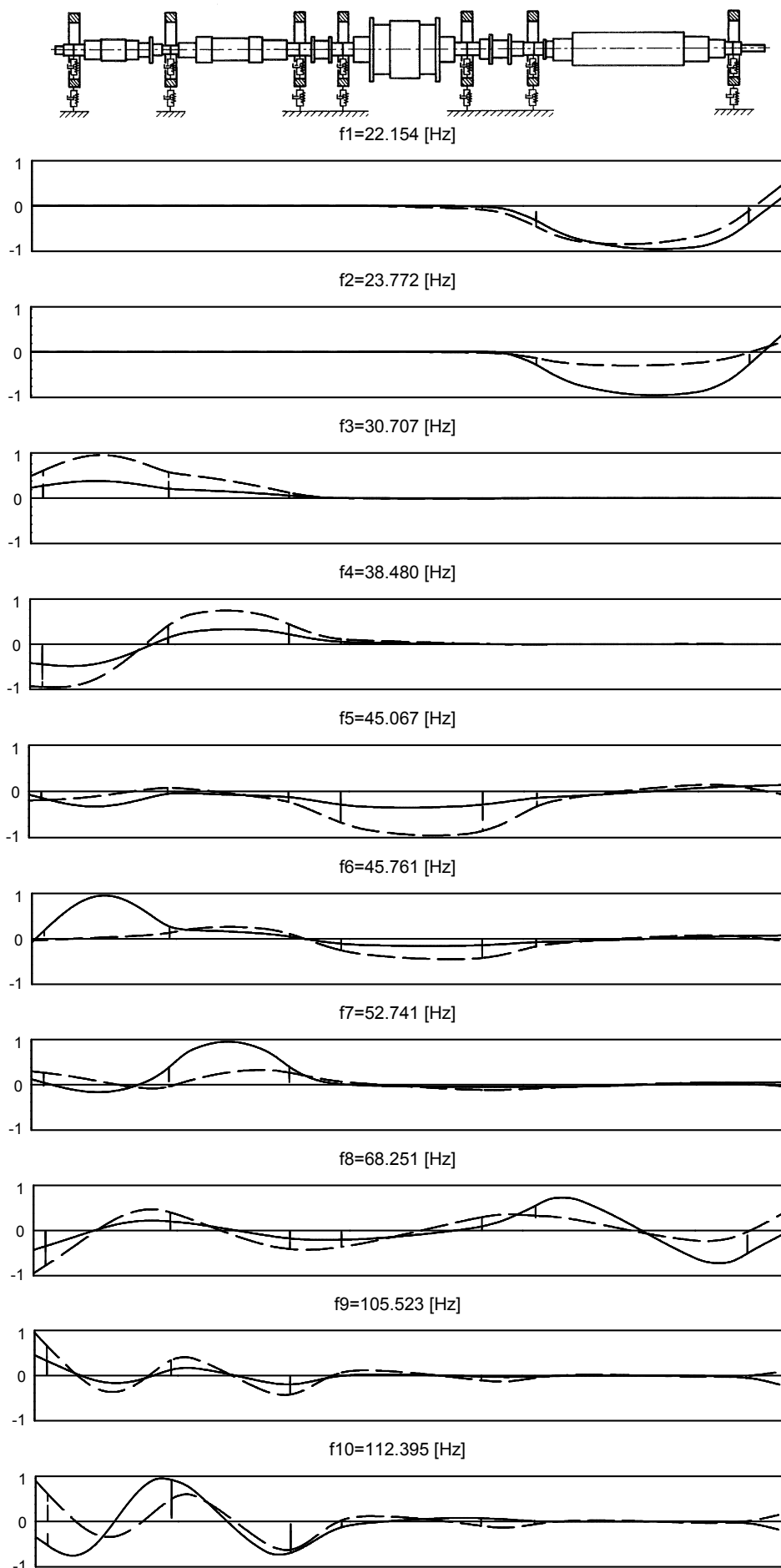
zakresie częstotliwości 0÷150 Hz różnice względne odpowiadających sobie częstości otrzymanych przy wykorzystaniu obu teorii zginania belki nieznacznie przekraczają 3%. W związku z powyższym, można stwierdzić, iż w omawianym przypadku linii wałów turbogeneratora w zakresie częstotliwości 0÷150 Hz zastosowanie teorii wirującej belki Rayleigha wydaje się być dostatecznie dokładne do celów technicznych.

Tabela 4.1 Zestawienie pierwszych 12 częstości giętych drgań własnych linii wałów turbogeneratora otrzymanych przy wykorzystaniu teorii belki Rayleigha i Timoshenki.

Nr postaci drgań	Częstotliwość własna wg teorii belki <b>Rayleigha</b> [Hz]	Częstotliwość własna wg teorii belki <b>Timoshenki</b> [Hz]	Różnica względna [%]
1	22.742	22.154	-2.65
2	24.516	23.772	-3.13
3	30.924	30.707	-0.71
4	38.976	38.480	-1.29
5	45.886	45.067	-1.82
6	46.486	45.761	-1.58
7	54.183	52.741	-2.73
8	68.251	67.022	-1.83
9	107.794	105.523	-2.15
10	114.205	112.395	-1.61
11	127.162	125.468	-1.35
12	145.211	141.837	-2.38

Na rysunku 5.11 przedstawiono przyporządkowane tym częstościom kolejne 10 funkcji własnych, gdzie liniami ciągłymi zaznaczono ich rzuty na płaszczyznę pionową  $x-y$ , a liniami przerywanymi rzuty na płaszczyznę poziomą  $x-z$ . Odcinki pionowe oznaczają składowe przemieszczenia brył sztywnych reprezentujących bezwładność obudów łożysk w kierunku pionowym i poziomym. Obliczenia wykazały, że odpowiadające sobie funkcje własne otrzymane przy wykorzystaniu obu teorii belki prawie pokrywają się. Analizując następujące po sobie funkcje własne można śledzić wrażliwość poszczególnych fragmentów linii wałów, tj. kolejnych pręseł z wirnikami niskiego, średniego i niskiego ciśnienia oraz pręseła z wirnikiem generatora prądu, na możliwość wzbudzenia drgań giętych na przykład resztkowymi niewyważeniami tych elementów. Należy zauważyć, że wskutek silnej anizotropii i niesymetryczności łożysk kształty rzutów pionowych poszczególnych funkcji własnych istotnie różnią się od kształtów rzutów poziomych, co wskazuje na przestrzenny charakter tych funkcji.

Analizę drgań wymuszonych omawianego układu linii wałów turbogeneratora dokonano przy wykorzystaniu rozwiązań metodą Fouriera (3.23) i (3.24) w formie nieskończonych szeregów rozwinięć względem ortogonalnych funkcji własnych. W tym celu ze składowych sztywności podpór łożyskowych wydzielono części symetryczne i niesymetryczne. W przypadku tak otrzymanego układu symetrycznego równanie charakterystyczne (3.21) rozwiązano przy założeniu nie wirującej linii wałów, tj. dla  $\Omega=0$ . W ten sposób otrzymano ortogonalną bazę funkcji własnych rozpatrywanego układu mechanicznego. W związku z powyższym, pominięte przy rozwiązywaniu problemu własnego części niesymetryczne reakcji podpór łożyskowych, siły żyroskopowe oraz siły tłumienia zewnętrznego potraktowano konsekwentnie w sposób ścisły jako obciążenia zewnętrzne i rozwinięto w nieskończone szeregi względem ortogonalnych funkcji własnych wykorzystując zależności (3.25). Z kolei jako typowo zewnętrzne źródła wymuszeń przyjęto statyczne resztkowe niwewyważenia wszystkich wirników badanego układu przyłożone w sposób skupiony w zadanych przekrojach poprzecznych, które oznaczono symbolicznie na rysunku 5.10 szarymi kółeczkami,

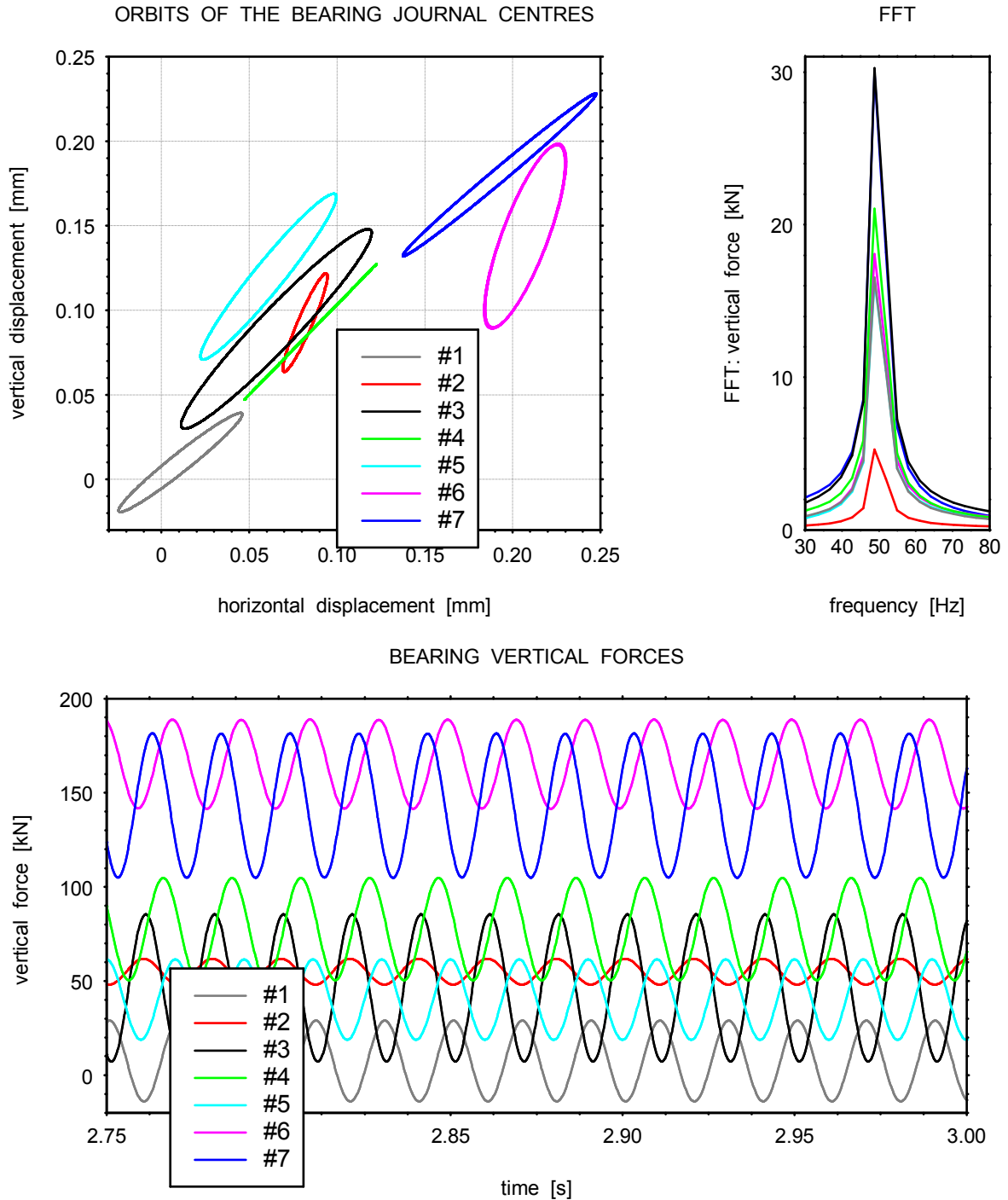


Rys. 5.11 Funkcje własne dyskretno-ciągłego modelu linii wałów parowego turbogeneratora energetycznego

oraz obciążenia grawitacyjne działające w płaszczyźnie pionowej  $x$ - $y$  na poszczególne odcinki wałów, wirniki, tarcze sprzęgieł i obudowy łożysk. Postępując zgodnie z metodyką rozwiązywania zagadnienia drgań wymuszonych opisaną w punkcie 3.2.2 w przypadku omawianego modelu linii wałów wirnikowych turbogeneratora otrzymano układ liniowych równań różniczkowych zwyczajnych typu (3.26) we współrzędnych Lagrange'a  $\mathbf{r}(t)$  w następującej postaci:

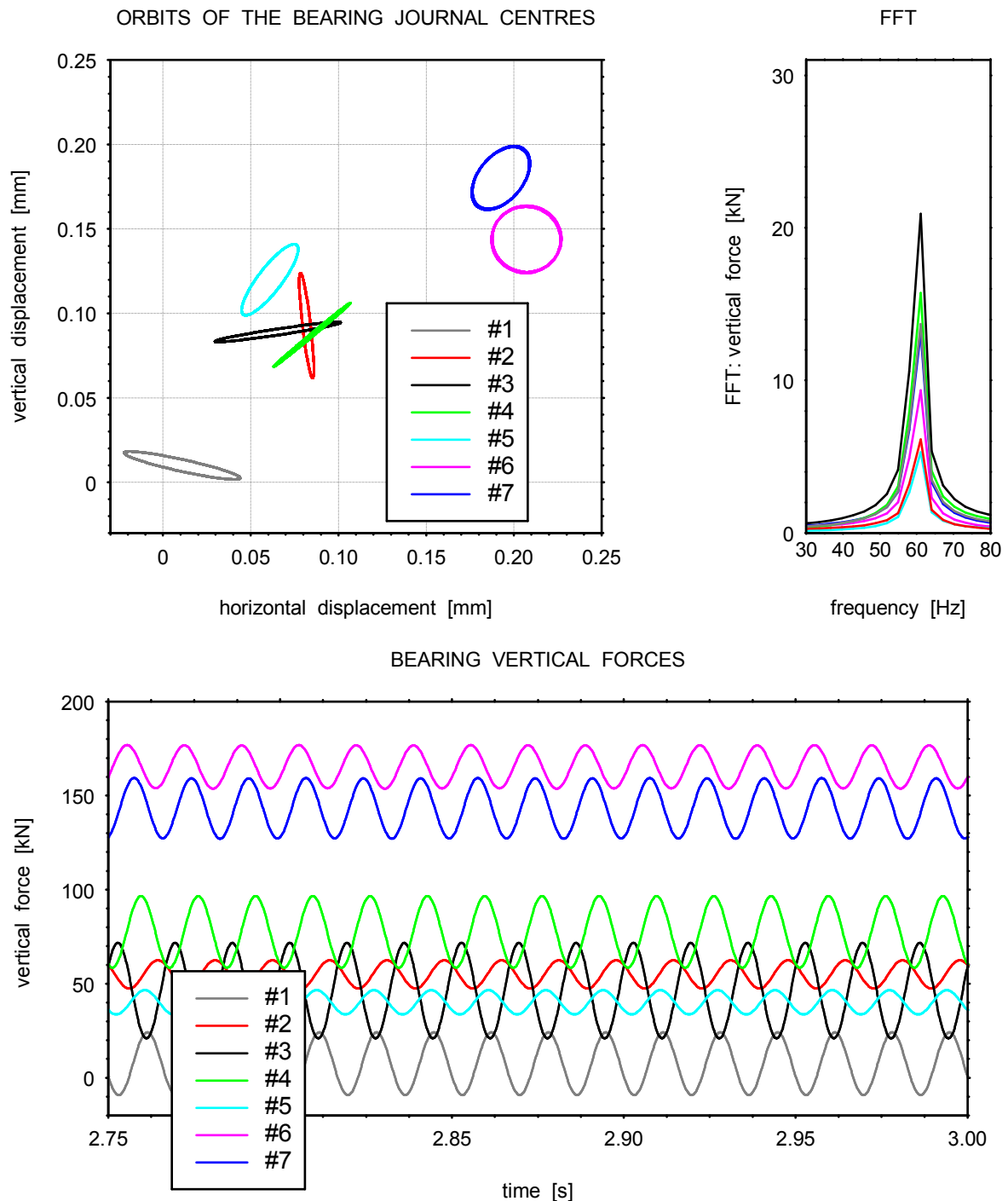
$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{C}(\Omega) \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t, \Omega^2), \quad (5.17)$$

gdzie  $\mathbf{C}(\Omega) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_g(\Omega)$  i  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_r$ . W układzie równań (5.17) symbole  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}_0$  oznaczają odpowiednio stałe diagonalne modalne macierze bezwładności i sztywności,  $\mathbf{C}_0$  jest stałą niesymetryczną macierzą tłumienia,  $\mathbf{C}_g(\Omega)$  oznacza antysymetryczną macierz efektów



Rys. 5.12 Odpowiedź dynamiczna modelu linii wałów turbogeneratora przy prędkości 3000 obr/min.

żyroskopowych, a  $\mathbf{K}_r$  jest macierzą, której elementy są funkcjami niesymetrycznych składowych sztywności podpór łożyskowych. Symbol  $\mathbf{F}(t, \Omega^2)$  oznacza wektor wymuszenia zewnętrznego pochodzącego od stałych sił grawitacyjnych oraz od synchronicznie zmiennych w czasie sił resztkowego niewyrównoważenia statycznego wirników o amplitudach zależnych od kwadratu prędkości kątowej wirowania linii wałów. W celu uzyskania odpowiedzi dynamicznej badanego układu mechanicznego równania (5.17) rozwiązano numerycznie metodą Newmarka ograniczając obliczenia do 27 równań, tj. do uwzględnienia pierwszych  $N=27$  wyrazów szeregów (3.23) w celu uzyskania wymaganej dokładności wyników.



Rys. 5.13 Odpowiedź dynamiczna modelu linii wałów turbogenerators przy prędkości 3600 obr/min.

Symulacji giętych drgań wymuszonych linii wałów omawianego turbogenerators dokonano przy dopuszczalnych normami wykonawczymi resztkowych niewy wagach poszczególnych wirników usytuowanych w jednej płaszczyźnie w sposób pokazany na rysunku 5.10. Obliczenia przeprowadzono dla dwóch wartości znamionowej prędkości obrotowej 3000 i 3600 obr/min odpowiadających warunkom wytwarzania prądu elektrycznego o typowych częstotliwościach  $\Omega/2\pi=50$  i 60 Hz. Na rysunkach 5.12 i 5.13 odpowiednio zostały przedstawione przyporządkowane wymienionym prędkościom obrotowym odpowiedzi dynamiczne badanego układu w formie orbit przemieszczeń poprzecznych środków czopów wszystkich siedmiu łożysk podpierających linię wałów turbogenerators. Ponadto, zamieszczono przebiegi w czasie składowych pionowych sił oddziaływania między panwiami a czopami tych łożysk. Przyporządkowanie kolorów poszczególnych krzywych odpowiedzi dynamicznej łożyskom #1÷#7 turbogenerators oznaczono na tych rysunkach w postaci legend. Widoczny czysto eliptyczny kształt orbit przemieszczeń środków czopów jest wynikiem przyjętego liniowego i anizotropowego modelu podpór łożyskowych. Z kolei składowe stałe tych przemieszczeń, zarówno pionowe jak i poziome, są powodowane działaniem sił grawitacyjnych przy założonej niesymetryczności oddziaływania filmu olejowego. Zgodnie z założonym modelem wymuszenia zewnętrznego przebiegi sił łożyskowych mają kształt czysto sinusoidalny o częstościach synchronicznych, odpowiednio 50 i 60 Hz, co wykazują przedstawione również na rys. 5.12 i 5.13 charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe sporządzone dla przebiegów tych sił przy wykorzystaniu szybkiej transformacji Fouriera (FFT). Ponadto, każdy z przebiegów sił charakteryzuje widoczna składowa stała wynikająca ze statycznego-grawitacyjnego obciążenia łożyska.

Zarówno orbity przemieszczeń środków czopów, jak i amplitudy sił łożyskowych otrzymane dla prędkości wirowania 3000 obr/min, rys. 5.12, charakteryzują się większymi wartościami ekstremalnymi przemieszczeń czopów i sił dynamicznych powstających podczas pracy turbogenerators w tych ustalonych znamionowych warunkach niż odpowiadające im wartości ekstremalne przemieszczeń i sił łożyskowych występujących przy prędkości 3600 obr/min, rys. 5.13. Wynika stąd, że badana linia wałów wirnikowych jest bardziej wrażliwa na wymuszenia drgań giętych o częstości 50 Hz niż 60 Hz, o czym świadczą odpowiednie „sąsiadujące” wartości szóstej i siódmej częstości giętych drgań własnych wynoszące 46.486 i 54.183 Hz uzyskane według teorii belki Rayleigha oraz 45.761 i 52.741 Hz według teorii Timoshenki, tabela 4.1.

### 5.3.2 Analiza drgań giętno-skrętnych układu wałów wirnikowych turbosprężarki parowej

W poprzednim punkcie przedmiotem rozważań były gięte ustalone drgania liniowego modelu linii wałów maszyny wirnikowej wymuszane sygnałem okresowym. Należy pamiętać, że problem ten może być rozwiązywany równie efektywnie za pomocą innych znanych metod, na przykład metody macierzy przeniesienia lub metody elementów skończonych przy sprowadzeniu różniczkowych równań ruchu we współrzędnych uogólnionych do liniowego układu równań algebraicznych, [92]. Jednak celem rozważań w punkcie 5.3.1 było poglądowe zademonstrowanie techniki dyskretno-ciągłego modelowania dość złożonego układu mechanicznego przy wykorzystaniu makroelementów belkowych oraz przykładowe pokazanie sposobu rozwiązywania problemu drgań własnych i wymuszonych. Niemniej jednak, jak wspomiano powyżej, zalety modelowania dyskretno-ciągłego przy wykorzystaniu L-SMC i rozwiązania problemu metodą Fouriera nabierają szczególnego znaczenia w porównaniu z innymi znanymi metodami przy analizie dynamicznej układów mechanicznych bardziej złożonych z jednoczesnym uwzględnieniem kilku rodzajów drgań oraz różnego rodzaju nieliniowości, na przykład typu lokalnego, efektów parametrycznych i innych, [178]. Dlatego przedmiotem rozważań w tym punkcie są giętno-skrętne przejściowe i ustalone drgania badanego w pracy [185] dyskretno-ciągłego modelu układu wałów wirnikowych turbosprężarki parowej pokazanego na rys. 2 11.

Rozpatrywany obiekt składa się z pięciostopniowej turbiny parowej z wirnikami typu tarczowego oraz z wysięgnikowego wirnika sprężarki osadzonych na dwupodporowym wale stopniowym. W dyskretno-ciągłym modelu tego obiektu poszczególne cylindryczne odcinki wału są reprezentowane przez  $n$  L-SMC będących jednocześnie makroelementami belkowymi i odkształcalnymi skrętnie makroelementami prętowymi, jak pokazano na rysunku 2.11. Tarczowe wirniki turbiny i sprężarki zastąpiono przedstawionymi na rys. 2.8b sztywnymi pierścieniami zamocowanymi w sposób podatny w odpowiednich przekrojach poprzecznych wału za pomocą nieważkich membran umożliwiających obroty pierścieni wokół ich dowolnych średnic. W omawianym przypadku przyjęto identyczny model podpór łożyskowych jak w punkcie 5.3.1 dla wałów turbogeneratora, tj. w postaci pokazanych na rys. 5.9 oscylatorów o 2 stopniach swobody, w których założono własności anizotropowe i symetryczne. W badanym układzie jako źródło wymuszenia zewnętrznego założono resztkowe statyczne i dynamiczne niewyważenia, które w modelu mechanicznym przyjęto w formie skupionej w przekrojach osadzenia wszystkich wirników. Ponieważ resztkowe niewyważenia samego wału maszyny wirnikowej są zazwyczaj mało znaczące w porównaniu z niewyważeniami tarcz wirników, zaniedbano je w tych rozważaniach. W omawianym przypadku siły grawitacyjne oraz składowe stałe przenieszonego przez wał momentu skręcającego zostały pominięte.

Jako równania ruchu przekrojów poprzecznych L-SMC przyjęto równania (2.3) wirującej belki Rayleigha oraz równania (2.1) opisujące drgania skrętne. Równania te rozwiązywano przy geometrycznych warunkach brzegowych zgodności przemieszczeń poprzecznych i kątów nachylenia przekrojów skrajnych sąsiadujących ze sobą makroelementów (5.13 a,b) oraz zgodności przemieszczeń kątowych (3.2a) powodowanych skręcaniem wału. W omawianym przypadku analizy drgań giętno-skrętnych dynamiczne warunki brzegowe sformułowane dla tych przekrojów obok równań równowagi sił poprzecznych i momentów gnących obejmują również równania równowagi momentów skręcających wał. Dynamiczne warunki brzegowe odpowiadające przekrojom połączenia  $i-1$ -szego z  $i$ -tym makroelementem, w których jednocześnie są osadzone sztywne pierścienie reprezentujące wirniki, mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
& m_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + EI_i \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 v_i}{\partial x^3} - EI_{i-1} \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 v_{i-1}}{\partial x^3} - \rho I_i \frac{\partial^3 v_i}{\partial x \partial t^2} + \rho I_{i-1} \frac{\partial^3 v_{i-1}}{\partial x \partial t^2} + \\
& + 2j\Omega\rho I_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x \partial t} - 2j\Omega\rho I_{i-1} \frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x \partial t} = m_i \varepsilon_i \left[ \left( \Omega + \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 \exp\left(j\left(\frac{\pi}{2} - \tilde{\Theta}_i\right)\right) - \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} \exp(-j\tilde{\Theta}_i) \right], \\
& EI_i \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} - EI_{i-1} \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v_{i-1}}{\partial x^2} + \mu_i \left( \varphi_i - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) = 0, \tag{5.18} \\
& J_i \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + \mu_i \left( \varphi_i - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) - jI_{0i} \Omega \frac{d\varphi_i}{dt} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ jI_{yzi} \frac{d\bar{\varphi}_i}{dt} \exp(2j\tilde{\Theta}_i) + I_{xi}(t) \left( \Omega + \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right) \right] = 0, \\
& \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \operatorname{Re}[I_{xi}(t)] \cdot \operatorname{Re} \left[ \frac{d\varphi_i}{dt} \right] + \operatorname{Im}[I_{xi}(t)] \cdot \operatorname{Im} \left[ \frac{d\varphi_i}{dt} \right] + \frac{1}{2} m_i \varepsilon_i \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} \exp(j\tilde{\Theta}_i) + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \exp(-j\tilde{\Theta}_i) \right] \right\} + \\
& = I_{0i} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} + GJ_{0,i-1} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial x} - GJ_{0i} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta_i}{\partial x} \quad \text{dla } x = \sum_{j=1}^{i-1} l_j, \quad i = k,
\end{aligned}$$

gdzie:  $I_{xi}(t) = I_{xyi} \exp(j(\frac{\pi}{2} - \tilde{\Theta}_i)) + I_{xzi} \exp(-j\tilde{\Theta}_i)$ ,  $\tilde{\Theta}_i(x,t) = \Omega t + \theta_i(x,t) + \Delta_i$ .

W powyższych równaniach  $\varphi_i(t) = \phi_i(t) + j\psi_i(t)$  są funkcjami zespolonymi opisującymi przemieszczenia kątowe sztywnych pierścieni reprezentujących bezwładność wirników, gdzie  $\phi_i(t)$  i  $\psi_i(t)$  oznaczają odpowiednio przemieszczenia w płaszczyźnie pionowej  $x-y$  i poziomej  $x-z$ ,  $\varepsilon_i$ ,  $\Delta_i$  oznaczają odpowiednio mimośrodowość niewyważ statycznych i ich kąty fazowe względem osi obrotu  $Ox$ ,  $I_{xyi}$ ,  $I_{xzi}$  i  $I_{yzi}$  są masowymi momentami dewiacji określającymi niewyważ dynamiczne wirników, a symbol „ $\sim$ ” nad  $\varphi_i(t)$  oznacza funkcję zespoloną sprzężoną. Dynamiczne warunki brzegowe równowagi sił poprzecznych i momentów gnących w przekrojach skrajnych makroelementów odpowiadających podparciu w łożyskach mają postać identyczną z (5.13c), (5.13d) i (5.13e). Z kolei warunki równowagi momentów skręcających opisują równania typu (3.2b), które w omawianym przypadku wyrażają się następująco:

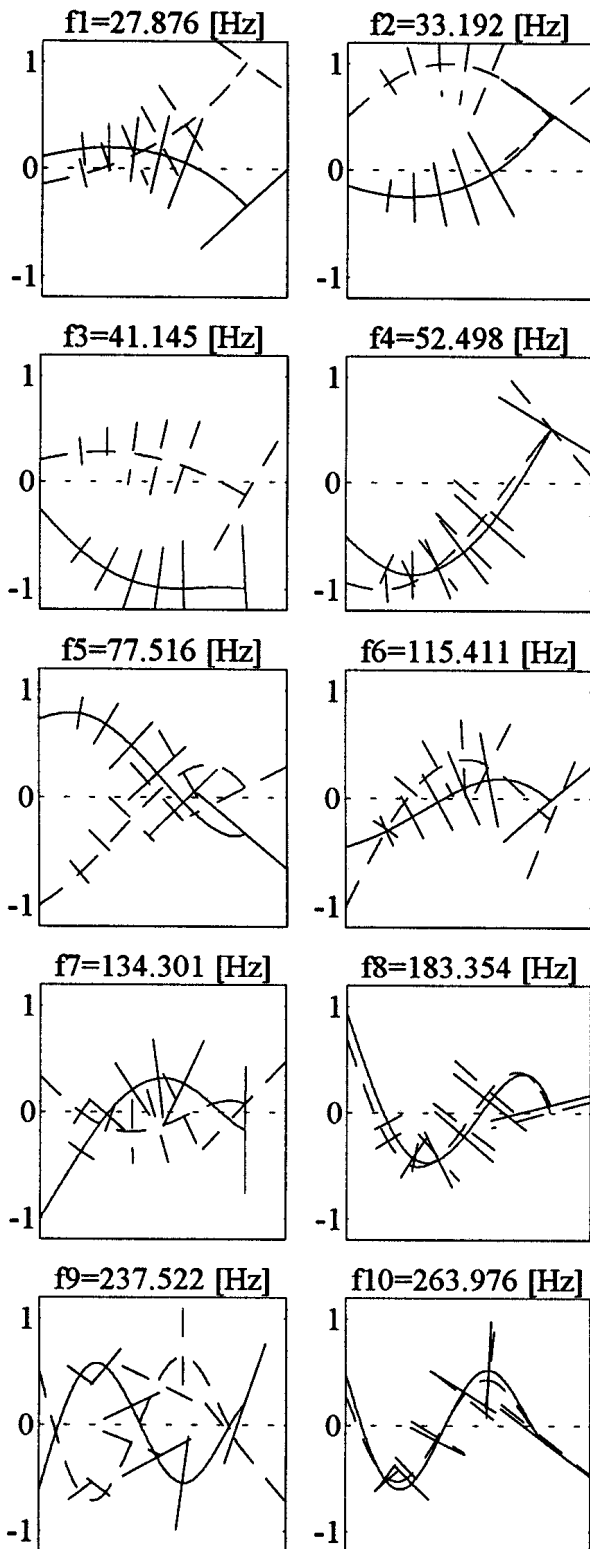
$$-I_{0i} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} - D_i \frac{\partial \theta_i}{\partial t} + GJ_{0,i-1} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta_{i-1}}{\partial x} - GJ_{0i} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta_i}{\partial x} = 0 \quad (5.19)$$

$$\text{dla } x = \sum_{j=1}^{i-1} l_j, \quad i = k, \quad k = 1, 2,$$

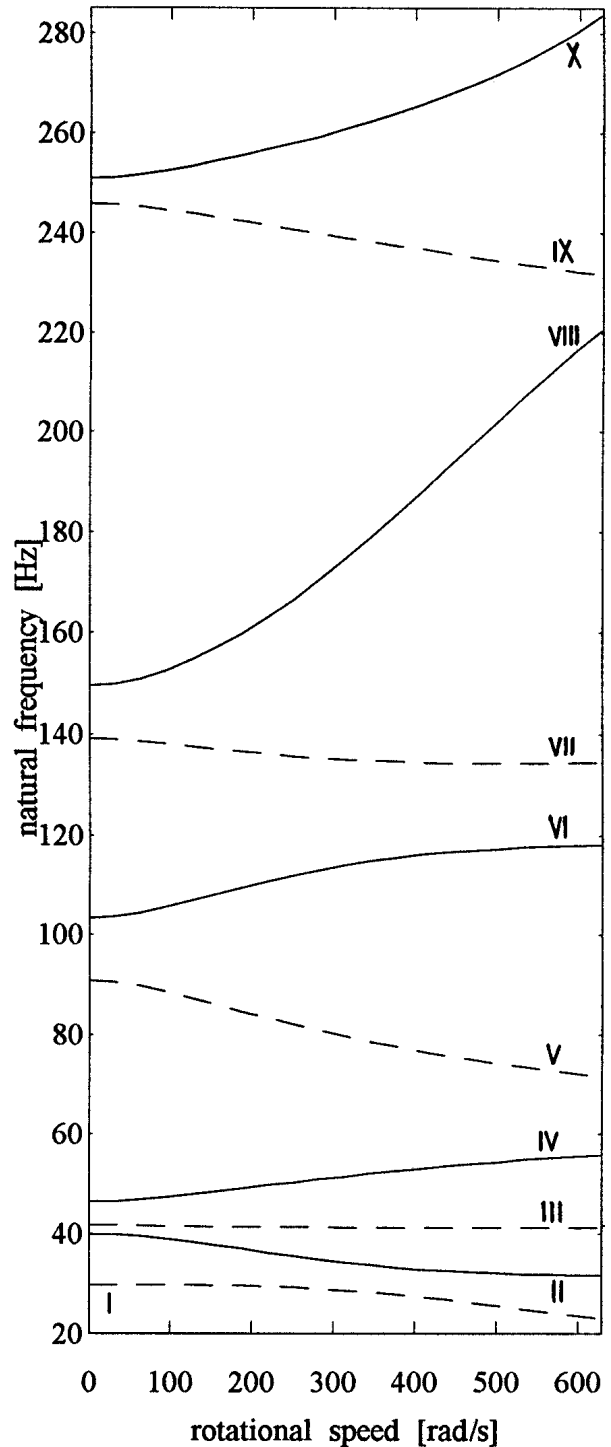
gdzie  $D_i$  oznaczają współczynniki tłumienia bezwzględne w łożyskach.

Ze względu na kołową symetrię kształtu przekrojów poprzecznych L-SMC, za pomocą których są reprezentowane poszczególne odcinki wału wirnikowego, drgania giętne układu są sprzężone z drganiami skrętnymi nie przez równania ruchu tych makroelementów (2.3) i (2.1), lecz przez równania dynamicznych warunków brzegowych (5.18) członami opisującymi resztkowe niewyważ statyczne i dynamiczne wirników turbiny i sprężarki. Należy przy tym zaznaczyć, że człony sprzęgające drgania giętne ze skrętnymi związane z niewyważami statycznymi mają postać analogiczną z odpowiednimi członami sprzęgającymi występującymi w równaniach różniczkowych zwyczajnych ruchu modeli dyskretnych układów wałów wirnikowych rozpatrywanych w pracach [193] lub [125]. W omawianym przypadku drgań giętno-skrętnych wału wirnikowego turbosprężarki problem sformułowano w sposób nieliniowy, nawet przy założeniu liniowych własności lepko-sprężystych podpór łożyskowych. Przyczyną tej nieliniowości jest charakter sprzężenia drgań giętnych z drganiami skrętnymi przez resztkowe niewyważi opisane w warunkach brzegowych (5.18). Po odrzuceniu małych wyższego rzędu tak sformułowany problem daje się sprowadzić do parametrycznego, gdzie wszystkie człony opisujące niewyważi statyczne i dynamiczne w (5.18) są mnożone przez funkcje harmoniczne oscylujące z częstością synchroniczną  $\Omega$  i podwójnie synchroniczną  $2\Omega$ . W celu przeprowadzenia analizy drgań własnych nietłumionych należy pominąć człony dyssypatywne i wymuszenia zewnętrznego oraz dokonać linearyzacji zgodnie z (3.19) w zastosowaniu do członów nieliniowych i parametrycznych. Ponieważ w omawianym przypadku wartości średnie członów parametrycznych mnożonych przez funkcje harmoniczne są równe zero, można przyjąć  $F_{av}(\Delta v(x,t))$  w (3.20) i wówczas w równaniach zlinearyzowanych warunków brzegowych (5.18) znikają wyrazy sprzęgające giętne drgania linii wałów z ich drganiami skrętnymi, przez co drgania giętne i skrętne badanego układu rozsprzęgają się. Prowadzi to do niezależnego rozwiązywania problemu giętnych i skrętnych drgań własnych. W rozpatrywanym przypadku zagadnienie giętnych drgań własnych jest rozwiązywane identycznie jak opisane w punkcie 5.3.1 dotyczące linii wałów turbogeneratorskiego przy wykorzystaniu teorii belki Rayleigha. Problem skrętnych drgań własnych wału wirnikowego turbosprężarki jest rozwiązywany za pomocą metody rozdzielania zmiennych w postaci (3.7) dającej w wyniku funkcje własne (3.9). Wówczas, zgodnie z metodyką postępowania opisaną w punkcie 3.2.1, w efekcie otrzymywane są dwa niezależne równania charakterystyczne (3.22) odpowiadające drganiom giętnym i skrętnym,

rozwiązanie których pozwala na wyznaczenie częstości i przyporządkowanych im funkcji własnych.

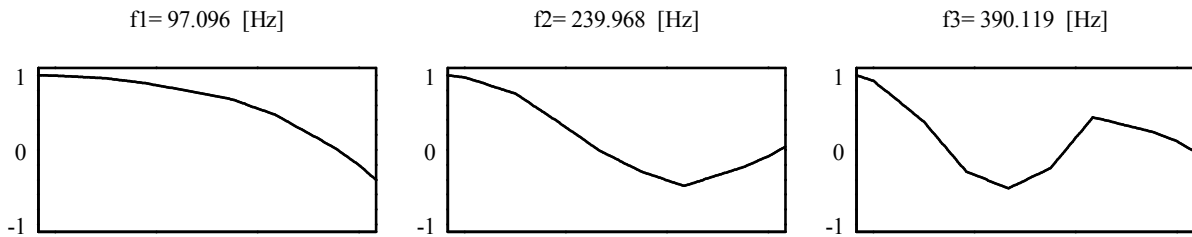


Rys. 5.14 Giętkie funkcje własne modelu wału wirnikowego turbosprężarki



Rys. 5.15 Częstości drgań własnych w funkcji prędkości kątowej wału





Rys. 5.16 Funkcje i częstotliwości własne skrętnych drgań modelu wału wirnikowego turbosprężarki

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla parametrów urządzenia o mocy 2000 kW, całkowitej masie układu wirującego ok. 1680 kg, długości wału 2.0 m i rozstawie łożysk 1.75 m. Bardziej szczegółowe dane tego obiektu można znaleźć w [185]. Analizy drgań własnych dokonano w zakresie częstości 0÷400 Hz oraz w zakresie prędkości kątowych wału 0÷630 rad/s w celu zbadania wpływu efektów żyroskopowych na wartości częstości drgań giętnych. Na rysunku 5.14 przedstawiono wykresy funkcji własnych wału wirnikowego turbosprężarki wraz z odpowiadającymi im częstościami giętnych drgań własnych otrzymane przy prędkości wirowania  $\Omega=377$  rad/s. Na tym rysunku liniami ciągłymi zaznaczono rzuty funkcji własnych w płaszczyźnie pionowej, a liniami przerywanymi rzuty w płaszczyźnie poziomej. Obliczenia wykazały, że w badanym zakresie częstości wał wirnikowy ma 10 postaci drgań własnych. Na rysunku 5.15 pokazano wykresy zależności wartości pierwszych 10 giętnych częstości własnych od prędkości wirowania  $\Omega$ . Z otrzymanych krzywych wynika, że spośród wszystkich otrzymanych częstości, jedynie wartość trzeciej jest prawie niezależna od efektów żyroskopowych w całym badanym zakresie prędkości kątowych 0÷630 rad/s. Natomiast wartości pierwszej, drugiej, piątej, siódmej i dziewiątej częstości maleją ze wzrostem  $\Omega$ , a wartości czwartej, szóstej, ósmej i dziesiątej częstości wyraźnie wzrastają. Odpowiadające im postacie drgań wykazują opisane m.in. w [60, 100, 101] typowe w przypadku wirników zawieszonych na anizotropowych podporach efekty precesji współbieżnej i przeciwbieżnej wywoływane siłami żyroskopowymi.

Funkcje własne drgań skrętnych i odpowiadające im częstości przedstawiono na rysunku 5.16. Z rysunku tego wynika, że w badanym zakresie częstości 0÷400 Hz badany układ ma jedynie trzy postacie drgań własnych.

W celu rozwiązania problemu drgań wymuszonych została zastosowana metodyka opisana w punkcie 3.2.2, gdzie człony wymuszenia zewnętrznego, żyroskopowe, tłumienia zewnętrznego oraz człony  $F_{\text{var}}(\Delta v(x,t),t)$  w (3.20) opisujące efekty parametryczne związane z resztkowymi niewyważeniami i opisujące nieliniowe własności łożysk ślizgowych rozwinięto w nieskończone szeregi względem ortogonalnych giętnych funkcji własnych wykorzystując wzory (3.25). W rozpatrywanym przypadku drgań giętno-skrętnych wału wirnikowego turbosprężarki otrzymano następujący układ parametrycznych, względnie nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych we współrzędnych Lagrange'a:

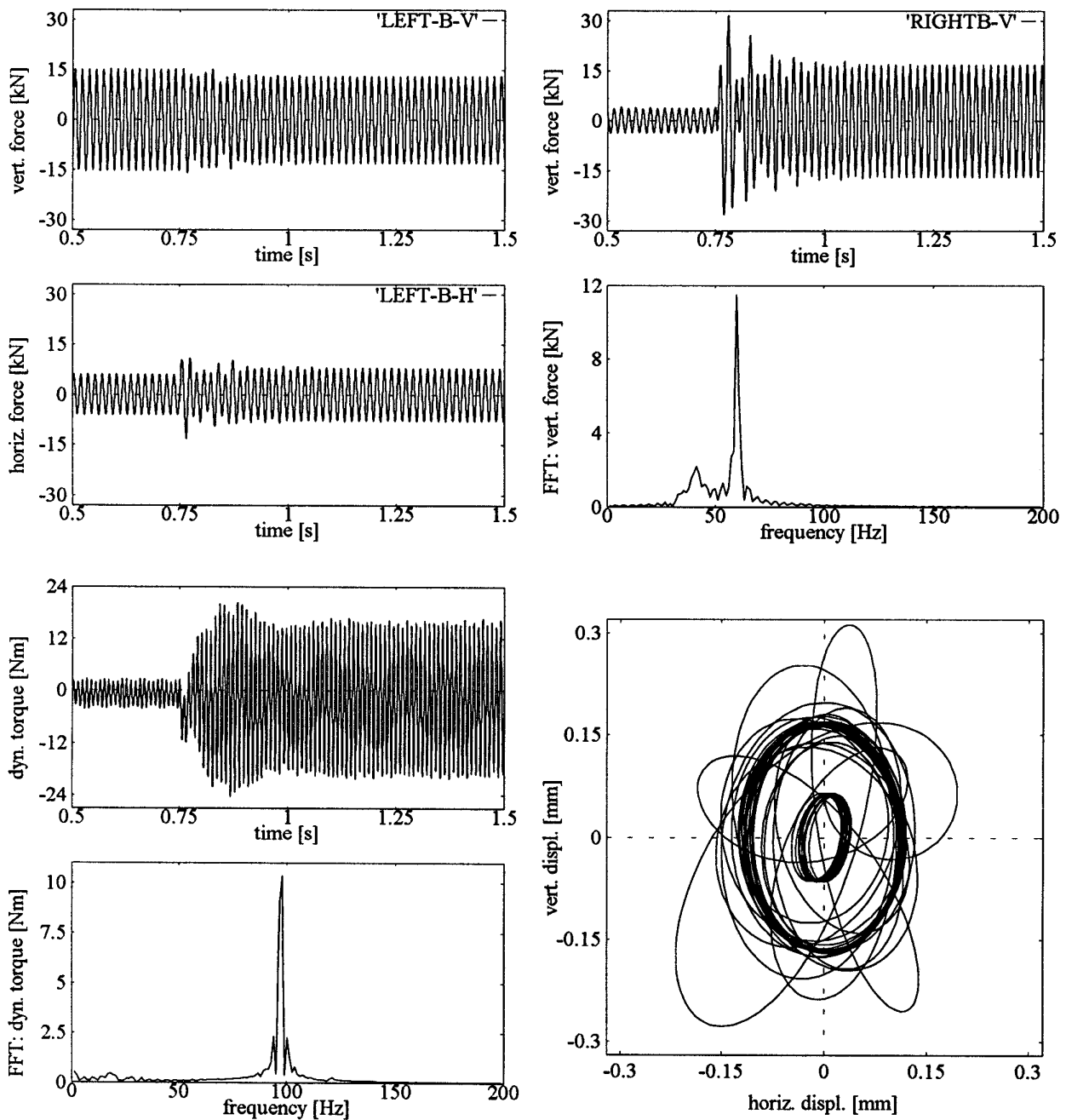
$$\mathbf{M}(\Omega t, t) \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{C}(\Omega, \Omega t, t) \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}(\Delta v(t)) \mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t, \Omega^2), \quad (5.20)$$

gdzie:

$$\mathbf{M}(\Omega t, t) = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_u(\Omega t, t), \quad \mathbf{C}(\Omega, \Omega t, t) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_g(\Omega) + \mathbf{C}_u(\Omega t, t), \quad \mathbf{K}(\Delta v) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_b(\Delta v(t)).$$

W tych równaniach symbole  $\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{K}_0$  oznaczają odpowiednio stałe, diagonalne macierze modalne bezwładności i sztywności,  $\mathbf{C}_0$  jest stałą symetryczną macierzą tłumienia zewnętrznego, a  $\mathbf{C}_g(\Omega)$  oznacza antysymetryczną macierz efektów żyroskopowych. Człony parametryczne opisujące niewyrównowazenia statyczne i dynamiczne są zawarte w symetrycznej macierzy  $\mathbf{M}_u(\Omega t, t)$  i w niesymetrycznej macierzy  $\mathbf{C}_u(\Omega t, t)$ . Nieliniowe własności podpór łożyskowych są wyrażone w symetrycznej macierzy  $\mathbf{K}_b(\Delta v(t))$ , a symbol  $\mathbf{F}(t, \Omega^2)$  jest wektorem sił wymuszenia zewnętrznego wywołanego niewyważeniami statycznymi. W celu uzyskania zadowalająco wysokiej dokładności

rozwiązania przy całkowaniu numerycznym układu (5.20) ograniczono liczbę równań do 24 uwzględniając tym samym 18 giętych i 6 skrętnych postaci drgań własnych w zakresie częstości 0÷800 Hz. W przykładach obliczeniowych przy dostatecznie małych wartościach przemieszczeń poprzecznych czopów łożyskowych występujących zwykle w normalnych warunkach pracy maszyny wirnikowej założono stałe sztywności i współczynniki tłumienia obu podpór, przez co przyjęto  $\mathbf{K}_b(\Delta v(t))=0$ . Odpowiedź dynamiczną badano w formie przebiegów pionowych i poziomych sił w łożyskach, dynamicznego momentu skręcającego przenoszonego przez odcinek wału między turbiną a wirnikiem sprężarki oraz w formie orbit przemieszczeń poprzecznych środków czopów łożyskowych i przemieszczeń środka obrotu wirnika sprężarki, co przedstawiono w postaci odpowiednich wykresów na rysunkach 5.17 i 5.18.

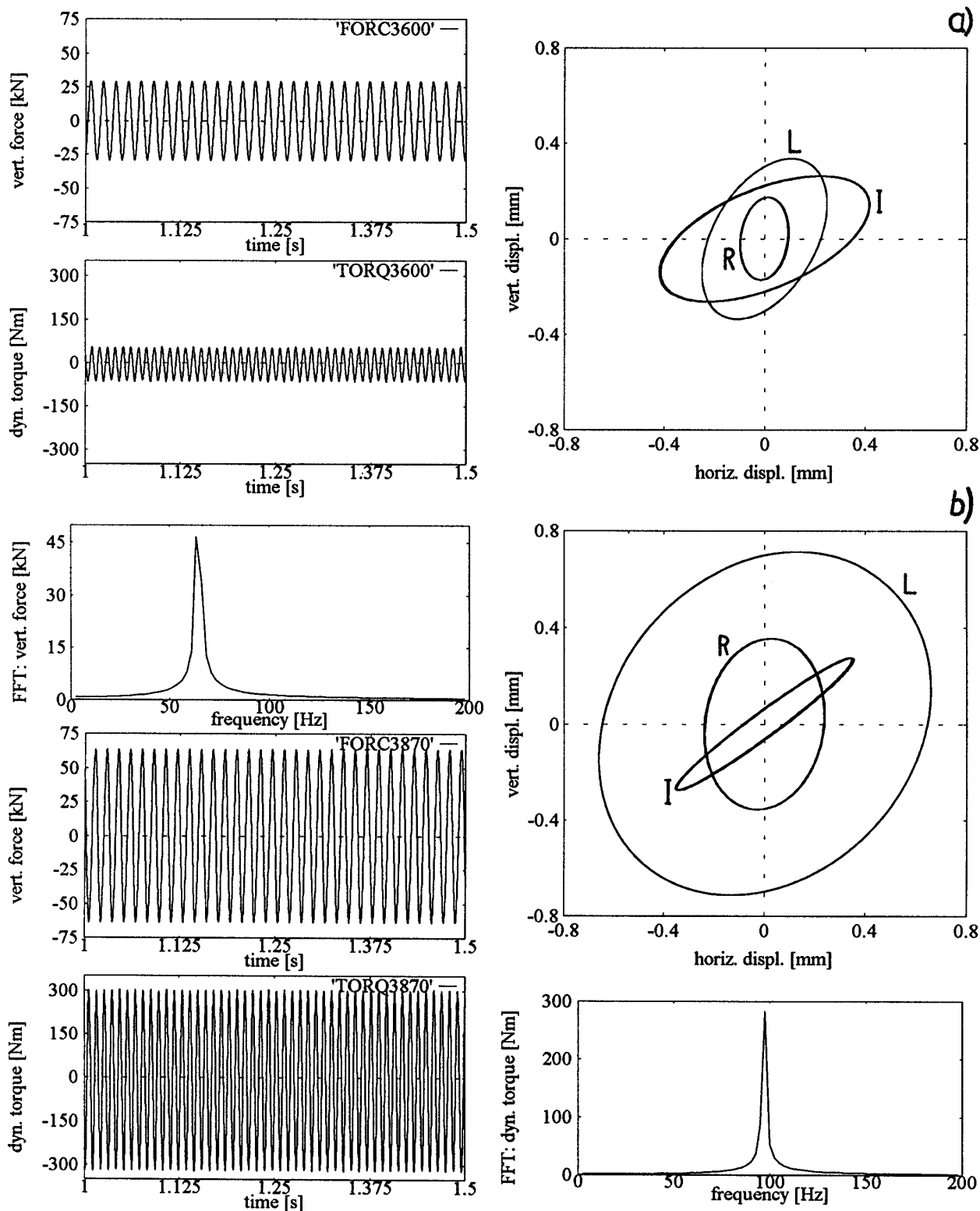


Rys. 5.17 Przejściowa odpowiedź dynamiczna modelu wału wirnikowego w wyniku wypadnięcia łopatki turbinowej

W pierwszym przykładzie obliczeniowym badano drgania przejściowe wywołane po 0.75 sekundy normalnej pracy turbosprężarki przy prędkości obrotowej  $\Omega=377 \text{ rad/s}=3600 \text{ obr/min}$

wypadnięciem łopatki z najcięższego wieńca łopatkowego osadzonego na piątej tarczy turbiny położonej najbliżej prawego łożyska, rys. 2.11, co spowodowało nagły 3.5-krotny wzrost jej niewywagi statycznej w stosunku do założonej wstępnie wartości dopuszczalnej normami wykonawczymi. Nagły istotny wzrost mimośrodowo niewywagi statycznej w pobliżu prawego łożyska spowodował zauważalne drgania przejściowe oraz następujący po nich znaczące zwiększenie amplitudy fluktuacji siły łożyskowej. Wówczas, jak wynika z przeprowadzonej szybkiej transformacji Fouriera, obok podstawowej składowej wymuszonych drgań ustalonych o częstotliwości  $f=\Omega/2\pi=60$  Hz została wzbudzona dodatkowa składowa przejściowa o częstotliwości  $\sim 41$  Hz odpowiadającej trzeciej postaci giętnych drgań własnych, rys. 5.14. W konsekwencji wzrost obciążenia dynamicznego prawego łożyska spowodowało ruch środka jego czopa po „nowej” większej orbicie przemieszczenia poprzecznego, co pokazuje rys. 5.17. Znacznemu zwiększeniu uległa również amplituda oscylacji dynamicznego momentu skręcającego o ustalonej częstotliwości  $\sim 97$  Hz odpowiadającej pierwszej postaci skrętnych drgań własnych wału wirnikowego turbosprężarki, rys. 5.16. Jak wynika z odpowiednich przebiegów zamieszczonych na rys. 5.17, wypadnięcie łopatki wirnika umieszczonego w pobliżu prawego łożyska spowodowało małoznaczne zaburzenia fluktuacji pionowej i poziomej siły w oddalonym łożysku lewym.

W drugim przykładzie obliczeniowym jest badany wpływ wartości resztkowych niewy wag statycznych na poziom drgań giętno-skrętnych w ustalonych warunkach pracy turbosprężarki. Jak pokazano na rys. 5.17, przy założonych wstępnie dopuszczalnych wartościach niewy wag, tj. przed chwilą wypadnięcia łopatki, amplituda fluktuacji dynamicznego momentu skręcającego jest bardzo mała, nie przekraczająca 3 Nm. Dla założonych 4-krotnie większych wartości mimośrodków niewy wag statycznych  $\varepsilon_i$  wszystkich wirników w stosunku do wartości dopuszczalnych przy niezmiennych ich kątach fazowych  $\Delta_i$  i przy nominalnej prędkości obrotowej wału  $\Omega=377$  rad/s  $=3600$  obr/min amplituda fluktuacji składowej pionowej siły czop-panew w lewym łożysku wzrosła nieznacznie w porównaniu z przypadkiem poprzednim, co pokazuje odpowiedni przebieg na rysunku 5.18a. Natomiast amplituda dynamicznego momentu skręcającego przenoszonego przez wał między turbiną a sprężarką wzrasta wówczas znacząco uzyskując wartość 60 Nm. Kiedy z kolei wzrasta prędkość kątowa wału  $\Omega$  zwiększają się istotnie amplitudy drgań giętno-skrętnych w całym układzie by osiągnąć maksimum przy  $\Omega=405.3$  rad/s  $=3870$  obr/min. Wtedy amplituda dynamicznego momentu skręcającego wzrasta ponad 5-krotnie przekraczając wartość 300 Nm przy częstotliwości  $\sim 97$  Hz, rys. 5.18b. Amplitudy drgań giętnych zwiększyły się również nieproporcjonalnie do wzrostu amplitud wymuszenia niewy wagami statycznymi. Przykładowo, amplituda fluktuacji siły pionowej w lewym łożysku stała się ponad 2-krotnie większa przy prędkości  $\Omega=3870$  obr/min w porównaniu z  $\Omega=3600$  obr/min, w przypadku której wartości niewy wag statycznych  $m_i \varepsilon_i \Omega^2$  wzrosły tylko 1.16 razy. Podobny progresywny wzrost amplitud odpowiedzi dynamicznej wykazują orbity przemieszczeń poprzecznych środków czopów lewego („L”) i prawego („R”) łożyska pokazane na rysunkach 5.18a i 5.18b. Natomiast przemieszczenia poprzeczne środka ciężkiego wirnika sprężarki (orbita „P”) przy  $\Omega=3870$  obr/min zwiększyły się nieznacznie w płaszczyźnie pionowej pozostając prawie niezmiennymi w płaszczyźnie poziomej w stosunku do  $\Omega=3600$  obr/min. Można zauważyć, że prędkość obrotowa wału  $\Omega=3870$  obr/min, przy której jest obserwowane owe maksimum odpowiedzi dynamicznej odpowiada częstotliwości wymuszenia niewy wagami  $f=\Omega/2\pi=64.5$  Hz  $\cong (\omega_{bII}+\omega_{n1})/2$ , gdzie  $\omega_{bII}=32.823$  Hz jest drugą częstotliwością własną drgań giętnych wału turbosprężarki przy  $\Omega=3870$  obr/min, rys. 5.14, a  $\omega_{n1}=97.096$  Hz oznacza pierwszą częstotliwość skrętnych drgań własnych rozpatrywanego układu, rys. 5.16. W związku z powyższym należy stwierdzić, że wówczas zgodnie z definicją podaną m.in. w [92], w przypadku wału wirnikowego badanej turbosprężarki zachodzi zjawisko kombinowanego rezonansu parametrycznego pierwszego rzędu typowe w układach wirujących i drgających giętno-skrętnie, których ruch jest opisany równaniami różniczkowymi o okresowo-zmiennych współczynnikach, co analizowano m. in. w pracach [193] i [125].



Rys. 5.18 Odpowiedź dynamiczna modelu wału wirnikowego turbosprężarki w ustalonych warunkach pracy przy (a)  $\Omega=3600$  obr/min i (b)  $\Omega=3870$  obr/min

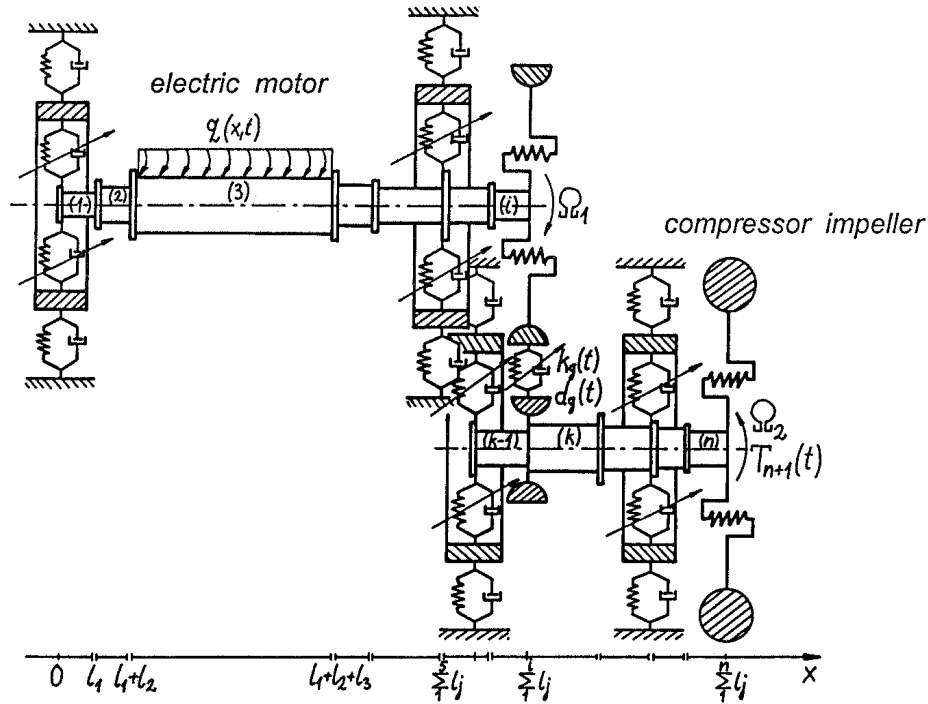
Przedstawione powyżej wyniki obydwu przykładów symulacji drgań wymuszonych wału wirnikowego turbosprężarki demonstrują możliwości obliczeniowe proponowanej w pracy metody modelowania zarówno do analizy dynamicznych procesów ustalonych, jak i przejściowych. Wystąpienie w drugim przykładzie znanego zjawiska teorii drgań parametrycznych w postaci rezonansu kombinowanego wykazywane dotychczas w literaturze zazwyczaj jedynie za pomocą

dyskretnych modeli układów mechanicznych potwierdza poprawność obliczeń przeprowadzanych przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego.

### 5.3.3 Analiza drgań giętno-skrętnych przekładniowego układu napędu maszyny wirnikowej

Omawiane w poprzednim punkcie drgania giętno-skrętne wału wirnikowego wzbudzone resztkowymi niewywagami statycznymi i dynamicznymi elementów wykonujących ruch obrotowy charakteryzuje silna, progresywna wręcz zależność intensywności efektów sprzężenia od wartości mimośrodków niewyrównoważeń statycznych czy wartości momentów dewiacji niewyrównoważeń dynamicznych. Oznacza to, że w miarę wzrostu niewyważ elementu wirującego wraz ze zwiększaniem się amplitud drgań giętnych wałów wymuszanych tymi niewywagami zwiększają się równocześnie amplitudy drgań skrętnych. W rzeczywistości stopień niewyrównoważenia statycznego i dynamicznego maszyn wirnikowych jest znacznie ograniczony rygorystycznymi normami wykonawczymi, przez co intensywność sprzężenia drgań giętnych ze skrętnymi jest niewielka i dlatego w większości przypadków zastosowań technicznych oba wymienione rodzaje drgań mogą być rozpatrywane niezależnie, na przykład jak omawianych w punktach 4.1.3 skrętnych i 5.3.1 giętnych drgań linii wałów wirnikowych turbogeneratorów energetycznych. Stosunkowo dużą, niezależną od wartości niewyważ intensywność sprzężenia drgań giętnych ze skrętnymi cechuje mechaniczne układy wirujące z przekładniami zębatymi charakteryzujące się przynajmniej częściowym pokrywaniem się zakresów rezonansowych częstości drgań giętnych i skrętnych, [44, 98, 127]. Przyczyną tego sprzężenia jest występowanie podczas normalnej pracy urządzenia wywoływanych przenoszonym dynamicznym momentem skręcającym znacznych zmiennych w czasie sił w zazębieniach przekładni, które działają w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu wałów powodując wymuszenie drgań giętnych. Zjawisko to jest obserwowane w szerokiej klasie występujących w praktyce układach napędu maszyn i pojazdów, a w szczególności w szybkoobrotowych układach napędu maszyn wirnikowych. Dlatego przedmiotem rozważań w niniejszym punkcie są badane w pracy [180] sprzężone giętno-skrętne drgania przekładniowego układu napędowego maszyny wirnikowej napędzanej silnikiem elektrycznym.

Układ ten składa się z dwóch dwupodporowych wałów stopniowych połączonych wzajemnie jednostopniową multiplikującą przekładnią zębatą o zębach prostych i przełożeniu 5:1. Wał napędzający łączy za pośrednictwem sprzęgła sztywnego tzw. „długi wirnik” silnika elektrycznego z osadzonym wysięgnikowo czynnym kołem zębatym przekładni. Na wale napędzanym osadzony jest zębnik przekładni, z którego napęd jest przekazywany za pośrednictwem drugiego sprzęgła sztywnego na wysięgnikowy wirnik maszyny roboczej, na przykład sprężarki, pompy lub dmuchawy. Przyjęto, że oba wały są usytuowane poziomo w jednej płaszczyźnie pionowej  $x-y$ . Zbudowany według przyjmowanych w pracy założeń dyskretno-ciągły model mechaniczny omawianego układu napędowego jest przedstawiony na rysunku 5.19. W tym modelu poszczególne cylindryczne odcinki wałów oraz wirnika silnika elektrycznego są reprezentowane belkowymi L-SMC odkształcalnymi giętnie i skrętnie. Z kolei tarcze sprzęgieł, kołnierze wałów i bezwładność zębniaka zastąpiono tarczami sztywnymi, jak pokazano na rys. 2.8a. Natomiast napędzające koło zębate oraz wirnik maszyny napędzanej są reprezentowane przez sztywne pierścienie osadzone na wałach w sposób podatny za pomocą nieważkich membran zgodnie z modelem pokazanym na rys. 2.8b. Założono identyczne jak poprzednio modele czterech podpór łożyskowych przedstawione na rys. 5.9, w tym wypadku o własnościach anizotropowych i symetrycznych. Podobnie jak w układach napędowych rozpatrywanych w punkcie 4.1.2, przyjęto okresową zmienność w funkcji kąta obrotu wału sztywności  $k_g(t)$  zazębienia przekładni powodowaną zmieniającą się liczbą par zębów będących podczas pracy układu w chwilowym przyporze.



Rys. 5.19 Diskretno-ciągły model mechaniczny przekładniowego układu napędu maszyny wirnikowej

Tak jak w przypadku badanego w punkcie 5.3.2 wału wirnikowego turbosprężarki, jako równania ruchu przekrojów poprzecznych L-SMC przyjęto równania (2.3) wirującej belki Rayleigha oraz równania (2.1) opisujące drgania skrętne. Równania te rozwiązywano przy geometrycznych warunkach brzegowych zgodności translacyjnych przemieszczeń poprzecznych i przemieszczeń kątowych przekrojów skrajnych sąsiadujących ze sobą makroelementów. W tych przekrojach dynamiczne warunki brzegowe obejmują obok równań równowagi sił poprzecznych i momentów zginających również równania równowagi momentów skręcających wały. W związku z powyższym, geometryczne warunki zgodności mają w omawianym przypadku przekładniowego układu napędu maszyny wirnikowej postać (5.13 a,b) i (3.2a). Wspólną postać (5.13c), (5.13d) i (5.19) mają dynamiczne warunki brzegowe opisujące połączenia sąsiadujących ze sobą L-SMC wraz z osadzeniem w tych przekrojach tarcz sztywnych i podparciem w łożyskach. Dynamiczne warunki brzegowe sformułowane dla przekroju osadzenia wirnika maszyny napędzanej mają postać analogiczną do (5.18) i (5.19). W omawianym przypadku formę szczególną mają dynamiczne warunki brzegowe opisujące ruch przekrojów działania przekładni, a więc warunki wzajemnego połączenia obu wałów wirnikowych układu napędowego:

- w przekroju wysięgnikowego osadzenia napędzającego koła zębatego w prawym przekroju skrajnym  $i$ -tego L-SMC pierwszego wału:

$$\begin{aligned}
 m_{i1} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - EI_i \left( 1 + e \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^3 v_i}{\partial x^3} + \rho I_i \frac{\partial^3 v_i}{\partial x \partial t^2} - 2j\Omega_i \rho I_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x \partial t} + \\
 + \exp(j\alpha) \cdot \left( k_g(t) \cdot \Gamma_{ik}(x,t) + d_g(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ik}(x,t) \right) = \\
 = m_{i1} \varepsilon_{i1} \left[ \left( \Omega_i + \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \right)^2 \exp\left( j \left( \frac{\pi}{2} - \Theta_i \right) \right) - \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} \exp(-j\Theta_i) \right],
 \end{aligned} \tag{5.21a}$$

$$\begin{aligned}
& -EI_i \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \mu_{i1} \left(\varphi_{i1} - \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) = 0, \\
& J_{i1} \frac{d^2 \varphi_{i1}}{dt^2} + \mu_{i1} \left(\varphi_{i1} - \frac{\partial v_i}{\partial x}\right) - jI_{0i1} \Omega_i \frac{d\varphi_{i1}}{dt} - \\
& - \frac{\partial}{\partial t} \left[ jI_{yzi1} \frac{d\bar{\varphi}_{i1}}{dt} \exp(2j\tilde{\Theta}_i) + I_{xii1}(t) \left(\Omega_i + \frac{\partial \theta_i}{\partial t}\right) \right] = 0, \tag{5.21a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& I_{0i1} \frac{\partial^2 \theta_i}{\partial t^2} + GJ_{0i} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta_i}{\partial x} + r_{i1} \left(k_g(t) \cdot \Gamma_{ik}(x,t) + d_g(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ik}(x,t)\right) = \\
& = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \operatorname{Re} [I_{xii1}(t)] \cdot \operatorname{Re} \left[ \frac{d\varphi_{i1}}{dt} \right] + \operatorname{Im} [I_{xii1}(t)] \cdot \operatorname{Im} \left[ \frac{d\varphi_{i1}}{dt} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} m_{i1} \varepsilon_{i1} \left[ \frac{\partial v_i}{\partial t} \exp(j\tilde{\Theta}_i) + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} \exp(-j\tilde{\Theta}_i) \right] \right\},
\end{aligned}$$

- w przekroju osadzenia zębniaka w lewym przekroju skrajnym  $k$ -tego L-SMC drugiego waju:

$$\begin{aligned}
& m_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + EI_k \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 v_k}{\partial x^3} - EI_{k-1} \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 v_{k-1}}{\partial x^3} - \rho I_k \frac{\partial^3 v_k}{\partial x \partial t^2} + \rho I_{k-1} \frac{\partial^3 v_{k-1}}{\partial x \partial t^2} + \\
& + 2j\Omega_k \rho I_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial x \partial t} - 2j\Omega_k \rho I_{k-1} \frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x \partial t} - \exp(j\alpha) \cdot \left(k_g(t) \cdot \Gamma_{ik}(x,t) + d_g(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ik}(x,t)\right) = \\
& = m_k \varepsilon_k \left[ \left(\Omega_k + \frac{\partial \theta_k}{\partial t}\right)^2 \exp\left(j\left(\frac{\pi}{2} - \tilde{\Theta}_k\right)\right) - \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial t^2} \exp(-j\tilde{\Theta}_k) \right], \tag{5.21b}
\end{aligned}$$

$$- J_k \frac{\partial^3 v_k}{\partial x \partial t^2} + EI_k \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x^2} - EI_{k-1} \left(1 + e \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v_{k-1}}{\partial x^2} + jI_{0k} \Omega_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial x \partial t} = 0,$$

$$\begin{aligned}
& I_{0k} \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial t^2} + GJ_{0,k-1} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta_{k-1}}{\partial x} - GJ_{0k} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta_k}{\partial x} - \\
& - r_{k2} \left(k_g(t) \cdot \Gamma_{ik}(x,t) + d_g(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_{ik}(x,t)\right) = \\
& = \frac{1}{2} m_k \varepsilon_k \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial v_k}{\partial t} \exp(j\tilde{\Theta}_k) + \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial t} \exp(-j\tilde{\Theta}_k) \right] \quad \text{dla } x = \sum_{j=1}^i l_j = \lambda_k,
\end{aligned}$$

gdzie:  $\Gamma_{ik}(x,t) = \cos \alpha \cdot \operatorname{Re} [v_i(x,t) - v_k(x,t)] + \sin \alpha \cdot \operatorname{Im} [v_i(x,t) - v_k(x,t)] +$   
 $+ r_{i1} \theta_i(x,t) - r_{k2} \theta_k(x,t),$

$$I_{x1l}(t) = I_{xy1l} \exp\left(j\left(\frac{\pi}{2} - \tilde{\Theta}_i\right)\right) + I_{xz1l} \exp(-j\tilde{\Theta}_i), \quad \tilde{\Theta}_m(x,t) = \Omega_m t + \theta_m(x,t) + \Psi_m, \quad m = i, k.$$

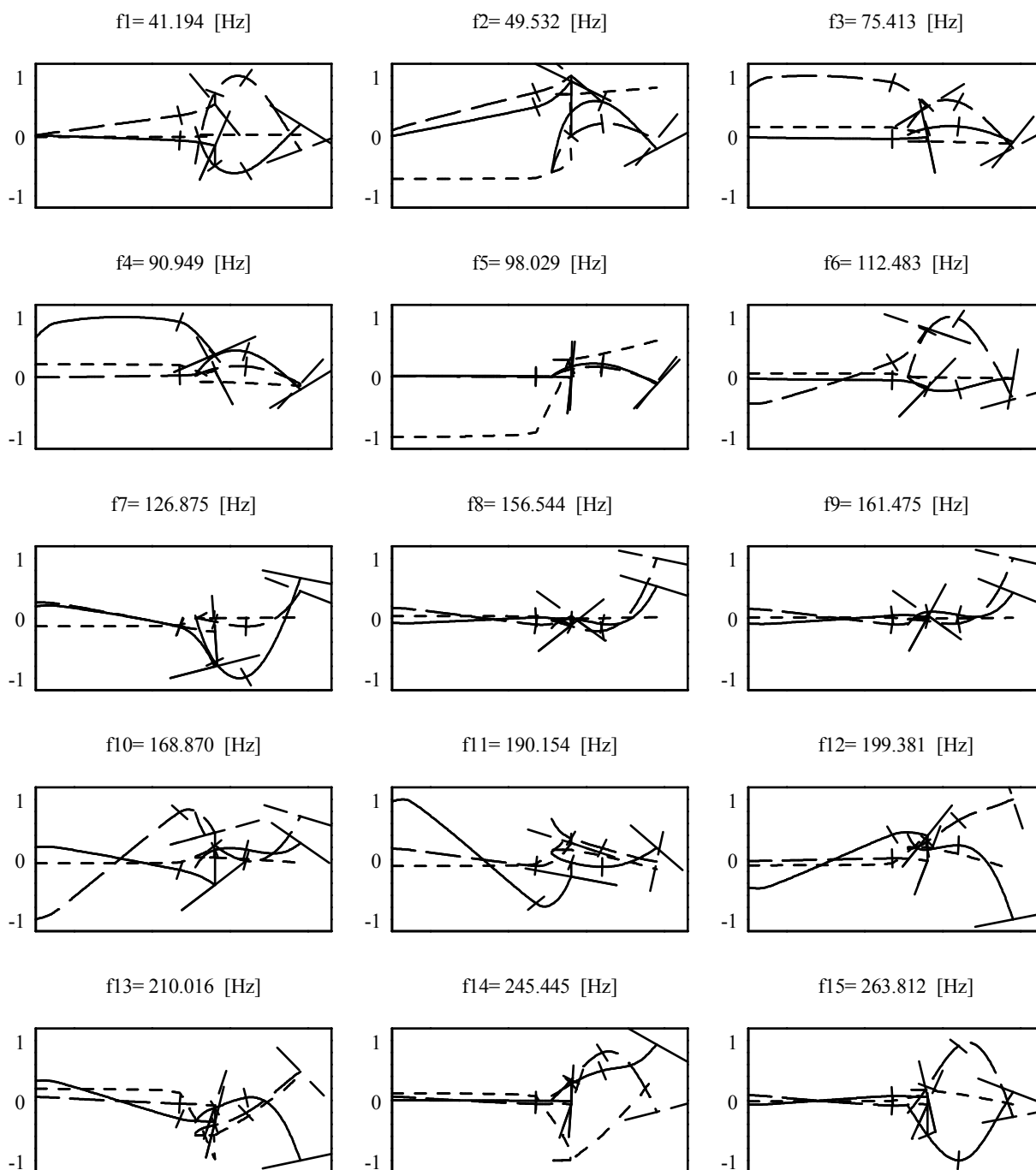
W powyższych równaniach  $k_g(t)$ ,  $d_g(t)$  oznaczają odpowiednio okresowo zmienną sztywność zazębienia oraz w ogólnym przypadku zmienny współczynnik tłumienia zewnętrznego przekładni,  $\alpha$  jest kątem przyporu, a  $r_{i1}$ ,  $r_{k2}$  są promieniami kół podziałowych koła zębatego i zębniaka. Pozostałe oznaczenia i symbole są takie same jak w odpowiednich wzorach zamieszczonych powyżej.

W omawianym przypadku układu napędu maszyny wirnikowej sprzężenie drgań giętnych ze skrętnymi jest podobnie jak w punkcie 5.3.2 dla wału wirnikowego turbosprężarki opisane warunkami brzegowymi, przy czym obok zawartych w związkach typu (5.18) sprzęgających członach niewyrównoważenia statycznego i dynamicznego dodatkowym źródłem sprzężenia jest wyrażone w równaniach (5.21 a,b) oddziaływanie zazębienia przekładni. Linearyzacji tak sformułowanego problemu w celu przeprowadzenia analizy drgań własnych nietłumionych dokonuje się identycznie jak w przypadku modelu wału wirnikowego turbosprężarki stosując podział (3.19). Element dodatkowy stanowi tu wykorzystanie (3.19) do członów opisujących lepko-sprężyste własności zazębienia przekładni występujących w warunkach brzegowych (5.21 a,b). Wówczas,  $f_{av} = \text{const}$  w (3.20) staje się średnią składową stałą sztywności zazębienia  $k_g(t)$ , a  $f_{var}(\Delta v(x,t), t) = f_{var}(t)$  składową okresowo-zmienną wyrażaną w formie harmoniczej lub trapezoidalnej zgodnie z [95, 98]. W efekcie, wskutek pozostawiania dominującej składowej stałej  $f_{av}$  sztywności  $k_g(t)$  w (5.21 a,b) drgania giętne i skrętne układu zlinearyzowanego pozostają nadal wzajemnie ze sobą sprzężone. Dlatego nie można tu zagadnienia własnego drgań giętnych i skrętnych rozpatrywać niezależnie, lecz jako problem własnych drgań sprzężonych giętno-skrętnych. Wykorzystanie do tego celu tych samych jak do omawianych w punkcie 5.3.2 drgań giętno-skrętnych wału turbosprężarki rozwiązań równań ruchu (3.7) oraz funkcji własnych (3.11) i (3.9), odpowiednio przy zginaniu i skręcaniu, prowadzi do jednego wspólnego równania charakterystycznego typu (3.21) opisującego sprzężone własne drgania giętno-skrętne.

W omawianym przypadku układu napędu maszyny wirnikowej równanie charakterystyczne (3.21) rozwiązano w zakresie częstotliwości  $0 \div 300$  Hz przy prędkości kątowej wału napędzającego  $\Omega_1 = 150$  rad/s i otrzymano 15 giętno-skrętnych postaci drgań własnych, których funkcje własne i odpowiadające im częstotliwości przedstawiono na rysunku 5.20. Na tym rysunku liniami ciągłymi zaznaczono rzuty składowej giętniej kolejnych funkcji własnych na płaszczyznę pionową, liniami przerywanymi – rzuty składowej giętniej na płaszczyznę poziomą, a linie kropkowe oznaczają składowe skrętne funkcji własnych. Spośród otrzymanych w badanym zakresie częstości 15 postaci drgań własnych można wyróżnić typowe postacie giętno-skrętne, na przykład drugą, trzynastą i czternastą, w przypadku których wszystkie składowe funkcje własnych, tj. giętne w płaszczyźnie pionowej i poziomej oraz składowe skrętne, są wyraźnie różne od zera. Postać piątą jest postacią skrętną, tzn. o dominującej składowej skrętnej i bliskich zeru składowych giętnych, a postacie pozostałe są postaciami typowo giętnymi o składowych skrętnych bliskich zeru, rys. 5.20.

W pracy [180] w przypadku omawianego przekładniowego układu napędu maszyny wirnikowej badano wpływ efektów żyroskopowych na wartości częstości giętno-skrętnych drgań własnych w zakresie prędkości kątowej wału napędzającego  $\Omega_1 = 0 \div 250$  rad/s, tj.  $\Omega_2 = 0 \div 1250$  rad/s dla wału napędzanego. Mimo w miarę wysokich prędkości kątowych obu wałów oraz przyjętych w obliczeniach stosunkowo dużych biegunowych masowych momentów bezwładności wirników maszyny napędzanej, silnika elektrycznego i napędzającego koła zębatego, w przeciwieństwie do badanego w poprzednim punkcie wału wirnikowego turbosprężarki, wpływ efektów żyroskopowych na wartości pierwszych 15 częstości drgań własnych okazał się mało znaczący.





Rys. 5.20 Funkcje i częstotliwości własne sprzężonych drgań giętno-skrętnych dyskretno-ciągłego modelu przekładniowego układu napędu maszyny wirnikowej

Analizy drgań wymuszonych omawianego przekładniowego układu napędu maszyny wirnikowej nie przeprowadzono. Niemniej jednak, należy stwierdzić, że przy wykorzystaniu rozwiązania Fouriera w postaci rozwinięć składowych giętnych i skrętnej w nieskończone szeregi względem ortogonalnych funkcji własnych oraz przy wykorzystaniu rozwinięć w szeregi wymuszeń zewnętrznych, członów parametrycznych, nieliniowych, żyroskopowych i tłumienia zewnętrznego dokonanie analizy drgań wymuszonych nie stanowi trudności, analogicznie jak to ma miejsce w przypadku układów mechanicznych rozpatrywanych w punktach poprzednich i następnym.

## 6. Zastosowanie modelowania dyskretno-ciągłego do analizy drgań układów jezdnych pojazdów szynowych

Rozważania przeprowadzone w kolejnych punktach poprzedniego rozdziału dotyczyły zjawisk badanych przez wielu autorów za pomocą innych metod, na przykład klasycznego modelowania dyskretnego lub metody elementów skończonych. Niemniej jednak głównym celem tych rozważań było zademonstrowanie możliwości budowania samych modeli dyskretno-ciągłych do analizy drgań giętnych i giętno-skrętnych oraz potwierdzenie poprawności wykonywanych obliczeń. W niniejszym rozdziale proponowana w pracy metoda modelowania dyskretno-ciągłego przy wykorzystaniu lepko-sprężystych makroelementów ciągłych (L-SMC) zostanie zastosowana do bardziej złożonych strukturalnie układów mechanicznych wykonujących kilka rodzajów drgań w różny sposób wzajemnie ze sobą sprzężonych. Obiektem rozważań będą wybrane układy jezdne pojazdów szynowych, w przypadku których zostanie przedstawiona nie tylko sama technika modelowania i wykonywania obliczeń, lecz również oryginalne, interesujące pod względem poznawczym wyniki.

Analizę drgań pojazdów szynowych przeprowadzało wielu autorów od wielu lat w celu zbadania charakteru i następstw dynamicznego oddziaływania układów jezdnych tych pojazdów z torem kolejowym. Tradycyjnym przedmiotem badań są warunki komfortu oraz bezpieczeństwa jazdy, czyli możliwości wykołajenia lub wypadnięcia z toru. Dokonuje się ich w dostatecznym do tych potrzeb zakresie tzw. „niskich” częstotliwości drgań 0÷30 Hz. W tym zakresie częstości dynamicznego oddziaływania pojazdu szynowego z torem przyjmowane modele mechaniczne z jednej strony powinny obejmować przynajmniej jeden cały pojazd szynowy, na przykład wagon lub lokomotywę, a z drugiej strony z dostateczną do celów technicznych dokładnością wystarczy przy modelowaniu traktować zestawy kołowe, ramy wózków, pudło wagonu względnie lokomotywy, jak również sam tor kolejowy jako ciała nieodkształcalne uwzględniając jedynie podatność pierwotnego i wtórnego usprężynowania pojazdu. W badaniach tego rodzaju zwraca się na ogół szczególną uwagę na geometrię toru kolejowego, tj. promienie krzywizny, wartości przechyłek, oraz na wszelkiego rodzaju nierówności będące źródłem wymuszeń typu kinematycznego. Ponadto, niezwykle istotnym czynnikiem wpływającym na otrzymanywane wyniki są własności modelu kontaktu mechanicznego między kołami jezdnyymi a szynami.

Obserwowanemu w ciągu ostatnich 20÷25 lat postępowi technologicznemu w kolejnictwie, a przede wszystkim stałemu wzrostowi prędkości podróży pociągów pasażerskich oraz zwiększaniu obciążeń osi wagonów pociągów towarowych towarzyszą liczne zjawiska niekorzystne do prawidłowej eksploatacji pojazdów szynowych i torów. Należą do nich przedwczesne zużywanie się bieżni kół jezdnych w postaci tzw. poligonalizacji (lub wielobokowania), zużycie faliste (korugacje) powierzchni toczonego szyn, liczne i zbyt częste uszkodzenia zmęczeniowe elementów jezdnych pojazdów i torów oraz generacja uciążliwych dla środowiska naturalnego efektów akustycznych. Poszukiwanie przyczyn tych zjawisk wraz z prognozowaniem tempa narastania ich negatywnych następstw wymagają prowadzenia badań nad dynamicznym oddziaływaniem pojazdu szynowego z torem w zakresie wyższych częstotliwości, tzn. od 30 do 500÷1000 Hz lub nawet do kilku tysięcy Hertzów. Wówczas w przyjmowanych modelach mechanicznych z jednej strony należy traktować przede wszystkim zestawy kołowe i tor jako elementy odkształcalne, a z drugiej strony, ze względu na występujące efekty słabych sprzężeń drgań powodowane stosunkowo małą sztywnością usprężynowania pojazdu, rozważania można ograniczyć do oddziaływania z torem samego wózka kolejowego lub nawet do pojedynczego zestawu kołowego.

Dotychczas do budowy modeli układu pojazd szynowy - tor spełniających wymienione powyżej kryteria wykorzystywano zazwyczaj tzw. metodę układów wielocłonowych (z ang. multibody systems (MBS)), tj. klasyczne modelowanie dyskretno z możliwością wprowadzania brył odkształcalnych, [43, 46, 63, 152], oraz metodę elementów skończonych, m. in. w [2, 40, 43, 51,

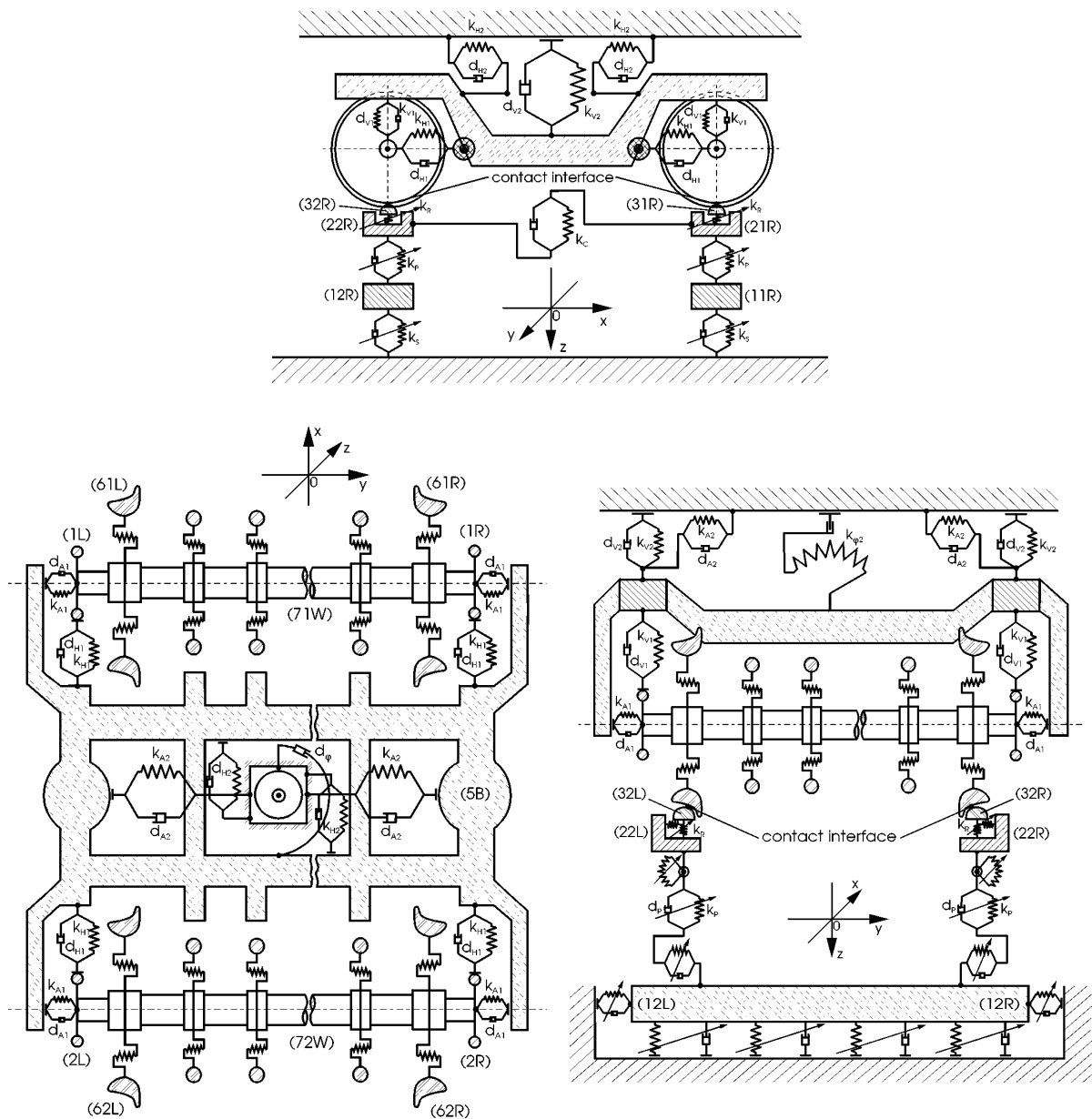
52, 72, 131, 152]. W przypadku zastosowania metody układów wieloczłonowych (MBS) podatność elementów odkształcalnych, na przykład zestawów kołowych, bywa traktowana w sposób bardzo uproszczony, gdzie uwzględnia się jedynie ich pierwsze, podstawowe postacie drgań własnych. Natomiast metoda elementów skończonych (MES) pozwala na dokładniejszą reprezentację badanego obiektu, tj. pojazdu szynowego i toru, niemniej prowadzi do modeli mechanicznych o dużej, bądź bardzo dużej liczbie stopni swobody. W celu nadania większej efektywności obliczeniowej modeli MES do potrzeb symulacji numerycznej dynamicznego oddziaływania układu pojazd szynowy - tor z uwzględnieniem wszelkich nieliniowości, w tym silnie nieliniowego charakteru kontaktu między kołem jezdnym a szyną, stosowana jest zazwyczaj redukcja liczby stopni swobody modelu wyjściowego od kilkuset lub kilku tysięcy do kilku bądź co najwyżej kilkunastu kosztem dokonywania wielu niezbędnych uproszczeń mogących wprowadzać znaczące niekiedy niedokładności otrzymywanych w efekcie wyników. Dlatego, by uniknąć wymienionych powyżej mankamentów charakteryzujących metody stosowane przez innych autorów do badania dynamicznego oddziaływania układów jezdnych pojazdów szynowych z torem w zakresie tzw. „średnich” częstotliwości  $30 \div 1000$  Hz, w pracach [179, 181, 183, 186-189] przyjęto dyskretno-ciągłe modele mechaniczne z wykorzystaniem lepko-sprężystych makroelementów ciągłych (L-SMC).

## **6.1 Założenia do dyskretno-ciągłych modeli mechanicznych układów jezdnych pojazdów szynowych i toru kolejowego**

Przedmiotem rozważań są dyskretno-ciągłe modele mechaniczne wybranych typów wózków kolejowych oddziaływające z torem we wspomnianym powyżej zakresie średnich częstości. W pokazanym na rysunku 6.1 modelu typowego wózka tocznego wagonu nowoczesnego pociągu pasażerskiego osie zestawów kołowych są reprezentowane przez sztywne osiowo, a odkształcalne giętnie i skrętnie belki ciągłe w formie wałów stopniowych. Każdemu cylindrycznemu segmentowi tych belek odpowiada jeden belkowy L-SMC odkształcalny również skrętnie. Koła jezdne i tarcze hamulcowe są zastępowane przez sztywne pierścienie zamocowane w odpowiednich przekrojach osi za pomocą nieważkich membran o izotropowych własnościach sprężystych, zgodne z modelem tarczy wirnikowej pokazanym na rys. 2.8b. W omawianym przypadku te membrany umożliwiają obroty pierścieni wokół swoich dowolnych średnic oraz przemieszczenia translacyjne pierścieni wzdłuż osi zestawów kołowych. Bezwładność obudów łożysk (zwanych również maźnicami) jest reprezentowana przez bryły sztywne (1L), (2L) i (1R), (2R) zamocowane odpowiednio na lewych i prawych końcach osi obu zestawów. Osie zestawów kołowych są podparte na swoich końcach w kierunku pionowym, poprzecznym, tzn. poziomym prostopadle do osi toru, i wzdłużnym, tj. poziomym równoległe do osi toru, za pomocą nieważkich elementów lepko-sprężystych zastępujących odpowiednio pionowe, poprzeczne i wzdłużne pierwotne usprężynowanie wózka, rys. 6.1. Ze względu na wspomniane powyżej efekty słabych sprzężeń drgań pojazdu szynowego wywoływane stosunkowo małą sztywnością pierwotnego i wtórnego usprężynowania, na dynamiczne oddziaływanie zestawów kołowych z torem odkształcenia ram wózków i pudła pojazdu mają zazwyczaj mało istotny wpływ. Dlatego w przyjętym modelu rama wózka jest reprezentowana przez bryłę sztywną (5B) o 6 stopniach swobody połączoną z pudłem pojazdu szynowego, tzn. w tym wypadku wagonu, traktowanym jako bezwładność nieskończenie wielką za pomocą nieważkich elementów lepko-sprężystych zastępujących wtórne usprężynowanie wózka.

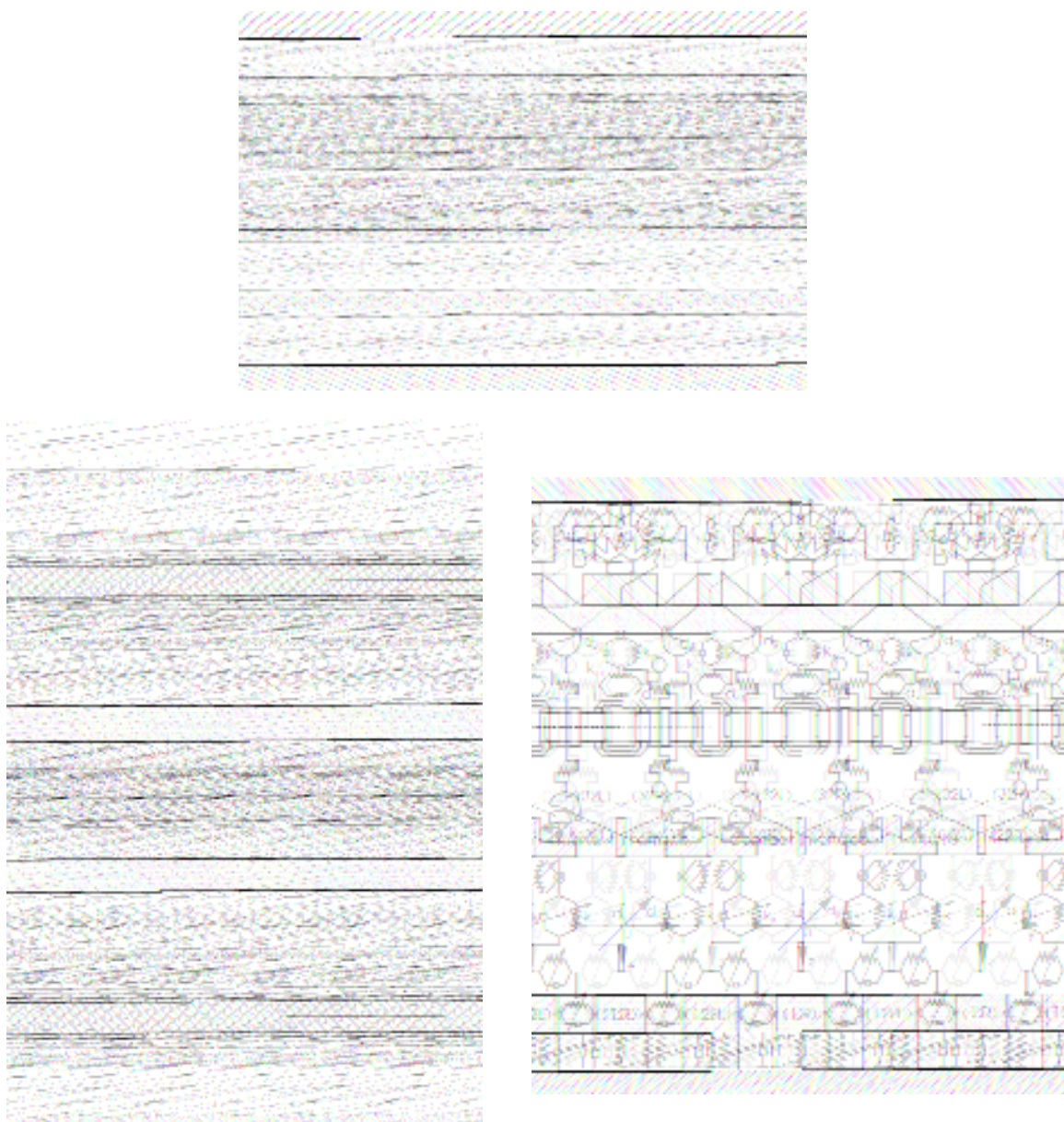
Tarcze hamulcowe rzeczywistych zestawów kołowych charakteryzują się znacznie większą sztywnością osiową niż sztywności osiowe kół jezdnych. Dlatego w wymienionym zakresie średnich częstości można założyć nieskończone wartości sztywności osiowych membran łączących pierścienie reprezentujące tarcze hamulcowe z osiami zestawów. W związku z powyższym w pokazanym na rys. 6.1 modelu wózka kolejowego jego drgania poprzeczne są realizowane przez siedem stopni swobody opisujących ruch bryły sztywnej (5B), brył sztywnych (71W) i (72W)

reprezentujących całkowite masy osi zestawów kołowych wraz z tarczami hamulcowymi oraz czterech brył sztywnych (61L), (62L), (61R) i (62R) reprezentujących masy kół jezdnych, rys. 6.1.



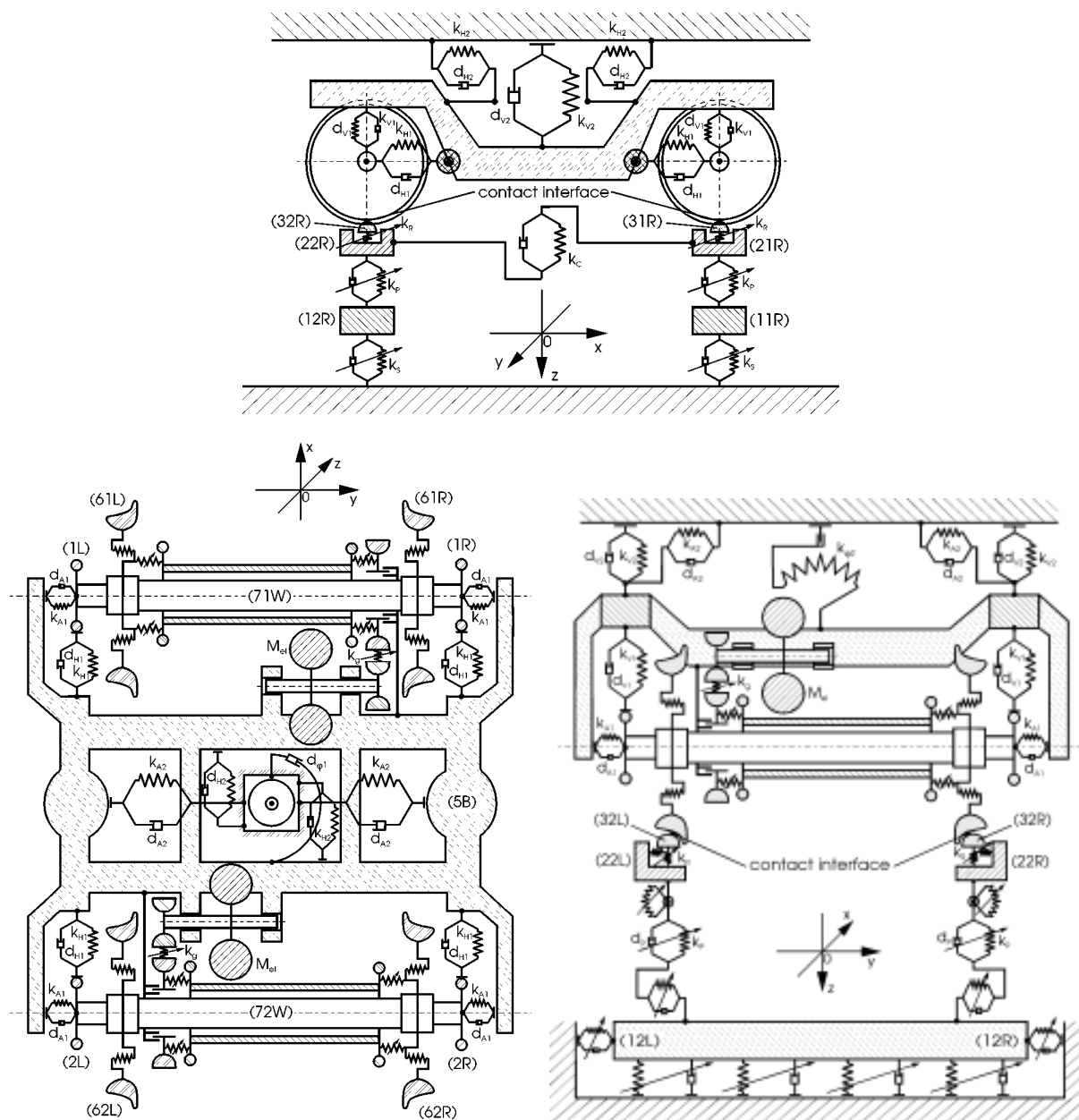
Rys. 6.1 Dyskretno-ciągły model mechaniczny standardowego wózka tocznego wagonu pasażerskiego i toru

Model mechaniczny przedstawiony na rysunku 6.1 dotyczy standardowego rozwiązania konstrukcyjnego wózka kolejowego charakteryzującego się m.in. zewnętrznym łożyskowaniem osi zestawów kołowych w stosunku do położenia kół jezdnych oraz w przybliżeniu symetryczną względem osi podłużnej toru strukturą ramy i symetrycznym usytuowaniem położenia tarcz hamulcowych. W analogiczny sposób można modelować wózki tzw. lekkiej konstrukcji stosowane obecnie w lekkich pojazdach szynowych, na przykład w wagonach metra i tramwajach, oraz eksperymentalnie w wagonach szybkich dalekobieżnych pociągów super-ekspresowych, [197]. Wózki tego typu cechują stosunkowo lekka rama i zestawy kołowe, wewnętrzne łożyskowanie osi zestawów kołowych w stosunku do położenia kół jezdnych o mniejszych niż powszechnie spotykane średnicach tocnych oraz niesymetryczną względem osi toru strukturą ramy i niesymetrycznym usytuowaniem tarcz hamulcowych. Dyskretno-ciągły model mechaniczny wózka tocznego lekkiej konstrukcji pokazano na rysunku 6.2 przyjmując identyczne oznaczenia poszczególnych jego komponentów, jak w przypadku modelu wózka standardowego.



Rys. 6.2 Dyskretno-ciągły model mechaniczny wózka tocznego lekkiej konstrukcji i toru

Modele mechaniczne układów wózek kolejowy – tor pokazane na rysunkach 6.1 i 6.2 dotyczą wózków tocznych. W pracy [189] badano oddziaływanie dynamiczne wózka napędzonego z torem w zakresie średnich częstotliwości drgań. Rozpatrywano wózek uniwersalnej szybkobieżnej lokomotywy elektrycznej typu B0-B0, tj. cztero-osiowej o 2 wózkach, którego konstrukcja usprężynowania pierwotnego i wtórnego oraz sposób łożyskowania zestawów kołowych są analogiczne jak w przypadku standardowego wózka tocznego. Niemniej jednak strukturę rozpatrywanego wózka lokomotywy charakteryzuje występowanie dwóch niezależnych mechanicznie układów napędowych każdego zestawu kołowego. W omawianym przypadku badano często spotykany w nowoczesnych lokomotywach elektrycznych rodzaj napędu, gdzie moment obrotowy wytwarzany przez sztywno zamocowany w ramie wózka silnik elektryczny jest przekazywany na zestaw za pośrednictwem również sztywno zamocowanej w ramie jednostopniowej przekładni zębatej oraz wału drażonego połączonego z przekładnią i zestawem kołowym przy pomocy tzw. wychylnych sprzęgieł podatnych działających przegubowo-skrętnie. Na rysunku 6.3 pokazano dyskretno-ciągły model mechaniczny omawianego wózka napędzonego, którego zestawy kołowe bez tarcz hamulcowych, rama, elementy pierwotnego i wtórnego



Rys. 6.3 Dyskretno-ciągły model mechaniczny wózka napędowego i toru

uspężynowania są reprezentowane w sposób identyczny jak w przypadku wózków tocznych przy zachowaniu tych samych oznaczeń odpowiadających sobie komponentów. Zwarta konstrukcja zespołów silnik napędowy – przekładnia zębata i związany z tym „gęsty” sposób łożyskowania wirników tych silników oraz wałków przekładni, jak również stosunkowo małe wartości sztywności giętnych, zwanych również sztywnościami stożkowymi, sprzęgieł podatnych łączących wały drażone z przekładniami zębatymi i zestawami kołowymi pozwalają na pominięcie drgań giętnych odcinków wałów obu układów napędowych i uwzględnianie jedynie ich drgań skrętnych. W celu uzyskania dokładniejszego opisu drgań giętnych zestawów kołowych wózka, przegubowy charakter działania wszystkich czterech sprzęgieł podatnych powala na sprowadzenie połowy masy każdego wału drażonego z kołnierzami odpowiednio do masy połączonego z nim koła jezdnego oraz do masy koła zębatego przekładni. W związku z powyższym, w modelu przedstawionym na rys. 6.3 każdy układ napędu zestawu kołowego wózka lokomotywy elektrycznej składa się z odkształcalnych skrętnie prętowych L-SMC reprezentujących kolejne odcinki pośredniego wału drażonego i pełnego wału łączącego wirnik silnika z zębnikiem przekładni oraz ze sztywnych tarcz zastępujących bezwładność wirnika silnika, kół zębatych przekładni oraz kołnierzy pośredniego

wału drążonego wraz z cięgłami sprzęgłowymi. Podatność sprzęgieł łączących wał drążony z kołem jezdnym zestawu oraz z kołem zębatym przekładni jest reprezentowana przez nieważkie elementy lepko-sprężyste o liniowych bądź nieliniowych charakterystykach odkształcalne skrętnie, giętnie i osiowo, lecz sztywne w kierunku poprzecznym do osi obrotu. Z kolei przez nieważkie elementy lepko-sprężyste odkształcalne tylko skrętnie o nieliniowych charakterystykach są reprezentowane własności zazębień obu przekładni zębatych, jak pokazano na rys. 6.3. Przy tych założeniach realizację drgań poprzecznych modelu wózka napędnego uzupełniają dwa dodatkowe stopnie swobody opisujące translacyjne przemieszczenia osiowe obu wałów drążonych wraz z ich kołnierzami.

Rzeczywisty tor kolejowy jest stanowi nieskończoną strukturę ciągłą mającą w zdefiniowanym powyżej kierunku wzdłużnym własności periodyczne ze względu na w przybliżeniu równomierne podparcie szyn na podkładach. Jak wynika z prac [52, 93, 94, 146, 152], w zakresie średnich częstości tor wykazuje własności dynamiczne struktury lepko-bezwładnościowo-sprężystej o przejrzystym widmie częstości drgań własnych. Niezależnie, w przypadku drgań toru w kierunku pionowym i poprzecznym można wyróżnić pierwsze częstości drgań własnych odpowiadające postaci drgań, przy której szyny i podkłady drgają „w fazie”. Drugie częstości drgań własnych odpowiadają postaci drgań, gdzie szyny i podkłady drgają „w przeciwfazie”. Z kolei trzecie częstości pionowych i poprzecznych drgań własnych odpowiadają tzw. postaci (ang.) „pinned-pinned”, przy której drgają tylko szyny, a podkłady pozostają nieruchome stanowiąc węzły drgań, [146, 152]. Jak wynika m.in. z [37, 52], prędkość propagacji fali poprzecznej w torze kolejowym jest zazwyczaj większa niż 1000 km/h. W związku z tym, zamiast skomplikowanych modeli toru w formie nieskończonych bądź skończonych struktur periodycznych stosowanych na przykład w pracach [2, 93, 94, 131, 152], w zakresie średnich częstości przy realnych prędkościach komunikacyjnych pociągów nie przekraczających 350÷400 km/h do symulacji dynamicznego oddziaływania układów jezdnych pojazdów szynowych z torem wydaje się być racjonalnym przyjęcie prostszego modelu toru lecz charakteryzującego się zbliżonymi lub prawie identycznymi własnościami dynamicznymi w rozpatrywanym zakresie częstości i prędkości jazdy. Dlatego w pracy [179] tor kolejowy oddziaływający z pojedynczym zestawem kołowym był reprezentowany przez oscylator lepko-bezwładnościowo-sprężysty o 6 stopniach swobody, a w pracy [181] przez oscylator lepko-bezwładnościowo-sprężysty o 13 stopniach swobody, gdzie w [179] badano drgania toru tylko w kierunku pionowym, a w [181] uwzględniono również drgania poprzeczne toru. W obydwu przypadkach taki model toru stanowił swojego rodzaju „poduszkę dynamiczną” podpierającą zestaw kołowy. Natomiast w przypadku rozpatrywania całego wózka kolejowego założono, że każdy zestaw oddziałuje ze swoją „własną poduszką dynamiczną” reprezentowaną przez identyczny oscylator lepko-bezwładnościowo-sprężysty o 13 stopniach swobody jak w pracy [181]. Przyjęto przy tym, iż te „poduszki” są wzajemnie ze sobą sprzężone w kierunku pionowym i poprzecznym za pomocą bezmasowych elementów sprężystych o sztywnościach  $k_{cy}$ ,  $k_{cl}$  i  $k_{ct}$ , jak pokazano na rysunkach 6.1, 6.2 i 6.3, gdzie  $k_{cy}$  oznacza giętną sztywność pionową,  $k_{cl}$  jest giętną sztywnością poprzeczną, a  $k_{ct}$  oznacza odpowiednią zastępczą skrętną sztywność szyny. W efekcie otrzymany jest dyskretny model toru kolejowego w postaci oscylatora lepko-bezwładnościowo-sprężystego o 26 stopniach swobody oraz o okresowo zmiennych parametrach, w którym 12 stopni swobody opisuje pionowe drgania toru, 14 stopni swobody realizuje jego drgania poprzeczne, co zilustrowano na rysunkach 6.1, 6.2 i 6.3.

W przypadku tzw. „małych drgań” przyjęto, że drgania własne oscylatora w kierunku pionowym nie są sprzężone z jego drganiami własnymi w kierunku poprzecznym. Zgodnie z odpowiednimi założeniami dokonanymi w pracach [179, 181, 183, 186-189], każda „poduszka dynamiczna” w pozycji oddziaływania „między podkładami” oraz „nad podkładem” musi charakteryzować się sztywnością statyczną, jak również charakterystykami amplitudowo-częstotliwościowymi zwanymi receptancjami dynamicznymi możliwie jak najbliższymi analogicznym otrzymanym na podstawie pomiarów dokonywanych na torze rzeczywistym.

Ponieważ podczas jazdy po torze kolejowym jego własności statyczne i dynamiczne zmieniają się periodycznie i w sposób ciągły od kolejnych pozycji oddziaływania „nad podkładem” do pozycji „między podkładami”, [52, 152], w proponowanym podejściu założono istnienie dwóch zestawów parametrów oscylatora, tj. mas, sztywności i współczynników tłumienia, oddzielnie dla drgań pionowych i poprzecznych. Jeden zestaw parametrów reprezentuje własności „poduszki dynamicznej” w położeniu oddziaływania „nad podkładem”, a drugi odpowiada położeniu „między podkładami”. Obydwa zestawy parametrów otrzymywane są oddzielnie do opisu drgań pionowych i poprzecznych drogą iteracyjnego doboru mas, sztywności i współczynników tłumienia w celu uzyskania dla trzech wymienionych powyżej postaci drgań toru wartości częstości drgań własnych oraz własnych energii kinetycznych, potencjalnych i dyssypacji możliwie bliskich odpowiednim wartościom wyznaczonym na podstawie badań eksperymentalnych dokonanych na torze rzeczywistym, bądź obliczonym przy wykorzystaniu uprzednio zidentyfikowanych bardziej złożonych modeli toru w postaci nieskończonych lub skończonych struktur periodycznych, na przykład przyjętych w pracach [2, 93, 94, 131, 152]. W tym celu dla każdej z trzech wymienionych postaci drgań sformułowano opublikowane w pracach [59, 181, 186] przybliżone warunki równowagi własnych energii kinetycznej, potencjalnej i dyssypacji oszacowanych na podstawie pomiarów bądź obliczonych przy wykorzystaniu wspomnianego bardziej złożonego modelu toru z odpowiednimi energiami własnymi pokazanych na rys. 6.1, 6.2 i 6.3 oscylatorów stanowiących „poduszki dynamiczne” każdego zestawu kołowego wózka.

W przyjętym funkcjonalnym modelu toru kolejowego w formie oscylatora lepko-bezwładnościowo-sprężystego założono, że wyznaczone według wymienionych powyżej kryteriów zestawy jego parametrów liczbowych zmieniają się okresowo i w sposób ciągły z wartości zestawu charakteryzującego położenie oddziaływania „nad podkładem” do zestawu wartości w położeniu „między podkładami”, a następnie do zestawu wartości odpowiadającego położeniu „nad podkładem” itd., według następującej funkcji zaproponowanej w [37, 52, 72] identycznej dla drgań pionowych i poprzecznych:

$$p_{li}(t) = \frac{P_{is} + P_{ib}}{2} + \frac{P_{is} - P_{ib}}{2} \left( \cos\left(\frac{2\pi v_o}{l_s}(t - \Delta t_l)\right) + \frac{1}{4} \left( 1 - \cos\left(\frac{4\pi v_o}{l_s}(t - \Delta t_l)\right) \right) \right), \quad (6.1)$$

$$\text{gdzie: } i = 1,2,3,4, \quad l = 1,2, \quad \Delta t_1 = -\frac{1}{2v_o} \left( 2b - \left( \text{entier}\left(\frac{2b}{l_s}\right) \right) \cdot l_s \right), \quad \Delta t_2 = -\Delta t_1,$$

a  $p_{li}(t)$  oznacza zadany  $i$ -ty parametr  $l$ -tej „poduszki dynamicznej”, tj. masę, sztywność lub współczynnik tłumienia oscylatora,  $v_o$  jest prędkością pociągu,  $t$  oznacza czas,  $l_s$  jest rozstawem podkładów, indeks  $l=1,2$  oznacza prowadzący-pierwszy i drugi zestaw kołowy,  $2b$  jest rozstawem osi wózka, a indeksy  $s$  i  $b$  oznaczają odpowiednio pozycje oddziaływania „nad podkładem” i „między podkładami”. Założono, że w kierunku wzdłużnym, czyli w kierunku jazdy, tor jest nieodkształcalny.

Zgodnie z przyjętymi powyżej założeniami model mechaniczny wózka umożliwia badanie drgań giętno-skrętno-osioowych zestawów kołowych sprzężonych z drganiami ramy w kierunku pionowym, poprzecznym i wzdłużnym. W przypadku wózka napędzonego drgania zestawów kołowych są dodatkowo sprzężone z drganiami skrętnymi układów ich napędu. Z kolei model mechaniczny toru kolejowego pozwala na rozpatrywanie drgań w kierunku pionowym i poprzecznym. Wszystkie wymienione powyżej rodzaje drgań modelu wózka i toru są wzajemnie ze sobą sprzężone dynamicznymi siłami kontaktu powstającymi między powierzchniami tocznymi kół jezdnych i szyn. W przeprowadzanych rozważaniach założono jednopunktowy kontakt między bieżnią koła i szyny o zmiennym w czasie polu powierzchni o eliptycznym kształcie. Bryły sztywne (3/L) i (3/R),  $l=1,2$ , w modelu toru są połączone ze sztywnymi pierścieniami reprezentującymi bezwładność kół jezdnych za pomocą nieważkich elementów lepko-sprężystych o nieliniowych





których wartości zależą od zadanego opóźnienia ruchu pojazdu szynowego w warunkach hamowania. W przypadku wózka napędowego przyjęto obciążenia skrętne jego układów napędowych wynikające z zadanych stałych oporów ruchu oraz z założonej charakterystyki trakcyjnej silników elektrycznych. Ponadto, zgodnie z rzeczywistością uwzględniono również statyczne i dynamiczne resztkowe niewyważenia kół jezdnych i tarcz hamulcowych zestawów kołowych stanowiące dodatkowe źródło wymuszenia drgań.

## 6.2 Opis ruchu dyskretno-ciągłego modelu układów jezdnych pojazdów szynowych i toru kolejowego

Ruch przyjętego dyskretno-ciągłego modelu mechanicznego wynikający z dynamicznego oddziaływania wózka kolejowego z torem jest opisany w ortogonalnym nie wirującym układzie współrzędnych  $Oxyz$  poruszającym się razem z wózkiem ze stałą prędkością pociągu  $v_0$ . Oś  $x$  układu współrzędnych wyznacza kierunek wzdłużny pokrywający się z ruchem pojazdu szynowego, oś  $y$  jest równoległa do osi obrotu nieodkształconych zestawów kołowych z początkiem odpowiadającym lewym końcom osi obu zestawów, a pionowa oś  $z$  jest zwrócona w kierunku podsypki toru, jak pokazano na rysunkach 6.1, 6.2 i 6.3.

Z proporcji wymiarowych typowych kolejowych zestawów kołowych wynika, że ich osie są dostatecznie smukłe, by w zakresie średnich częstości teorię zginania Bernoulli'ego-Eulera uznać za dostatecznie dokładną. W związku z tym, równaniami ruchu przekrojów poprzecznych odkształcalnych skrętnie belkowych L-SMC reprezentujących poszczególne cylindryczne odcinki osi zestawów kołowych wózka są jednorodne równania (2.2) opisujące zginanie i (2.1) opisujące skręcanie. Z dokonanych odpowiednich oszacowań wynika, że w rzeczywistych warunkach eksploatacji siły żyroskopowych oraz siły osiowe działające na osie zestawów kołowych mają znikomy wpływ na ich drgania gięte. Dlatego w pracach [179, 181] do równań ruchu (2.2) nie wprowadzono odpowiednich członów żyroskopowych i pominięto obciążenia osiowe  $P_i$ .

Analogicznie jak w poprzednich przypadkach analizy drgań przeprowadzanych przy wykorzystaniu dyskretno-ciągłych modeli mechanicznych równania ruchu (2.2) i (2.1) są rozwiązywane ze sformułowanymi dla przekrojów skrajnych L-SMC geometrycznymi warunkami brzegowymi zgodności przemieszczeń i kątów obrotu oraz z dynamicznymi warunkami równowagi sił zginających, momentów zginających i momentów skręcających. Równania dynamicznych warunków brzegowych odpowiadające lewemu przekrojowi skrajnemu zawieszenia  $l$ -tej osi zestawu kołowego,  $l=1,2$ , w ramie wózka standardowego lub napędowego mają następującą postać:

$$m_1 \frac{\partial^2 v_{l1}}{\partial t^2} + EI_1 \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 v_{l1}}{\partial y^3} + d_{V1} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial v_{l1}}{\partial t} - \frac{dq_L}{dt} + \varsigma_l b \frac{d\alpha_B}{dt} \right] + k_{V1} \operatorname{Re} [v_{l1} - q_L + \varsigma_l b \alpha_B] + jd_{H1} \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial v_{l1}}{\partial t} - \frac{dq_L}{dt} \right] + jk_{H1} \operatorname{Im} [v_{l1} - q_L] = 0, \quad (6.2a)$$

$$-J_1 \frac{\partial^3 v_{l1}}{\partial y \partial t^2} + EI_1 \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v_{l1}}{\partial y^2} + jI_{01} \Omega \frac{\partial^2 v_{l1}}{\partial y \partial t} = 0, \quad (6.2b)$$

$$-I_{01} \frac{\partial^2 \theta_{l1}}{\partial t^2} - D_1 \frac{\partial \theta_{l1}}{\partial t} + GJ_{01} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta_{l1}}{\partial y} = 0 \quad \text{dla } y = 0. \quad (6.2c)$$

Geometryczne warunki zgodności przemieszczeń translacyjnych i kątowych przekrojów skrajnych bezpośrednio sąsiadujących ze sobą makroelementów, tj.  $(i-1)$ -tego i  $i$ -tego,  $l$ -tego zestawu kołowego mają postać (5.13a), (5.13b) i (3.2a). Sformułowane dla tych przekrojów równania dynamicznych warunków brzegowych są następujące:

$$\begin{aligned}
& m_i \frac{\partial^2 v_{li}}{\partial t^2} + EI_i \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 v_{li}}{\partial y^3} - EI_{i-1} \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^3 v_{l,i-1}}{\partial y^3} + \\
& + k_{Cli} (Q_{li}(t)) \cdot (\text{Re}[v_{li}] - z_{3li} + z_{0li}) + jF_{11li} (Q_{li}(t)) \text{Im} \left[ \frac{\partial v_{li}}{\partial t} \right] + jr_0 F_{11li} (Q_{li}(t)) \frac{\partial \theta_{li}}{\partial t} = \quad (6.2d) \\
& = jF_{10li} (Q_{li}(t)) + G_{wi} + m_i \varepsilon_{li} \left[ \left( \Omega + \frac{\partial \theta_{li}}{\partial t} \right)^2 \exp \left( j \left( \frac{\pi}{2} - \tilde{\Theta}_{li} \right) \right) - \frac{\partial^2 \theta_{li}}{\partial t^2} \exp \left( -j \tilde{\Theta}_{li} \right) \right],
\end{aligned}$$

$$EI_i \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v_{li}}{\partial y^2} - EI_{i-1} \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial^2 v_{l,i-1}}{\partial y^2} + \mu_i \left( \varphi_{li} - \frac{\partial v_{li}}{\partial y} \right) = 0, \quad (6.2e)$$

$$\begin{aligned}
& J_i \frac{d^2 \varphi_{li}}{dt^2} + \mu_i \left( \varphi_{li} - \frac{\partial v_{li}}{\partial y} \right) - jI_{0i} \Omega \frac{d\varphi_{li}}{dt} - F_{22li} (Q_{li}(t), \Delta y_{li}(t)) - \\
& - \frac{d}{dt} \left[ jI_{xzli} \frac{d\bar{\varphi}_{li}}{dt} \exp(2j\tilde{\Theta}_{li}) + I_{yli}(t) \left( \Omega + \frac{\partial \theta_{li}}{\partial t} \right) \right] = F_{23li} (Q_{li}(t)), \quad (6.2f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& GJ_{0,i-1} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta_{l,i-1}}{\partial y} - GJ_{0i} \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial \theta_{li}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left\{ \text{Re} [I_{yli}(t)] \cdot \text{Re} \left[ \frac{d\varphi_{li}}{dt} \right] + \right. \\
& \left. + \text{Im} [I_{yli}(t)] \cdot \text{Im} \left[ \frac{d\varphi_{li}}{dt} \right] + \frac{1}{2} m_i \varepsilon_{li} \left[ \frac{\partial v_{li}}{\partial t} \exp(j\tilde{\Theta}_{li}) + \frac{\partial \bar{v}_{li}}{\partial t} \exp(-j\tilde{\Theta}_{li}) \right] \right\} + \quad (6.2g) \\
& + I_{0i} \frac{\partial^2 \theta_{li}}{\partial t^2} + F_{31li} (Q_{li}(t)) \text{Im} \left[ \frac{\partial v_{li}}{\partial t} \right] + F_{32li} (Q_{li}(t)) \frac{\partial \theta_{li}}{\partial t} = F_{30li} (Q_{li}(t)) + M_{li}(t),
\end{aligned}$$

gdzie:  $I_{yli}(t) = I_{yzli} \exp \left( j \left( \frac{\pi}{2} - \tilde{\Theta}_{li} \right) \right) + I_{xyli} \exp \left( -j \tilde{\Theta}_{li} \right)$ ,  $\tilde{\Theta}_{li}(y,t) = \Omega t + \theta_{li}(y,t) + \Delta_{li}$ ,

dla  $y = \sum_{k=1}^{i-1} l_k$ ,  $i = 2, 3, \dots, n+3$ .

Równania dynamicznych warunków brzegowych odpowiadających prawemu przekrojowi skrajnemu zawieszenia  $l$ -tej osi zestawu kołowego w ramie wózka standardowego lub napędnego mają postać analogiczną jak dla lewych przekrojów skrajnych

$$\begin{aligned}
& m_{n+4} \frac{\partial^2 v_{l,n+3}}{\partial t^2} - EI_{n+3} \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^3 v_{l,n+3}}{\partial y^3} + \\
& + d_{V1} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial v_{l,n+3}}{\partial t} - \frac{dq_R}{dt} + \varsigma_l b \frac{d\alpha_B}{dt} \right] + k_{V1} \operatorname{Re} \left[ v_{l,n+3} - q_R + \varsigma_l b \alpha_B \right] + \\
& + jd_{H1} \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial v_{l,n+3}}{\partial t} - \frac{dq_R}{dt} \right] + jk_{H1} \operatorname{Im} \left[ v_{l,n+3} - q_R \right] = 0, \quad (6.2h)
\end{aligned}$$

$$- J_{n+4} \frac{\partial^3 v_{l,n+3}}{\partial y \partial t^2} - EI_{n+3} \left( 1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 v_{l,n+3}}{\partial y^2} + jI_{0,n+4} \Omega \frac{\partial^2 v_{l,n+3}}{\partial y \partial t} = 0, \quad (6.2i)$$

$$I_{0,n+4} \frac{\partial^2 \theta_{l,n+3}}{\partial t^2} + D_{n+4} \frac{\partial \theta_{l,n+3}}{\partial t} + GJ_{0,n+3} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_{l,n+3}}{\partial y} = 0 \quad \text{dla } y = \sum_{k=1}^{n+3} l_k. \quad (6.2j)$$

Równania dynamicznych warunków brzegowych sformułowane dla przekrojów skrajnych L-SMC reprezentujących cylindryczne odcinki osi zestawów kołowych wózka lekkiej konstrukcji, którego model pokazano na rys. 6.2, mają postać analogiczną do odpowiednich równań (6.2). W równaniach (6.2a) i (6.2h) funkcje zespolone  $q_p(t) = z_p(t) + jx_p(t)$ ,  $p=L,R$ , są współzrędnymi uogólnionymi opisującymi ruch bryły sztywnej (5B) reprezentującej bezwładność ramy wózka, gdzie  $z_p(t)$  i  $x_p(t)$  oznaczają odpowiednio pionowe i wzdłużne przemieszczenia jej lewej i prawej strony, a  $\alpha_B(t)$  jest przemieszczeniem kątowym bryły sztywnej (5B) względem osi równoległej do osi  $Oy$  układu  $Oxyz$ ,  $\varsigma_l = 1$  dla  $l=1$  i  $\varsigma_l = -1$  dla  $l=2$ . Należy zauważyć, że w równaniach (6.2a)–(6.2c) i (6.2d)–(6.2j) argumenty funkcji opisujących przemieszczenia translacyjne  $v_{li}(y,t)$  i rotacyjne  $\theta_{li}(y,t)$  zostały pominięte celem skrócenia zapisu. W równaniach (6.2a) i (6.2h)  $d_{V1}$  i  $k_{V1}$  są odpowiednio współczynnikami tłumienia i sztywności pierwotnego usprężynowania pionowego zestawów kołowych,  $d_{H1}$ ,  $k_{H1}$  oznaczają współczynniki tłumienia i sztywności pierwotnego usprężynowania wzdłużnego, a  $G_{wi}$  jest obciążeniem grawitacyjnym działającym na jedną połowę masy zestawu kołowego dla  $i=2,n+3$ , gdzie w omawianym przypadku  $n$  oznacza liczbę tarcz hamulcowych w jednym zestawie kołowym wózka. W przypadku pozostałych  $i$   $G_{wi}=0$ . Symbole  $D_1$ ,  $D_{n+4}$  oznaczają współczynniki tłumienia bezwzględne w łożyskach tocznych, w jakich podparte są zestawy kołowe, a  $M_{li}(t)$  są najczęściej przyjmowanymi jako stałe momentami zewnętrznymi wywołanymi hamowaniem pojazdu szynowego. Identyfikacja jak w rozdziale 5 w równaniach (6.2)  $m_i$  oznaczają masy brył sztywnych reprezentujących bezwładność obudów łożysk (maźnic) oraz sztywnych pierścieni zastępujących bezwładność kół jezdnych i tarcz hamulcowych, a  $J_i$ ,  $I_{0i}$  są odpowiednio ich średnicowymi i biegunowymi masowymi momentami bezwładności,  $i=1,2,\dots,n+4$ . Podobnie, przemieszczenia katowe sztywnych pierścieni reprezentujących bezwładność kół jezdnych i tarcz hamulcowych w (6.2e), (6.2f) i (6.2g) wyrażono za pomocą funkcji zespolonych  $\varphi_{li}(t) = \phi_{li}(t) + j\psi_{li}(t)$ ,  $l=1,2$ , gdzie  $\phi_{li}(t)$  i  $\psi_{li}(t)$  oznaczają przemieszczenia katowe odpowiednio w płaszczyźnie pionowej  $Oyz$  i poziomej  $Oxy$ , rys. 6.1, 6.2 i 6.3. Stałe  $\mu_i$  są sztywnościami giętnymi membran łączących pierścienie sztywne z osiami zestawów kołowych, a  $z_{0li} = z_{0li}(v_0 t)$  oznaczają funkcje opisujące wymuszenie typu kinematycznego wywołane nierównościami bieżni kół jezdnych i szyn. W przeciwieństwie do wałów maszyn wirnikowych rozpatrywanych w poprzednim rozdziale, w omawianym przypadku osi zestawów kołowych, jak już wspomniano powyżej, pominięto

działające na nie siły żyroskopowe uwzględniając wpływ ich oddziaływania jedynie na koła jezdne i tarcze hamulcowe, co wyrażają odpowiednie człony stojące w warunku brzegowym (6.2f). Resztkowe niewyważenia dynamiczne są opisane momentami dewiacji  $I_{xyli}$ ,  $I_{xzli}$ , i  $I_{yzli}$ , a niewyważenia statyczne wyrażono w postaci mimośrodków  $\varepsilon_{li}$  środków masy pierścieni sztywnych z odpowiadającymi im kątami fazowymi  $\Delta_{li}$ ,  $i=2,3,\dots,n+3$ . Symbol  $k_{cli}$  w (6.2d) jest zmienną pionową sztywnością kontaktową Hertza między kołem jezdnym a szyną, a  $z_{3li}=z_{3iL}$  dla  $i=2$  i  $z_{3li}=z_{3iR}$  dla  $i=n+3$  oznaczają współrzędne uogólnione opisujące przemieszczenia pionowe brył sztywnych (3/L) i (3/R) modelu toru, rys. 6.1, 6.2 i 6.3. Z kolei symbole  $F_{kli}(Q_{li}(t))$ ,  $k=10,11,22,23$ , oznaczają nieliniowe funkcje kontaktowe normalnej siły dynamicznego oddziaływania koło – szyna  $Q_{li}(t)$  wyznaczone przy wykorzystaniu nieliniowej teorii Kalkera za pomocą wspomnianych algorytmów podanych w pracach [145, 200] przy założeniu następujących postaci wyrażen określających składowe mikro-poślizgów:

– mikro-poślizgów wzdłużnych:

$$v_{xli} = \frac{1}{v_o} \left( \frac{\partial w_{li}(y,t)}{\partial t} + r_o \frac{\partial \theta_{li}(y,t)}{\partial t} \right) + \frac{\varsigma_i a}{2R_o} \quad \text{dla } y = \sum_{k=1}^{i-1} l_k,$$

– mikro-poślizgów poprzecznych: 
$$v_{yli} = \frac{\cos(\delta_{li}(\Delta y_{li}(t)))}{v_o} \left( \frac{d(\Delta y_{li}(t))}{dt} - v_o \Psi_{li}(t) \right), \quad (6.3)$$

– mikro-poślizgów wiertnych: 
$$v_{0zli} = \frac{-\sin(\delta_{li}(\Delta y_{li}(t))) \varsigma_i}{r_o}, \quad i = 2, n+3, \quad l = 1, 2,$$

gdzie:  $\Delta y_{l2}(t) = y_{6iL}(t) - r_o \phi_{l2}(t) - y_{3iL}(t) - s_o y_{4iL}(t),$

$\Delta y_{l,n+3}(t) = y_{6iR}(t) - r_o \phi_{l,n+3}(t) - y_{3iR}(t) - s_o y_{4iR}(t), \quad \varsigma_2 = -1 \quad \text{i} \quad \varsigma_{n+3} = 1,$

$y_{3iL}$ ,  $y_{4iL}$ ,  $y_{6iL}$ ,  $y_{3iR}$ ,  $y_{4iR}$ ,  $y_{6iR}$  oznaczają odpowiednie współrzędne uogólnione opisujące ruch brył sztywnych modelu toru oraz sztywnych pierścieni reprezentujących koła jezdne,  $a$  jest nominalnym rozstawem szyn kolejowych,  $\delta_{li}(\Delta y_{li}(t))$  oznacza chwilową wartość kąta styku  $\alpha_p$  z rys. 6.4 będącą funkcją bieżącego wzajemnego położenia zarysów bieżni koła i główki szyny  $\Delta y_{li}(t)$ ,  $r_o$  jest bieżącym promieniem tocznym kół jezdnych, a  $s_o$  oznacza promień bezwładności przekroju poprzecznego szyny względem środka geometrycznego jej stopki. W powyższych wzorach promień krzywizny toru (łuku)  $R_o$  przyjęto jako dodatni w przypadku łuków lewych i jako ujemny w przypadku łuków prawych. Stąd funkcje kontaktowe  $F_{kli}(Q_{li}(t))$  są wyrażone w następujący sposób:

$$F_{11li}(Q_{li}(t)) = \sigma_{li} \frac{GC_{11}}{v_o} K_1 [Q_{li}(t)]^{2/3} \quad \text{dla } i = 2, n+3, \quad F_{11li}(Q_{li}(t)) = 0 \quad \text{dla } i = 3, 4, \dots, n+2,$$

$$F_{10li}(Q_{li}(t)) = \varsigma_i \sigma_{li} \frac{GC_{11}a}{2R_o} K_1 [Q_{li}(t)]^{2/3} \quad \text{dla } i = 2, n+3, \quad F_{10li}(Q_{li}(t)) = 0 \quad \text{dla } i = 3, 4, \dots, n+2,$$

$$F_{22li}(Q_{li}(t), \Delta y_{li}(t)) = \sigma_{li} \frac{GC_{22}}{v_o} K_1 \left( r_o [Q_{li}(t)]^{2/3} + j Q_{li}(t) \right) \cdot \frac{d(\Delta y_{li}(t))}{dt} \quad \text{dla } i = 2, n+3, \quad (6.4)$$

$$F_{22li}(Q_{li}(t), \Delta y_{li}(t)) = 0 \quad \text{dla } i = 3, 4, \dots, n+2,$$

$$F_{23li}(Q_{li}(t)) = -\varsigma_i \sigma_{li} \delta_{li}(\Delta y_{li}(t)) \left( GC_{23} K_2 Q_{li}(t) - j \frac{GC_{33} K_3}{r_o} [Q_{li}(t)]^{4/3} \right) \quad \text{dla } i = 2, n+3,$$

$$F_{23li}(Q_{li}(t)) = 0 \quad \text{dla } i = 3, 4, \dots, n+2, \quad \varsigma_2 = -1 \quad \text{i} \quad \varsigma_{n+3} = 1, \quad l = 1, 2,$$

gdzie:  $K_1 = m \cdot n \cdot \left[ \frac{3(1-\nu^2)}{E(A+B)} \right]^{2/3}$ ,  $K_2 = (m \cdot n)^{3/2} \cdot \frac{3(1-\nu^2)}{E(A+B)}$ ,  $K_3 = (m \cdot n)^2 \cdot \left[ \frac{3(1-\nu^2)}{E(A+B)} \right]^{4/3}$ ,

$A = 1/r_r$ ,  $B = 1/r_o$ ,  $G$ ,  $E$  są odpowiednio modułami Kirchhoffa i Younga,  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{33}$  są współczynnikami Kalkera traktowanymi podczas symulacji drgań zazwyczaj jako zmienne,  $\sigma_{li} = \sigma_{li}(v_{xli}, v_{yli}, v_{ozli}, Q_{li}(t))$  oznaczają współczynniki wyrażające nieliniowy wariant teorii Kalkera, których chwilowe wartości są wyznaczone za pomocą algorytmu szczegółowo opisanego w [200],  $r_r$  oznacza promień krzywizny zarysu przekroju poprzecznego główki szyny w punkcie jej chwilowego kontaktu z kołem pojazdu,  $\bar{\nu}$  jest liczbą Poissona, a występujące w schemacie obliczeniowym teorii Kalkera parametry eliptycznego pola kontaktu koło-szyna oznaczono przez  $m$  i  $n$  zgodnie z [145].

Z równań (6.2) wynika, że opisane w warunkach brzegowych statyczne i dynamiczne niewyważenie kół jezdnych i tarcz hamulcowych oraz siły i momenty kontaktowe sprzęgają giętne drgania osi zestawów kołowych z ich drganiami skrętnymi. Ponadto, siły i momenty kontaktu koło-szyna sprzęgają drgania giętne osi zestawów kołowych z ich drganiami osiowymi, a w ten sposób również pionowe drgania toru z jego drganiami poprzecznymi. Ruch modelu toru oraz drgania poprzeczne modelu wózka są opisane przez następujący układ parametrycznych równań różniczkowych zwyczajnych, które są sprzężone z równaniami (6.2a), (6.2d), (6.2f) i (6.2h):

$$\mathbf{M}_T(v_o t) \ddot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{D}_T(v_o t) \dot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{K}_T(v_o t) \mathbf{s}(t) = \mathbf{R}(t), \quad (6.5)$$

gdzie:  $\mathbf{s}(t) = \text{col}[x_L(t), z_L(t), z_{3/L}(t), z_{2/L}(t), z_{1/L}(t), z_{12/L}(t), z_{2/R}(t), z_{3/R}(t), z_R(t), x_R(t), \alpha_B(t), y_{4/L}(t), y_{3/L}(t), y_{2/L}(t), y_{1/L}(t), y_{2/R}(t), y_{3/R}(t), y_{4/R}(t), y_{5B}(t), y_{6/L}(t), y_{6/R}(t), y_{7/W}(t)]$

i  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(v_{l1}(0,t), v_{l,n+3}(\lambda_{n+4}, t), v_{l2}(\lambda_2, t), v_{l,n+3}(\lambda_{n+3}, t), \varphi_{l2}(t), \varphi_{l,n+3}(t),$

$$G_c, F(v_o, R_o)), \quad l=1,2, \quad \lambda_k = \sum_{j=1}^{k-1} l_j.$$

W równaniach (6.5)  $\mathbf{M}_T$ ,  $\mathbf{D}_T$  i  $\mathbf{K}_T$  oznaczają odpowiednio macierze bezwładności, tłumienia i sztywności wyrażone jako okresowe funkcje parametrów (6.1), człon  $F(v_o, R_o)$  reprezentuje wymuszenie zewnętrzne wywoływane siłami odśrodkowymi podczas jazdy na łuku, a  $G_c$  jest siłą grawitacyjną działającą na połowę masy pojazdu szynowego i na całkowitą usprężynowaną masę ramy wózka. Składowe  $x_p(t)$ ,  $z_p(t)$ ,  $p=L,R$ , i  $\alpha_B(t)$  wektora  $\mathbf{s}(t)$  są współrzędnymi uogólnionymi opisującymi ruch ramy wózka w kierunku pionowym i wzdłużnym,  $z_{li}(t)$ ,  $j=3/L, 2/L, 1/L, 12/L, 2/R, 3/R$ , są współrzędnymi uogólnionymi opisującymi pionowe drgania modelu toru,  $y_{lk}(t)$ ,  $k=4/L, 3/L, 2/L, 1/L, 2/R, 3/R, 4/R$ , są współrzędnymi uogólnionymi opisującymi poprzeczne drgania modelu toru, a  $y_{lm}(t)$ ,  $m=5B, 6/L, 6/R, 7/W$ , oznaczają współrzędne uogólnione opisujące poprzeczne drgania modelu wózka,  $l=1,2$ . Należy w tym miejscu zaznaczyć, że w przypadku wózka napędzonego, którego model przedstawiono na rysunku 6.3, wektor  $\mathbf{s}(t)$  zostaje powiększony o dwie składowe – współrzędne uogólnione  $m=8/W$  opisujące osiowe przemieszczenia translacyjne L-SMC reprezentujących pośrednie wały drążone w układach napędu zestawów kołowych. Ponadto, model matematyczny takiego wózka obejmuje również dodatkowe warunki brzegowe równań ruchu (2.1) opisujące drgania skrętne układów napędowych. W związku z tym, w porównaniu z modelem wózka tocznego ulega pewnej modyfikacji równanie (6.2g)

$$\begin{aligned}
& GJ_{0,i-1} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_{l,i-1}}{\partial y} - GJ_{0i} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_{li}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \left\{ \operatorname{Re} \left[ I_{yli}(t) \right] \cdot \operatorname{Re} \left[ \frac{d\varphi_{li}}{dt} \right] + \right. \\
& \left. + \operatorname{Im} \left[ I_{yli}(t) \right] \cdot \operatorname{Im} \left[ \frac{d\varphi_{li}}{dt} \right] + \frac{1}{2} m_{i,li} \left[ \frac{\partial v_{li}}{\partial t} \exp(j\tilde{\Theta}_{li}) + \frac{\partial \bar{v}_{li}}{\partial t} \exp(-j\tilde{\Theta}_{li}) \right] \right\} + \\
& + I_{0i} \frac{\partial^2 \theta_{li}}{\partial t^2} + F_{31li}(Q_{li}(t)) \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial v_{li}}{\partial t} \right] + F_{32li}(Q_{li}(t)) \frac{\partial \theta_{li}}{\partial t} + \\
& + \iota_{li} \left( k_{W1} [\theta_{li} - \theta_{l,n+4}] + d_{W1} \left[ \frac{\partial \theta_{li}}{\partial t} - \frac{\partial \theta_{l,n+4}}{\partial t} \right] \right) = F_{30li}(Q_{li}(t)) + M_{li}(t)
\end{aligned} \tag{6.6a}$$

dla  $y = \sum_{k=1}^{i-1} l_k = \lambda_{li}$ ,  $i = 2, n+3$ ,  $l = 1, 2$ , gdzie:  $\iota_{12} = 0$ ,  $\iota_{1,n+3} = 1$ ,  $\iota_{22} = 1$ ,  $\iota_{2,n+3} = 0$ ,

a równania pozostałe mają następującą postać:

$$\begin{aligned}
& I_{0W1} \frac{\partial^2 \theta_{l,n+4}}{\partial t^2} - GJ_{0,n+4} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_{l,n+4}}{\partial y} + k_{W1} [\theta_{l,n+4} - \theta_{li}] + \\
& + d_{W1} \left[ \frac{\partial \theta_{l,n+4}}{\partial t} - \frac{\partial \theta_{li}}{\partial t} \right] = 0 \quad \text{dla } y = \lambda_{li}, \\
& I_{0W2} \frac{\partial^2 \theta_{l,n+4}}{\partial t^2} + GJ_{0,n+4} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_{l,n+4}}{\partial y} + k_{W2} [\theta_{l,n+4} - \theta_{lG}] + \\
& + d_{W2} \left[ \frac{\partial \theta_{l,n+4}}{\partial t} - \frac{d\theta_{lG}}{dt} \right] = 0, \\
& I_{0G1} \frac{d^2 \theta_{lG}}{dt^2} + k_{W2} [\theta_{lG} - \theta_{l,n+4}] + d_{W2} \left[ \frac{d\theta_{lG}}{dt} - \frac{\partial \theta_{l,n+4}}{\partial t} \right] + \\
& + r_1 k_G(t) [r_1 \theta_{lG} - r_2 \theta_{l,n+5}] + r_1 d_G(t) \left[ r_1 \frac{d\theta_{lG}}{dt} - r_2 \frac{\partial \theta_{l,n+5}}{\partial t} \right] = 0, \tag{6.6b} \\
& I_{0G2} \frac{\partial^2 \theta_{l,n+5}}{\partial t^2} - GJ_{0,n+5} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_{l,n+5}}{\partial y} + r_2 k_G(t) [r_2 \theta_{l,n+5} - r_1 \theta_{lG}] + \\
& + r_2 d_G(t) \left[ r_2 \frac{\partial \theta_{l,n+5}}{\partial t} - r_1 \frac{d\theta_{lG}}{dt} \right] = 0 \quad \text{dla } y = \lambda_{li} + l_{n+4}, \\
& I_{0S} \frac{\partial^2 \theta_{l,n+5}}{\partial t^2} + D_S \frac{\partial \theta_{l,n+5}}{\partial t} + GJ_{0,n+5} \left( 1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \theta_{l,n+5}}{\partial y} = M_{el} \left( \frac{\partial \theta_{l,n+5}}{\partial t}, t \right) \\
& \text{dla } y = \lambda_{li} + l_{n+4} + l_{n+5}, \quad i = n+3 \text{ gdy } l = 1, \quad i = 2 \text{ gdy } l = 2.
\end{aligned}$$

W równaniach (6.6 a,b) symbole  $k_{w1}$ ,  $d_{w1}$ ,  $k_{w2}$ ,  $d_{w2}$  oznaczają odpowiednio sztywności skrętne i współczynniki tłumienia wyjściowych i wejściowych sprzęgieł podatnych łączących wały drażone z przekładniami zębatymi i zestawami kołowymi,  $k_G(t)$ ,  $d_G(t)$  są funkcjami opisującymi zmienną sztywność i współczynnik tłumienia określającymi nieliniową w ogólnym przypadku charakterystykę zazębienia przekładni zębatych,  $I_{0w1}$ ,  $I_{0w2}$  oznaczają biegunowe masowe momenty bezwładności brył sztywnych reprezentujących kołnierze wałów drażonych osadzone odpowiednio na wyjściowych i wejściowych końcach tych wałów,  $I_{0G1}$ ,  $I_{0G2}$  są biegunowymi masowymi momentami bezwładności brył sztywnych zastępujących odpowiednio koło zębate i zębnik przekładni,  $I_{0S}$  oznacza biegunowy masowy moment bezwładności brył sztywnych reprezentujących wirniki silników napędowych, a  $D_S$  jest współczynnikiem oporów typu wiskotycznego silnika. Symbol  $\theta_G = \theta_G(t)$  oznacza współrzędną uogólnioną opisującą przemieszczenie kątowe koła zębatego przekładni,  $r_1$ ,  $r_2$  są promieniami kół podziałowych odpowiednio koła zębatego i zębniaka, a  $M_{el}$  oznacza moment elektryczny generowany przez silnik według zadanej charakterystyki trakcyjnej.

Opisane powyżej dyskretno-ciągłe modele matematyczne układu jezdnego pojazdu szynowego i toru umożliwiają przeprowadzanie analizy dynamicznej badanego obiektu w zakresie średnich częstości oddziaływania poprzez rozwiązywanie problemu drgań własnych, wyznaczanie funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF), symulację drgań wymuszonych oraz dokonywanie analizy stateczności.

### 6.2.1 Analiza drgań własnych

W celu dokonania analizy drgań własnych badanego układu wózek kolejowy – tor należy przeprowadzić linearyzację sformułowanego modelu matematycznego oraz pominąć wszelkie tłumienie zewnętrzne. W omawianym przypadku linearyzacja sprowadza się do przyjęcia stałych, uśrednionych normalnych sztywności kontaktowych koło-szyna  $k_{cp}$  w równaniach (6.2d), pominięcia składowych okresowo-zmiennych parametrów (6.1) modelu toru stojących w równaniu (6.5), uśrednienia wartości sztywności zazębienia przekładni i sztywności sprzęgieł podatnych w równaniach (6.6) oraz do pominięcia członów opisujących resztkowe niewyważenia statyczne i dynamiczne w równaniach (6.2d), (6.2f), (6.2g) i (6.6a). Ponieważ będące funkcjami mikro-poślizgów wszystkie siły i momenty kontaktowe przy wzajemnych położeniach koło jezdne – szyna bliskich nominalnym mają charakter wiskotyczny, zostają one pominięte wraz z członami tłumienia zewnętrznego i materiałowego w równaniach (6.2) i (6.5). Wskutek przeprowadzonych uproszczeń w przyjętych myśl wymienionych w punkcie 6.1 założeniach do dyskretno-ciągłych modeli układów wózek kolejowy – tor dochodzi do rozsprzężenia drgań giętych zestawów kołowych z ich drganiami skrętnymi, w tym również z drganiami skrętnymi układów napędowych wózków napędnych, rozsprzężenia drgań pionowo-wzdłużnych modelu wózka z jego drganiami poprzecznymi oraz do rozsprzężenia drgań pionowych i poprzecznych modelu toru. W efekcie, otrzymywane są następujące „podproblemy” własne do niezależnego rozwiązania:

1. zagadnienie przestrzennych, tj. w płaszczyźnie pionowej i poziomej, giętych drgań zestawów kołowych sprzężonych z pionowymi drganiami modelu toru oraz z pionowymi i wzdłużnymi drganiami ramy wózka, gdzie sprzężenie drgań w kierunku pionowym i wzdłużnym jest spowodowane siłami żyroskopowymi działającymi na obracające się koła jezdne i tarcze hamulcowe;
2. zagadnienie drgań skrętnych zestawów kołowych i ewentualnie układów ich napędu w przypadku wózka napędnego;
3. zagadnienie drgań poprzecznych modelu wózka;
4. zagadnienie drgań poprzecznych modelu toru.



Zgodnie z pracami [179, 181, 186-189], następuje wówczas podział układu równań (6.5) na trzy podukłady, z których jeden opisujący pionowe drgania modelu toru pozostaje sprzężony ze zlinearyzowanymi oraz pozbawionymi członów wymuszających i dyssypatywnych warunkami brzegowymi (6.2d) tworząc wraz z równaniami ruchu (2.2) „podproblem” własny „1”. Dwa pozostałe podukłady równań (6.5) tworzą „podproblemy” własne „3” i „4”. Z kolei zlinearyzowane oraz pozbawione członów wymuszających i dyssypatywnych warunki brzegowe (6.2c), (6.2g), (6.2j) i ewentualnie (6.6 a,b) tworzą wraz z równaniami ruchu (2.1) „podproblem” własny „2”. W celu rozwiązania „podproblemu” własnego „1” zastosowano metodę rozdzielania zmiennych w postaci (3.7) prowadzącą przy zastosowaniu teorii zginania belek Bernoulli'ego-Eulera do funkcji własnych (3.11). Z kolei w przypadku „podproblemu” własnego „2” wykorzystano metodę rozdzielania zmiennych równań (2.1) uzyskując w konsekwencji funkcje własne (3.9). Po podstawieniu funkcji własnych (3.11) i (3.9) do zlinearyzowanych oraz pozbawionych członów wymuszających i dyssypatywnych warunków brzegowych odpowiednio (6.2a), (6.2b), (5.13a,b), (6.2d)-(6.2f), (6.2h), (6.2i) i (6.2c), (3.2a), (6.2g), (6.2j) lub ewentualnie (6.6 a,b) otrzymuje się dwa niezależne równania charakterystyczne w postaci (3.22) osobno dla zginania i skręcania. Natomiast rozwiązywanie „podproblemów” własnych „3” i „4” typowych modeli dyskretnych prowadzi do standardowych równań charakterystycznych (3.22a).

## 6.2.2 Analiza drgań wymuszonych

W celu przeprowadzenia analizy drgań wymuszonych wykorzystano rozwiązania Fouriera równań ruchu (2.2) i (2.1) w postaci nieskończonych szeregów (3.23) rozwinięć względem ortogonalnych funkcji własnych wyznaczonych dzięki rozwiązaniu niezależnych równań charakterystycznych (3.22). Ortogonalne giętne funkcje własne otrzymano w przypadku nie wirujących zestawów kołowych pomijając w ten sposób efekty żyroskopowe w pierwszym z równań (3.22). Natomiast dla współrzędnych uogólnionych opisujących ruch elementów modelu dyskretno-ciągłego o parametrach skupionych, tj. brył sztywnych, zastosowano znaną metodę transformacji do współrzędnych głównych opisaną m.in. w [74, 92]. Wówczas rozwiązania poszukuje się w postaci nieskończonych lub skończonych szeregów (3.24) rozwinięć względem ortogonalnych wektorów własnych wyznaczonych podczas rozwiązywania „podproblemów” własnych „1”, „3” i „4” określonych w punkcie 6.2.1. Podobnie jak wszystkie pominięte przy rozwiązywaniu problemu własnego człony nieliniowe, parametryczne, wymuszenia zewnętrzne oraz tłumienia zewnętrznego, jako wymuszenia zewnętrzne potraktowano również człony żyroskopowe. Zgodnie ze stosowaną procedurą rozwiązania rozwinięto je w nieskończone szeregi względem ortogonalnych funkcji własnych wykorzystując wzory (3.25) do obciążeń skupionych. W rozpatrywanym przypadku drgań giętno-skrętno-osioowych zestawów kołowych sprzężonych z pionowymi, wzdłużnymi i poprzecznymi drganiami ramy wózka oraz sprzężonych z pionowymi i poprzecznymi drganiami modelu toru otrzymano następujący układ nieliniowych i parametrycznych równań różniczkowych zwyczajnych we współrzędnych Lagrange'a typu (3.26) przyjmujących następującą postać:

$$\mathbf{M}(\Omega t, v_{0t}, \mathbf{r}(t)) \ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{C}(\Omega, \Omega t, v_{0t}, \mathbf{r}(t), Q(t)) \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}(v_{0t}, r(t), Q(t)) \mathbf{r}(t) = \mathbf{F}(t, \Omega^2, \Omega t, Q(t)), \quad (6.7)$$

gdzie:  $\mathbf{M}(\Omega t, v_{0t}) = \mathbf{M}_0 + \mathbf{M}_u(\Omega t) + \mathbf{M}_r(v_{0t})$ ,  $\mathbf{K}(v_{0t}, Q(t)) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_r(v_{0t}, r(t), Q(t))$ ,

$$\mathbf{C}(\Omega, \Omega t, v_{0t}, \mathbf{r}(t), Q(t)) = \mathbf{C}_0 + \mathbf{C}_g(\Omega) + \mathbf{C}_u(\Omega t) + \mathbf{C}_r(v_{0t}, \mathbf{r}(t), Q(t)).$$

W tych równaniach symbole  $\mathbf{M}_0$ ,  $\mathbf{K}_0$  oznaczają odpowiednio stałe diagonalne modalne macierze bezwładności i sztywności,  $\mathbf{C}_0$  jest stałą symetryczną macierzą tłumienia zewnętrznego, a  $\mathbf{C}_g(\Omega)$  oznacza antysymetryczną macierz efektów żyroskopowych. Człony pochodzące od resztkowych niewyważ kół jezdnych i tarcz hamulcowych są zawarte w symetrycznej macierzy  $\mathbf{M}_u(\Omega t)$  i w niesymetrycznej macierzy  $\mathbf{C}_u(\Omega t)$ . Macierze  $\mathbf{M}_r(v_{0t})$ ,  $\mathbf{K}_r(v_{0t}, r(t), Q(t))$  są odpowiednio macierzami

symetrycznymi, a  $C_r(v_{ot}, \mathbf{R}(t), Q(t))$  jest macierzą niesymetryczną, w których zawarte są człony opisujące efekty kontaktowe występujące między kołami jezdnyymi a szynami. W macierzach  $K_r(v_{ot}, r(t), Q(t))$  i  $C_r(v_{ot}, \mathbf{R}(t), Q(t))$  mogą również występować człony nieliniowe opisujące lepko-sprężyste własności zazębieni przekładni i sprzęgieł podatnych w przypadku modelu wózka napędowego. Symbol  $\mathbf{F}(t, \Omega^2, \Omega t, Q(t))$  oznacza wektor wymuszenia zewnętrznego wywołanego nierównościami bieżni kół jezdnych i szyn, niewyważeniami statycznymi kół jezdnych i tarcz hamulcowych, siłami i momentami kontaktu koło-szyna, siłami grawitacyjnymi, siłami odśrodkowymi działającymi na pojazd szynowy podczas jazdy na łukach oraz momentami zewnętrznymi powodowanymi hamowaniem pojazdu, a w przypadku wózków napędnych – także napędzaniem zestawów kołowych przez silniki elektryczne. Numeryczne rozwiązywanie układu równań (6.7) przy wykorzystaniu jednej z metod bezpośredniego całkowania nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych pozwala na otrzymywanie w dziedzinie czasu i częstości przebiegów dynamicznych sił kontaktu i poślizgów między kołem a szyną, dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez osie zestawów kołowych i przez elementy układów ich napędu oraz przebiegów zadanych wielkości kinematycznych, tj. wzbudzanych drganiami przemieszczeń, prędkości i przyspieszeń w dowolnych punktach badanego obiektu.

### 6.2.3 Wyznaczanie funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF)

W celu wyznaczenia funkcji odpowiedzi częstotliwościowej należy przeprowadzić linearyzację układu równań (6.7) przy identycznych założeniach jak do analizy drgań własnych badanego układu wózek-tor. Zachowane zostają liniowe człony tłumienia zewnętrznego, a człony nieliniowe, na przykład tłumienia w przekładniach zębatych układów napędowych, muszą być poddane linearyzacji. Linearyzacji musi zostać poddany model kontaktu kół jezdnych z szynami. Linearyzacja ta jest dokonywana przy następujących założeniach:

1. wzajemne położenie kół i szyn w kierunku poprzecznym, czyli wzdłuż osi  $Oy$ , przyjmujemy bliskie nominalnemu;
2. przy założeniu „1” można przyjąć stały stosunek średnic elips kontaktowych, dzięki czemu otrzymywane są stałe wartości współczynników Kalkera  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{23}$ ,  $C_{33}$  w (6.4);
3. wypadkowe współczynniki proporcjonalności między składowymi mikro-poślizgów (6.3) a kontaktowymi siłami stycznymi wyznaczone są wg teorii Kalkera przy stałych wartościach sił normalnych koło-szyna wynikających na przykład z obciążenia grawitacyjnego.

Przy powyższych założeniach zlinearyzowany model kontaktu stycznego koło jezdne - szyna nabiera charakteru liniowego tłumienia wiskotycznego - analogicznego jak tłumienie zewnętrzne w badanym układzie mechanicznym. Po przeprowadzeniu linearyzacji dyskretno-ciągłego modelu wózek kolejowy - tor w myśl tak przyjętych założeń równania (6.7) dają się sprowadzić do postaci (3.27). Dalszy tok postępowania w celu wyznaczenia funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (3.30) jest już zgodny z opisem podanym w punkcie 3.2.3.

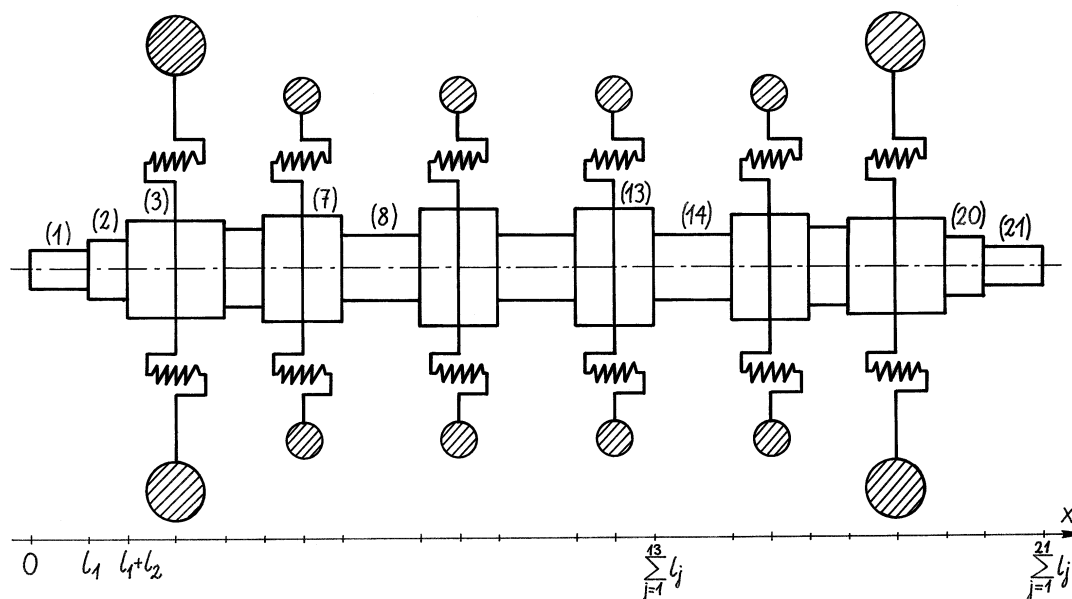
### 6.3 Weryfikacja parametrów dyskretno-ciągłego modelu układu jezdnego pojazdu szynowego i toru kolejowego

W celu uzyskania wymaganej wiarygodności uzyskiwanych wyników, przed przeprowadzaniem obliczeń numerycznych dokonano weryfikacji parametrów dyskretno-ciągłego modelu układu jezdnego pojazdu szynowego, tj. wózka, oraz parametrów dyskretnego modelu toru kolejowego. Najistotniejszym z punktu widzenia dynamicznego oddziaływania w zakresie średnich częstości jest możliwie dokładne wyznaczenie parametrów zestawów kołowych wynikających z ich rzeczywistych wymiarów geometrycznych i stałych materiałowych oraz wyznaczenie wartości mas, sztywności i współczynników tłumienia modelu toru. Pozostałymi parametrami niezbędnymi do przeprowadzania obliczeń przy pomocy proponowanych modeli dyskretno-ciągłych są sztywności i

współczynniki tłumienia elementów usprężynowania pierwotnego i wtórnego oraz masa i masowe momenty bezwładności masy usprężynowanej wózka, tzn. jego ramy wraz z zabudowanym na niej osprzętem, hamulcami, silnikami napędowymi, przekładniami zębatymi i innymi. Parametry zwieszenia wózka i jego ramy uzyskuje się najczęściej na podstawie danych od producenta, z dokumentacji technicznej oraz przy wykorzystaniu wyników odpowiednich pomiarów dokonanych na obiekcie rzeczywistym. Z kolei szczegółowe wymiary geometryczne zestawów kołowych powinny być wyznaczone na podstawie dokumentacji technicznej, a stałe materiałowe, czyli moduły sprężystości, gęstość i współczynnik tłumienia wewnętrzznego, określa się zazwyczaj przy użyciu specjalistycznych tablic. Natomiast parametry liczbowe modelu toru kolejowego są wyznaczane przy wykorzystaniu wymienionej w punkcie 6.1 procedury identyfikacyjnej. W poniższych podpunktach zostaną przedstawione przykładowe wyniki weryfikacji parametrów modelu wybranego zestawu kołowego oraz parametrów modelu trzech rodzajów toru kolejowego.

### 6.3.1 Weryfikacja parametrów modelu zestawu kołowego

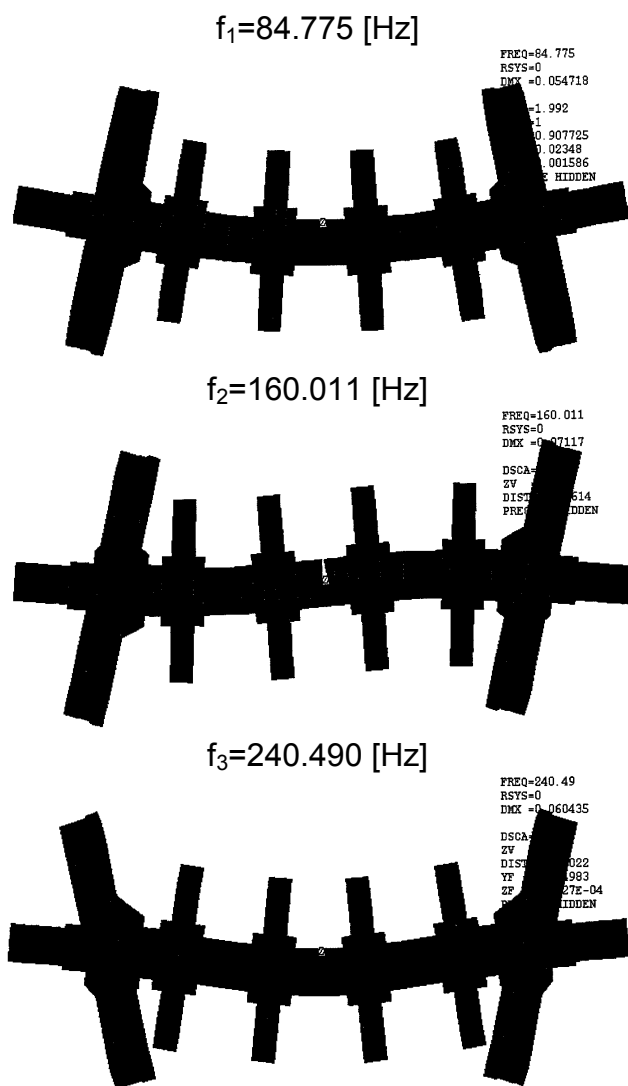
Weryfikację właściwego doboru parametrów liczbowych dyskretno-ciągłego modelu zestawu kołowego przeprowadzono poprzez porównanie wyników analizy giętych drgań własnych z analogicznymi wynikami uzyskanymi za pomocą 3-wymiarowego modelu tego samego zestawu kołowego otrzymanego przy wykorzystaniu metody elementów skończonych. Obiektem porównania jest pokazany na rysunku 2.4 zestaw kołowy o 4 tarczach hamulcowych typu BA-14 wózka MD-530 stosowanego w niemieckich pasażerskich pociągach super-ekspresowych ICE. Model dyskretno-ciągły rozpatrywanego zestawu kołowego pokazano na rysunku 6.5. Zgodnie ze



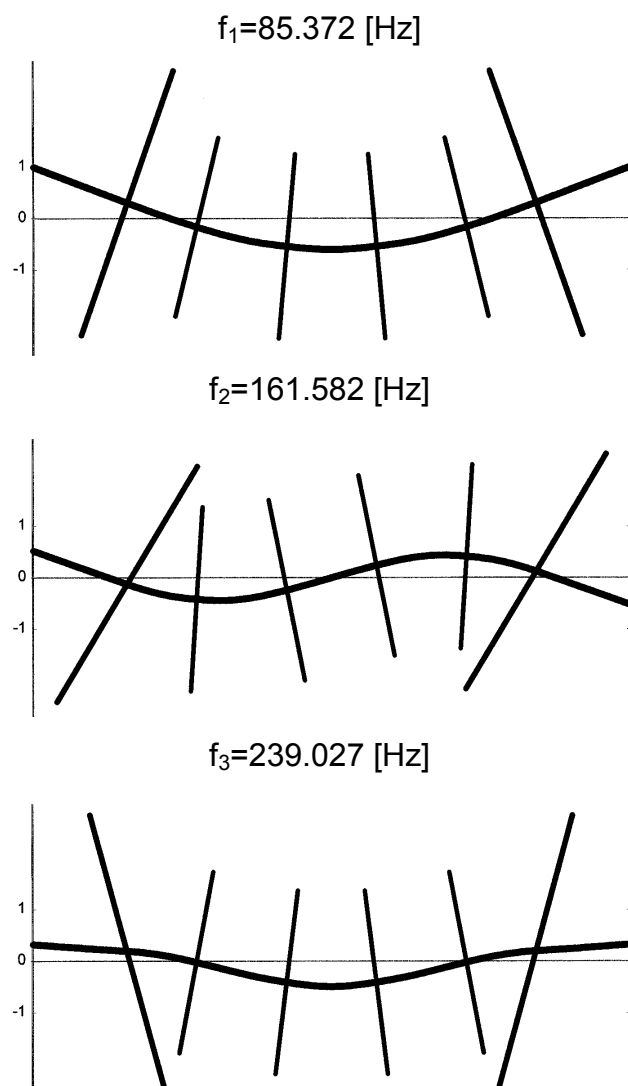
Rys. 6.5 Model dyskretno-ciągły zestawu kołowego typu BA-14

strukturą zestawu rzeczywistego model ten składa się z 21 belkowych L-SMC odpowiadających poszczególnym cylindrycznym segmentom osi oraz z reprezentujących koła jezdne i tarcze hamulcowe 6 pierścieni sztywnych zamocowanych z osią przy pomocy nieważkich membran sprężystych. W przypadku obydwu porównywanych modeli przyjęto swobodne podparcie osi na obu końcach i badano gięte drgania własne zestawu w jednej płaszczyźnie. Wymiary geometryczne poszczególnych makroelementów modelu dyskretno-ciągłego i parametry bezwładnościowe pierścieni sztywnych ustalono na podstawie dokumentacji technicznej zestawu kołowego BA-14. Podobnie jak w przypadku sztywności osiowych, tarcze hamulcowe rzeczywistych zestawów kołowych charakteryzują się znacznie większymi średnicowymi sztywnościami giętymi niż średnicowe sztywności gięte kół jezdnych. Dlatego w zakresie średnich częstości dla zestawu BA-14 do obliczeń założono nieskończone wartości średnicowych

sztywności giętych membran łączących z osiami zestawów pierścienie reprezentujące tarcze hamulcowe. Natomiast średnicowe sztywności gięte membran łączących z osiami zestawów pierścienie sztywne reprezentujące koła jezdne wyznaczono przy wykorzystaniu znajomości wartości częstości  $\omega$  drgań własnych przyporządkowanej postaci giętej średnicowej uzyskanej w pracy [51] za pomocą 3-wymiarowego modelu MES koła rozpatrywanego zestawu. Wówczas, zgodnie z procedurą identyfikacyjną opisaną w [130], znając wartość masy modalnej, względnie modalnego masowego średnicowego momentu bezwładności tego koła  $I_k$  nietrudno wyznaczyć zastępczą sztywność giętą membrany  $\mu=I_k\omega^2$ . Za pomocą modelu dyskretno-ciągłego zagadnienie giętych sprężystych drgań własnych w jednej płaszczyźnie pojedynczego zestawu kołowego rozwiązano przy geometrycznych warunkach brzegowych zgodności przemieszczeń i kątów obrotu (5.13a) i (5.13b) oraz przy dynamicznych warunkach brzegowych równowagi sił i momentów gnących (6.2a) i (6.2h) dla  $k_{V1}=0$  i  $k_{H1}=0$ , (6.2b) i (6.2i) przy  $\Omega=0$ , (6.2d) dla  $k_{Cl1}=0$ ,  $\epsilon_{li}=0$ ,  $G_{wi}=0$ ,  $F_{10li}=F_{11li}=0$ , (6.2e) i (6.2f) przy  $\Omega=0$ ,  $I_{x2li}=I_{y2li}=0$ ,  $F_{22li}=F_{23li}=0$ .



Rys. 6.6 Pierwsze trzy formy giętych drgań własnych i odpowiadające im częstotliwości otrzymane przy wykorzystaniu 3-wymiarowego modelu MES, [112]



Rys. 6.7 Pierwsze trzy formy giętych drgań własnych i odpowiadające im częstotliwości otrzymane przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego

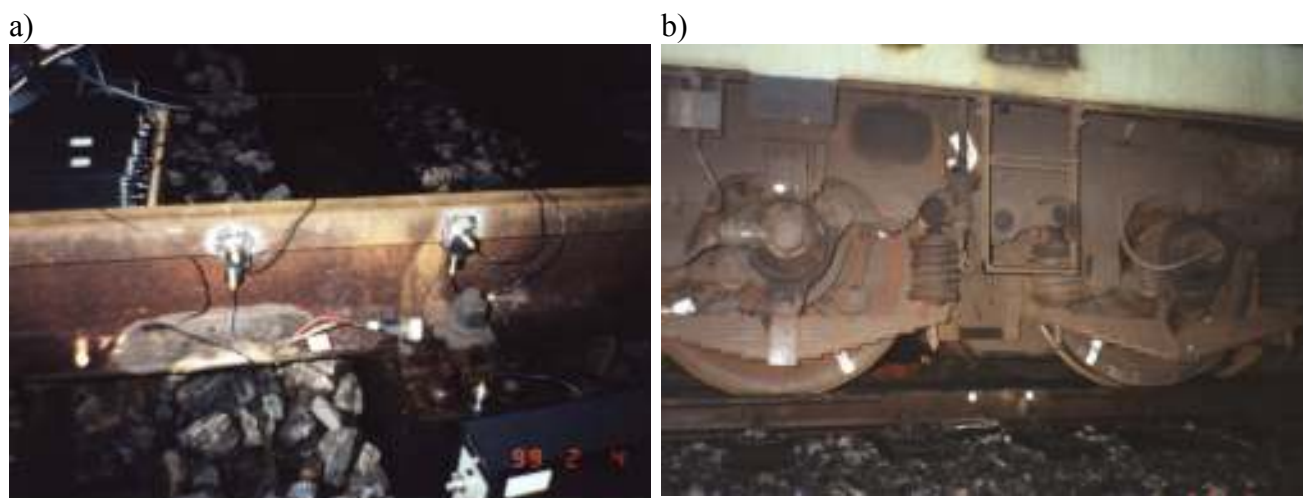
Na rysunku 6.6 przedstawiono uzyskane w pracy [112] w zakresie częstości 0÷300 Hz trzy pierwsze postacie giętych drgań własnych w jednej płaszczyźnie wymienionego zestawu kołowego. Jak zaznaczono w [112], otrzymane rezultaty analizy drgań własnych są zbliżone do analogicznych wyników uzyskanych drogą eksperymentu przeprowadzonego na zestawie

rzeczywistym. Z kolei na rysunku 6.7 przedstawiono pierwsze trzy postacie giętych drgań własnych i odpowiadające im częstotliwości uzyskane przy wykorzystaniu stosowanej w pracy metodyki rozwiązania. Jak widać, kolejne trzy funkcje własne otrzymane za pomocą 1-wymiarowego dyskretno-ciągłego modelu zestawu kołowego mają kształt analogiczny do odpowiadających im postaci drgań z rys. 6.6 uzyskanych przy użyciu 3-wymiarowego modelu MES, gdzie wzajemne różnice względne przyporządkowanych tym postaciom częstości własnych nie przekraczają 1%.

Zademonstrowane powyżej porównanie analiz giętych drgań własnych kolejowego zestawu kołowego wykazuje, iż proponowany w pracy sposób modelowania daje prawie identyczne wyniki jak metoda powszechnie uznana i ciesząca się dużą wiarygodnością w zastosowaniach technicznych. Ponadto należy stwierdzić, że poddane konfrontacji z modelem 3-wymiarowym zastosowanie w modelu dyskretno-ciągłym teorii zginania Bernoulli’ego-Eulera do osi zestawów kołowych wydaje się być wystarczająco dokładne w najbardziej istotnym z punktu widzenia średnio-częstotliwościowego oddziaływania pojazd szynowy – tor zakresie 0÷300 Hz.

### 6.3.2 Weryfikacja parametrów modelu toru kolejowego

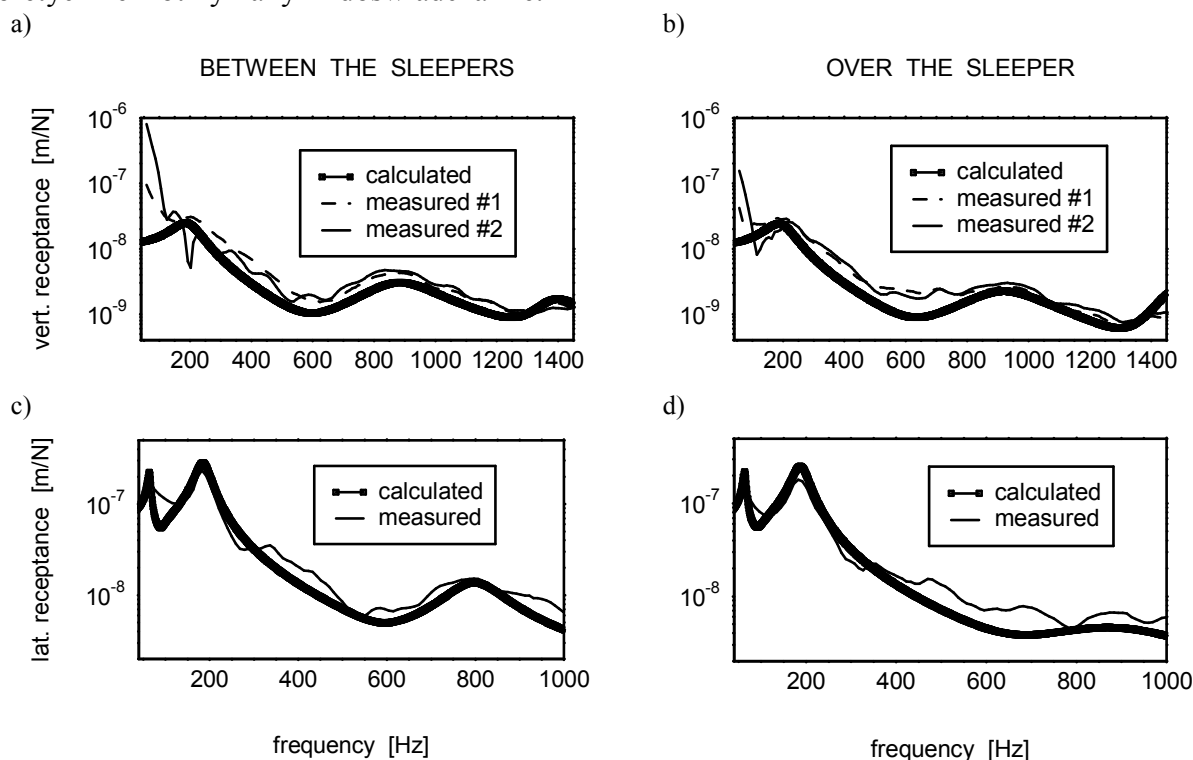
Parametry dyskretnego funkcjonalnego modelu toru kolejowego, czyli masy brył sztywnych oraz sztywności i współczynniki tłumienia elementów nieważkich, zostały wyznaczone zgodnie z założeniami przedstawionymi w punkcie 6.1, gdzie kryterium poprawności doboru stanowią porównania z wynikami pomiarów przeprowadzonych na obiekcie rzeczywistym. Przedmiotem tych porównań są obliczone i zmierzone pionowe sztywności statyczne toru oraz jego receptancje dynamiczne uzyskane w położeniach oddziaływania „nad podkładem” i „między podkładami”. Pomiar przeprowadzono na poligonie doświadczalnym Centrum Naukowo-Technicznego Kolejnictwa w Żmigrodzie k. Wrocławia dla trzech najbardziej reprezentatywnych prostych odcinków torów kolejowych występujących na liniach PKP, tzn. dla toru „twardego” podpartego na podkładach betonowych i dla dwóch rodzajów toru podpartych na podkładach drewnianych, tj. toru „bardzo miękkiego” i „miękkiego”. Badania doświadczalne wykonywano przy wykorzystaniu znanych technik stosowanych m.in. w [131, 152]. W celu wyznaczenia receptancji dynamicznych pobudzano tor do drgań w kierunku pionowym i poprzecznym w sposób impulsowy za pomocą uderzeń młotkiem oraz w sposób stacjonarny sygnałem harmonicznym przy wykorzystaniu wzbudnika hydraulicznego. Odpowiednie charakterystyki amplitudowo-częstotliwościowe są następnie uzyskiwane drogą dwukrotnego całkowania numerycznego zarejestrowanych sygnałów przyspieszeń drgań przejściowych lub ustalonych. Z kolei pionowe sztywności statyczne toru są wyznaczane w formie stosunku wartości znanego obciążenia grawitacyjnego przyłożonego do toru,



Rys. 6.8 Stanowisko doświadczalne do wyznaczania (a) receptancji dynamicznych i (b) sztywności statycznych toru kolejowego

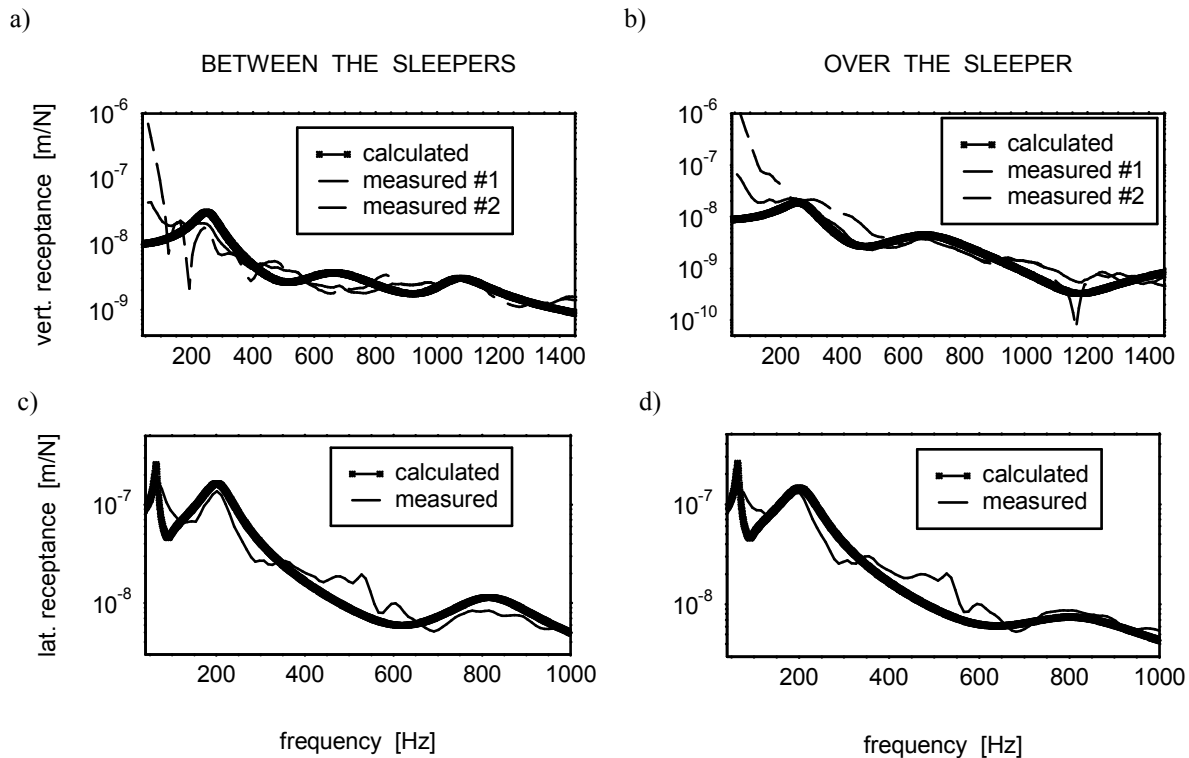
na przykład przejeżdżającego z bardzo małą prędkością pojazdu szynowego, w tym wypadku lokomotywy elektrycznej ET-22 o ciężarze  $\sim 120$  ton, do zmierzonego chwilowego ugięcia szyny. Szczegółowe informacje dotyczące sposobu przeprowadzania tych pomiarów zawarto w pracy [59], a przykładowe stanowiska doświadczalne służące do wyznaczania receptancji dynamicznych i sztywności statycznej pokazano odpowiednio na rysunku 6.8 a i b.

Na rysunkach 6.9, 6.10 i 6.11 przedstawiono naniesione we wspólnych układach współrzędnych uzyskane drogą pomiarów i obliczeń teoretycznych pionowe i poprzeczne receptancje dynamiczne w położeniach oddziaływania „między podkładami” i „nad podkładem” w przypadkach wspomnianych powyżej trzech rodzajów toru, czyli toru „bardzo miękkiego” i „miękkiego” o przeciętnych pionowych sztywnościach statycznych na szynę odpowiednio  $0.82 \cdot 10^8$  N/m i  $1.10 \cdot 10^8$  N/m oraz toru „twardego” o sztywności na szynę  $2.03 \cdot 10^8$  N/m. Na tych rysunkach liniami cienkimi zaznaczono receptancje będące wynikiem badań doświadczalnych, a liniami grubymi – receptancje obliczone teoretycznie będące w tym przypadku funkcjami odpowiedzi częstotliwościowej dyskretnego modelu toru kolejowego. W przypadku toru „bardzo miękkiego” i „miękkiego” otrzymano dobrą zgodność wyników obliczeń teoretycznych z wynikami doświadczalnymi, rys. 6.9, 6.10. Natomiast w przypadku toru „twardego”, jak pokazano na rysunku 6.11, receptancje obliczone cechuje pewna rozbieżność w stosunku do receptancji uzyskanych drogą pomiarów, szczególnie w zakresie niższych częstotliwości  $0 \div 200$  Hz, w którym występują ogólnie znane obiektywne trudności przy wyznaczaniu charakterystyk amplitudowo-częstotliwościowych w przypadku wzbudzania układu rzeczywistego sygnałami impulsowymi. Dlatego w [59] w tym zakresie częstości zastosowano do pomiarów wzbudzenie drgań toru sygnałem stacjonarnym uzyskując dzięki temu lepszą zgodność receptancji obliczonych teoretycznie z otrzymanymi doświadczalnie.

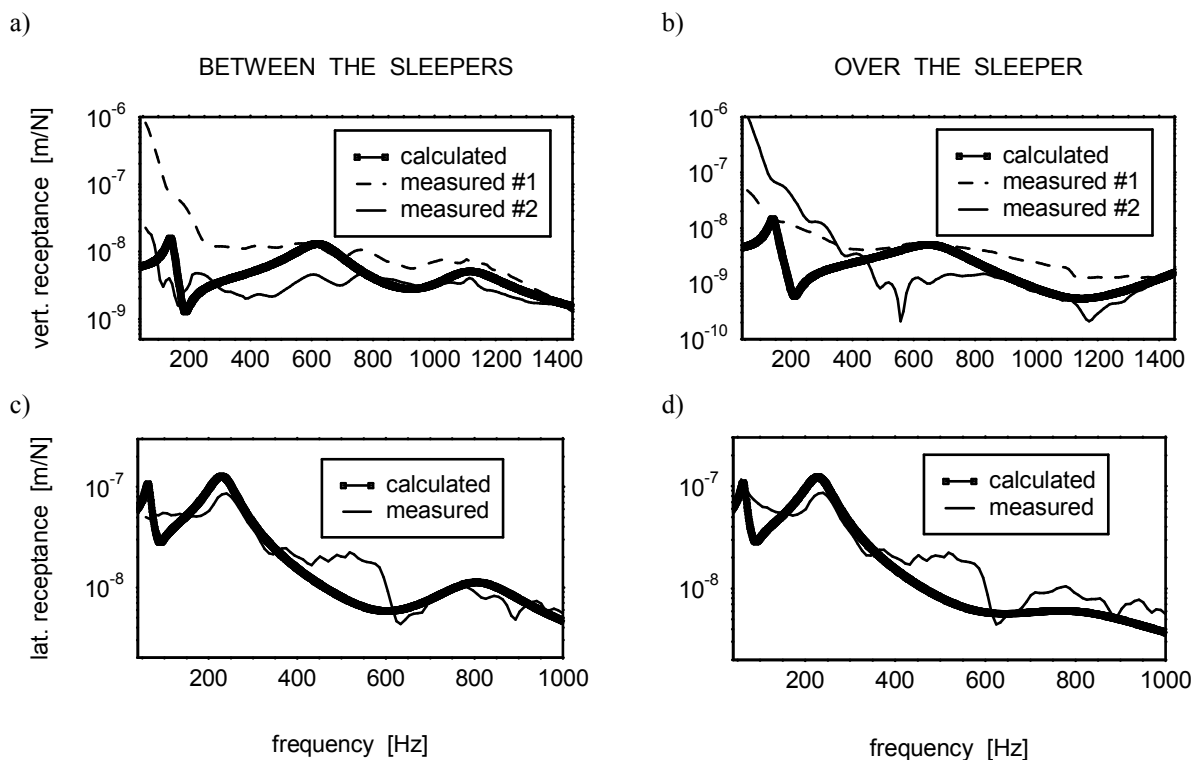


Rys. 6.9 Pionowe i poprzeczne receptancje dynamiczne toru „bardzo miękkiego” o sztywności na szynę  $0.82 \cdot 10^8$  N/m

Przedstawione powyżej wyniki doświadczalnej identyfikacji parametrów modelu toru kolejowego zostały uzyskane w przypadku torów prostych przy założeniu ich symetrii względem osi podłużnej, przez co tor można interpretować jako „podwójną szynę” podpartą na podkładach. Wtedy jedynie symetryczne względem osi podłużnej toru postaci drgań mogą być przedmiotem identyfikacji. Natomiast badanie niesymetrycznych postaci drgań toru wymaga dalszych badań



Rys. 6.10 Pionowe i poprzeczne receptancje dynamiczne toru „miękkiego” o sztywności na szynę  $1.10 \cdot 10^8$  N/m



Rys. 6.11 Pionowe i poprzeczne receptancje dynamiczne toru „twardego” o sztywności na szynę  $2.03 \cdot 10^8$  N/m

zarówno eksperymentalnych jak i teoretycznych. Receptancje dynamiczne proponowanego modelu toru przyporządkowywano każdej pojedynczej „poduszce dynamicznej” osobno lub przyporządkowywano je obydwóm „poduszkom” wózka traktowanym jako drgające wzajemnie „w fazie”. Ruchy względne tych „poduszek” są silnie sprzężone widocznymi na rysunkach 6.1, 6.2 i 6.3 bezmasowymi elementami lepko-sprężystymi o sztywnościach  $k_{cy}$ ,  $k_{cl}$  i  $k_{ct}$ , wartości liczbowe których zidentyfikowano również doświadczalnie drogą porównywania odpowiadających sobie

receptancji dynamicznych wyznaczanych bezpośrednio w punktach wymuszenia drgań szyny oraz w punktach szyny odległych od miejsc wymuszenia o wartość rozstawu osi wózka  $2b$ .

W pracach [179, 181, 186] badano również oddziaływanie układów jezdnych pojazdów szynowych z torem zwanym „bardzo twardym” o średniej statycznej sztywności pionowej na szynę  $\sim 3.0 \cdot 10^8$  N/m oraz z torem zwanym „średnim” o średniej statycznej sztywności pionowej na szynę  $\sim 1.4 \cdot 10^8$  N/m. W tych przypadkach torów kolejowych parametry liczbowe proponowanego dyskretnego modelu toru wyznaczano w sposób opisany w punkcie 6.1 z różnicą polegającą na porównywaniu pionowych i poprzecznych receptancji dynamicznych otrzymany drogą obliczeń teoretycznych z analogicznymi receptancjami wyznaczanymi również dzięki obliczeniom teoretycznym lecz przy wykorzystaniu złożonego modelu toru z pracy [152] w postaci skończonej struktury periodycznej, własności dynamiczne i statyczne którego uprzednio także zidentyfikowano doświadczalnie.

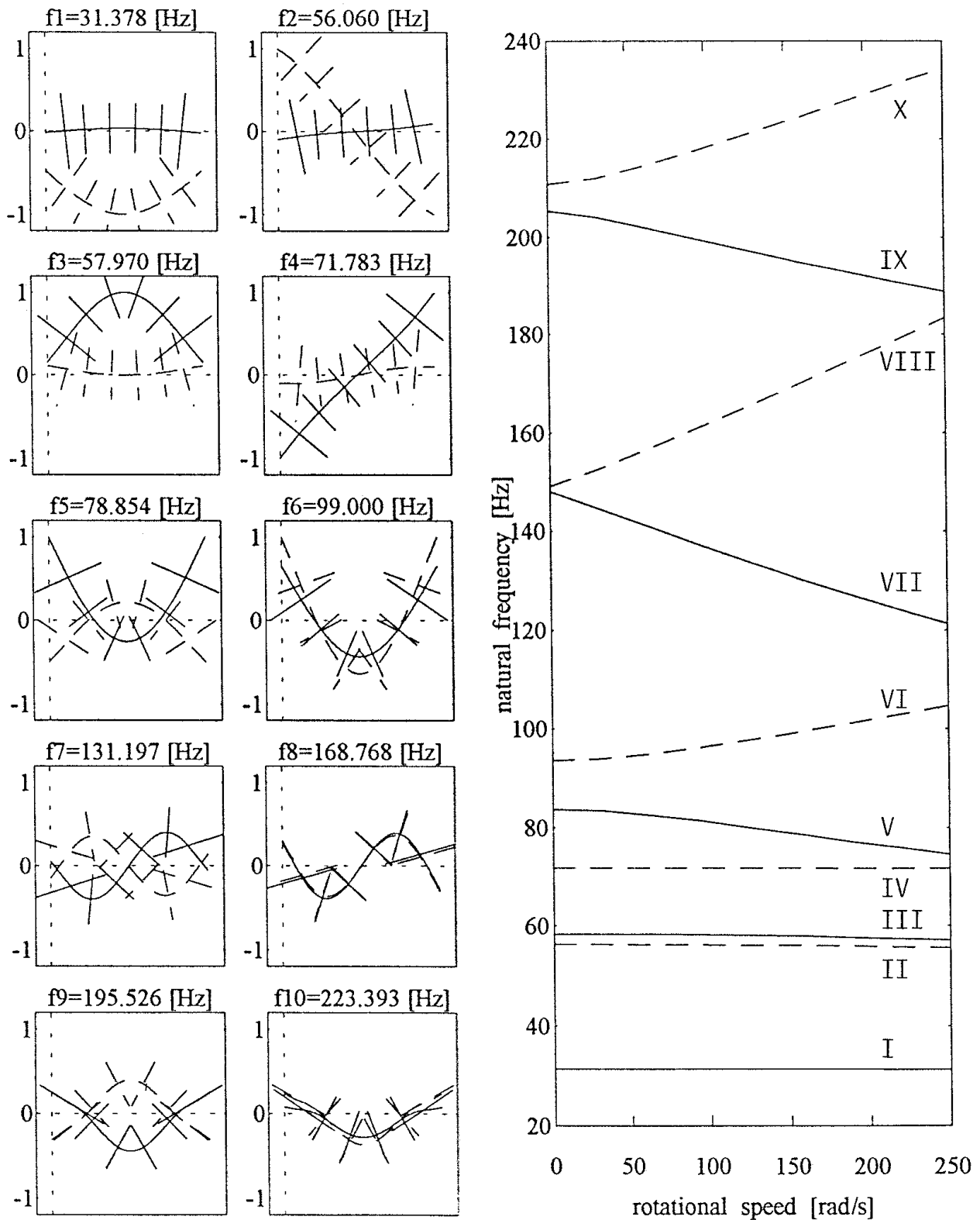
## **6.4 Wyniki obliczeń otrzymane za pomocą dyskretno-ciągłych modeli układów wózek toczny - tor kolejowy**

### **6.4.1 Analiza drgań własnych**

W celu umożliwienia oceny własności dynamicznych układu jezdnego pojazdu szynowego oddziaływującego z torem wydaje się być wskazane przeprowadzenie badań jakościowych modelu tego obiektu w formie analizy drgań własnych. Jak zaznaczono w punkcie 6.1, zagadnienie drgań własnych niethumionych dyskretno-ciągłego modelu układu wózek kolejowy – tor jest rozwiązywane w postaci niezależnych czterech „podproblemów” własnych: drgań giętnych zestawów kołowych sprzężonych z pionowymi drganiami modelu toru, drgań skrętnych zestawów kołowych, drgań poprzecznych modelu wózka oraz własnych drgań poprzecznych modelu toru. W pracach [179, 181] badano oddziaływanie dynamiczne z torem „bardzo twardym” i „średnim” pojedynczego zestawu kołowego typu BA-14 o 4 tarczach hamulcowych, prawidłowość doboru parametrów którego rozpatrywano w punkcie 6.3.1. Badanie własnych drgań giętnych zestawu kołowego sprzężonych z pionowymi drganiami toru sprowadza się w tym przypadku do analizy problemu przestrzennych drgań klasycznego wału wirnikowego zawieszono w obu końcach na podporach o własnościach anizotropowych ze względu na różne wartości sztywności pionowej i wzdłużnego usprężynowania pierwotnego rzeczywistego wózka kolejowego. Tę anizotropię zwiększa tu obecność modelu toru pełniące rolę dodatkowych podpór działających tylko w płaszczyźnie pionowej. Na rysunku 6.12a przedstawiono uzyskane przy wykorzystaniu procedury obliczeniowej opisanej w punkcie 6.2 10 pierwszych postaci giętnych drgań własnych układu zestaw kołowy – tor w zakresie częstotliwości  $0 \div 250$  Hz przy prędkości wirowania osi  $\Omega = 150$  rad/s odpowiadającej prędkości ruchu pojazdu szynowego  $v_o = 69$  m/s = 248.4 km/h dla promienia tocznego koła jezdnego  $r_o = 0.46$  m. Na tym rysunku liniami ciągłymi zaznaczono rzuty kolejnych funkcji własnych na płaszczyznę pionową, a liniami przerywanymi zaznaczono rzuty kolejnych funkcji własnych na płaszczyznę poziomą. Naturalną konsekwencją symetrycznej struktury rozpatrywanego układu względem osi podłużnej toru jest otrzymywanie symetrycznych i antysymetrycznych postaci drgań własnych, jak pokazano na rys. 6.12a. Silnie anizotropowe warunki podparcia zestawu kołowego powodują wyraźne różnice kształtów odpowiednio pionowych i poziomych składowych funkcji własnych w przypadku pierwszych sześciu postaci drgań. Natomiast pozostałe cztery postacie drgań charakteryzują się prawie identycznymi pionowymi i poziomymi składowymi funkcji własnych, co świadczy o małym na nie wpływie własności podparcia. Ponieważ rozpatrywany zestaw kołowy BA-14 jest stosowany w szybkich pasażerskich pociągach super-ekspresowych ICE, zbadano również wpływ efektów żyroskopowych na wartości częstości jego pierwszych 10 postaci giętnych drgań własnych. Na rysunku 6.12b zamieszczono wykresy wartości tych częstotliwości w funkcji prędkości kątowej osi zestawu w zakresie  $\Omega = 0 \div 250$  rad/s, co dla wymienionego promienia tocznego  $r_o$  odpowiada zakresowi



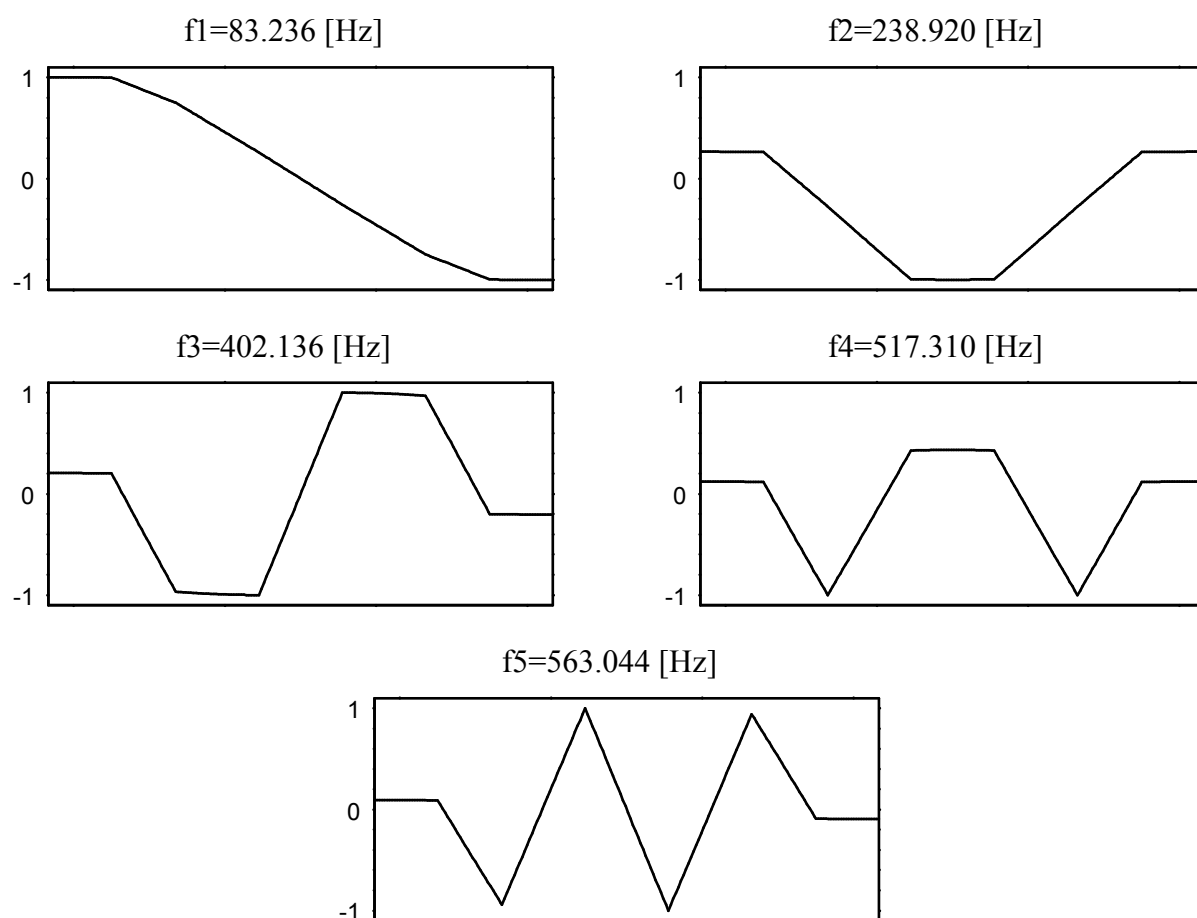
prędkości jazdy 0÷414 km/h. Z otrzymanych zależności wynika, że wpływ efektów żyroskopowych, a więc i prędkości jazdy, na pierwsze 4 postaci drgań giętnych zestawu kołowego jest pomijalny, gdyż wartości odpowiadających im częstości praktycznie nie zmieniają się w całym badanym zakresie prędkości kątowych. Natomiast pozostałe 6 postaci drgań własnych cechuje wyraźna zależność wartości częstości od prędkości kątowej zestawu, czyli i od prędkości jazdy pociągu.



Rys. 6.12 Wyniki analizy giętnych drgań własnych pojedynczego zestawu kołowego BA-14: (a) pierwsze 10 funkcji własnych i odpowiadające im częstości, (b) zależność wartości częstości drgań własnych od prędkości kątowej zestawu

Wzrost  $\Omega$  powoduje spadek wartości częstości własnych w przypadku piątej, siódmej i dziewiątej postaci drgań oraz zwiększanie wartości częstości własnych w przypadku szóstej, ósmej i dziesiątej postaci drgań giętnych zestawu kołowego, jak pokazano na rys. 6.12b. W związku z powyższym możemy stwierdzić, że szybko obracający się kolejowy zestaw kołowy wykazuje opisane m.in. w pracach [60, 100, 101] efekty precesji współbieżnej i przeciwbieżnej typowe dla wałów wirnikowych podpartych w łożyskach o własnościach anizotropowych.

W przypadku rozwiązywania zagadnienia skrętnych drgań własnych kolejowy zestaw kołowy można traktować jako wał stopniowy z osadzonymi na nim sztywnymi tarczami. Pierwsze pięć funkcji własnych i odpowiadające im częstotliwości skrętnych drgań własnych nietłumionych modelu zestawu kołowego BA-14 z czterema tarczami hamulcowymi przedstawia rysunek 6.13. Z rysunku tego wynika, że w zakresie częstości 0÷1000 Hz rozpatrywany zestaw kołowy ma 3 antysymetryczne i 2 symetryczne postacie skrętnych drgań własnych.



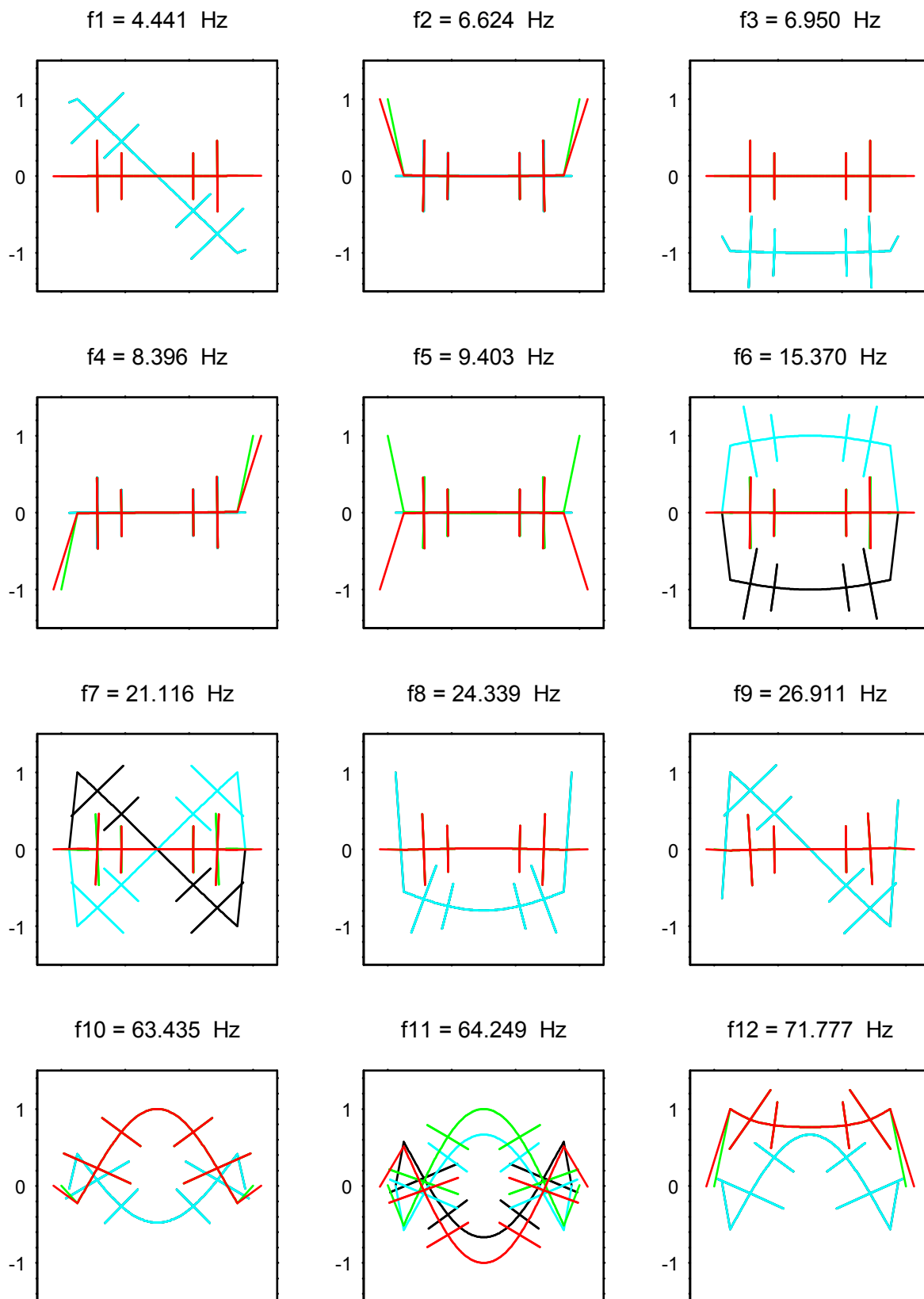
Rys. 6.13 Pierwsze 5 funkcji skrętnych drgań własnych zestawu kołowego BA-14 i odpowiadające im częstotliwości

Rozwiązując zagadnienie drgań własnych dyskretno-ciągłego modelu całego wózka analiza drgań skrętnych sprowadza się do rozpatrywania reprezentujących oba zestawy kołowe dwóch niezależnych wałów stopniowych z osadzonymi na nich sztywnymi tarczami. Natomiast przy rozwiązywaniu zagadnienia giętnych drgań własnych zestawów kołowych należy je interpretować jako drgania dwóch klasycznych wirników wzajemnie sprzężone z jednej strony oddziaływaniem ramy wózka, a z drugiej strony podparciem modelu toru pełniącego tu również rolę dodatkowych łożysk działających jedynie w kierunku pionowym. W pracy [186] dokonano analizy drgań własnych dyskretno-ciągłego modelu wózka polskiej produkcji typu 25ANa o zestawach kołowych mających po 2 tarcze hamulcowe przeznaczonego do nowoczesnych wagonów pasażerskich. Rysunki 6.14 a,b przedstawiają w zakresie częstości 0÷250 Hz przykładowe wyniki analizy drgań giętnych modelu tego wózka oddziaływującego ze wspomnianym powyżej torem „twardym”,

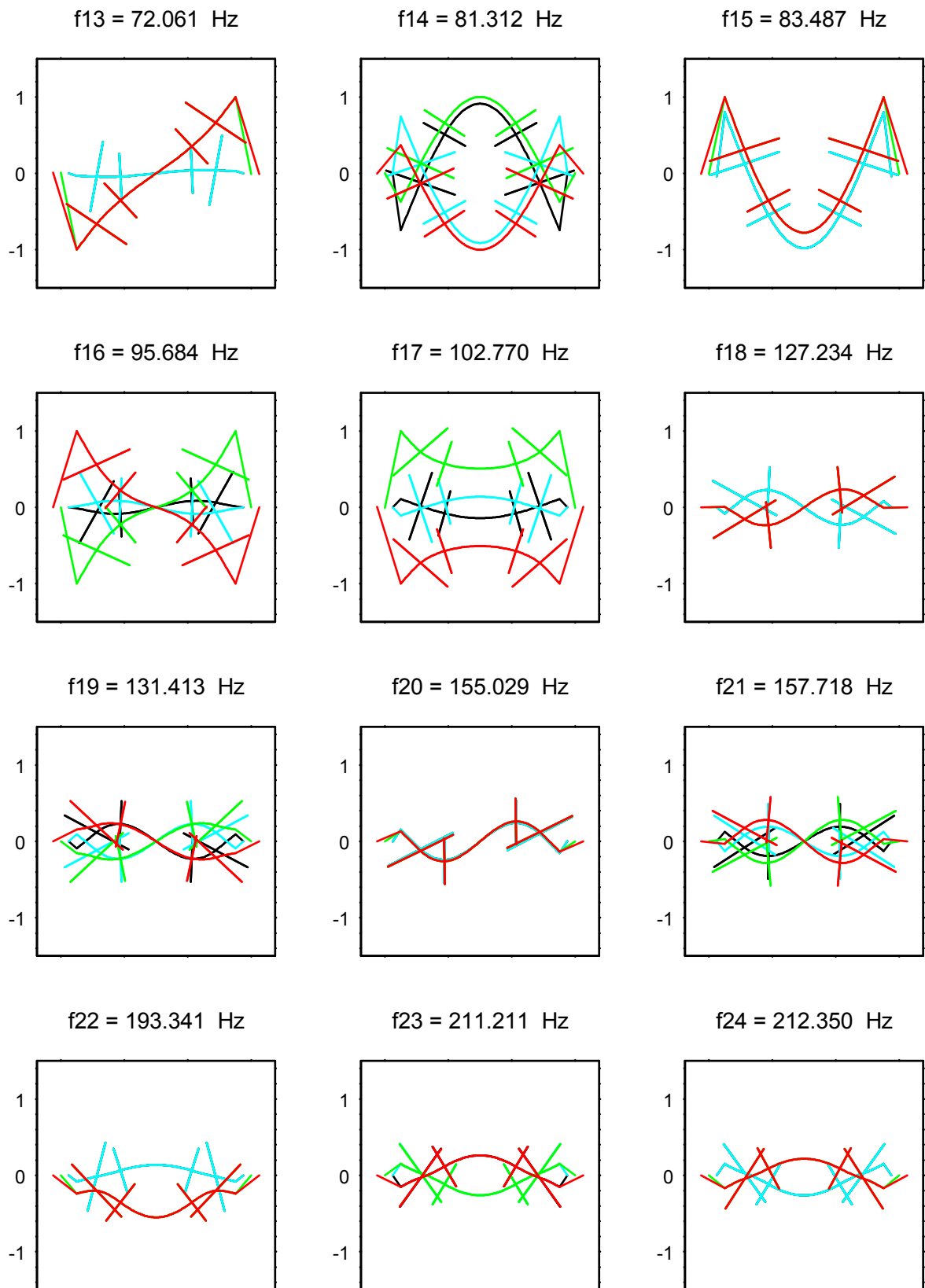
receptancje dynamiczne którego pokazano na rys. 6.11. Tymi wynikami są funkcje własne i przyporządkowane im częstości otrzymane przy prędkości kątowej zestawów kołowych  $\Omega=120.8$  rad/s odpowiadającej dla promienia tocznego koła jezdnego  $r_0=0.46$  m maksymalnej dopuszczalnej prędkości jazdy wymienionego wózka  $v_0=55.6$  m/s  $\approx 200$  km/h. Na rysunkach 6.14 a,b składowe pionowe funkcji własnych pierwszego zestawu kołowego wózka zaznaczono liniami czerwonymi, a składowe poziome – liniami niebieskimi. Z kolei składowe pionowe funkcji własnych drugiego zestawu kołowego wózka zaznaczono liniami zielonymi, a składowe poziome – liniami czarnymi. Lewe i prawe „końce” składowych funkcji własnych obu zestawów kołowych są połączone za pomocą kresek odpowiednio w tych samych kolorach z punktami, które w sposób symboliczny obrazują przemieszczenia modalne przyporządkowanych „końcom” tych funkcji „narożników” bryły sztywnej reprezentującej bezwładność ramy wózka. Dzięki temu można obserwować przemieszczenia modalne ramy wózka względem modalnych przemieszczeń zestawów kołowych. W rozpatrywanym zakresie częstotliwości badany układ wózek-tor ma 25 postaci giętych drgań własnych, z których na rysunkach 6.14 a,b przedstawiono tylko 24. Jak wynika z rys. 6.14a, pierwsze dziewięć postaci drgań zawiera się w tzw. kolejowym zakresie “niskich” częstotliwości oddziaływania  $0\div 30$  Hz. Te postaci drgań charakteryzują się niedokształconymi lub prawie niedokształconymi zestawami kołowymi. W przypadku pierwszej postaci drgań o częstotliwości  $f_1=4.441$  Hz obydwie zestawy kołowe obracają się „w fazie” wraz z ramą wózka wokół osi pionowej. Przy drugiej postaci drgań ( $f_2=6.624$  Hz) obydwie zestawy kołowe pozostają w spoczynku, a jedynie rama wózka doznaje przemieszczeń translacyjnych w kierunku pionowym. Przy trzeciej postaci ( $f_3=6.950$  Hz) obydwie zestawy kołowe drgają razem w tylko kierunku wzdłużnym symetrycznie względem osi toru „w fazie” z przemieszczeniami translacyjnymi ramy wózka. W przypadku czwartej postaci drgań o częstotliwości  $f_4=8.396$  Hz obydwie zestawy kołowe pozostają w spoczynku, a jedynie rama wózka obraca się wokół osi podłużnej, tj. równoległej do osi toru. Piąta postać drgań ( $f_5=9.403$  Hz) odpowiada tzw. kołysaniu wzdłużnemu, przy którym obydwie zestawy kołowe pozostają w spoczynku, a jedynie rama wózka obraca się wokół osi poprzecznej, czyli poziomej prostopadłej do osi toru. Przy szóstej postaci ( $f_6=15.370$  Hz) rama wózka pozostaje w spoczynku, a obydwie zestawy kołowe drgają symetrycznie w kierunku wzdłużnym wzajemnie „w przeciw-fazie”. W przypadku siódmej postaci drgań o częstotliwości  $f_7=21.116$  Hz rama wózka również pozostaje w spoczynku, a obydwie zestawy kołowe doznają wzajemnych obrotów „w przeciw-fazie” tylko wokół osi pionowej. Ósma postać drgań ( $f_8=24.339$  Hz) stanowi przeciwieństwo postaci trzeciej, gdzie obydwie zestawy kołowe drgają razem symetrycznie w kierunku wzdłużnym „w przeciw-fazie” względem ramy wózka. Podobnie, dziewiąta postać drgań o częstotliwości  $f_9=26.911$  Hz jest przeciwieństwem postaci pierwszej, gdzie obydwie zestawy kołowe obracają się razem względem osi pionowej „w przeciw-fazie” w stosunku do obracającej się również wokół tej osi ramy wózka. Jak zaznaczono w pracy [186], analogiczna analiza giętych drgań własnych przeprowadzona dla rozpatrywanego typu wózka oddziaływującego z torem „bardzo miękkim” oraz z torem „bardzo twardym” w zakresie częstości  $0\div 30$  Hz daje niemal identyczne wyniki, tj. funkcje i częstości, jak te przedstawione na rys. 6.14a. Oznacza to, że w zakresie  $0\div 30$  Hz statyczne i dynamiczne własności toru nie wpływają istotnie na proces oddziaływania z wózkiem kolejowym, co uzasadnia powszechnie stosowane założenie modelu sztywnego toru przyjmowane przez większość badaczy w zakresie niskich częstości drgań pojazdów szynowych, [84, 135, 145, 196]. Co więcej, analiza giętych drgań własnych omawianego układu wózek-tor przeprowadzona przy różnych prędkościach kątowych zestawów kołowych w zakresie  $\Omega=0\div 250$  rad/s wykazała znikomy wpływ efektów żyroskopowych na wszystkie postaci i częstości własne otrzymane w zakresie niskich częstości.

Następne 15 postaci drgań giętych należy już do typowego zakresu kolejowych średnich częstości oddziaływania pojazd szynowy – tor, gdzie pierwszym z nich odpowiadają częstości własne większe niż 60 Hz. Jak pokazują rysunki 6.14 a i b, w przypadku wszystkich postaci

odkształcenia gięte zestawów kołowych są dominujące, a rama wózka pozostaje w spoczynku. W tym zakresie częstotliwości obydwa zestawy kołowe zachowują się jak dwa klasyczne wirniki, których



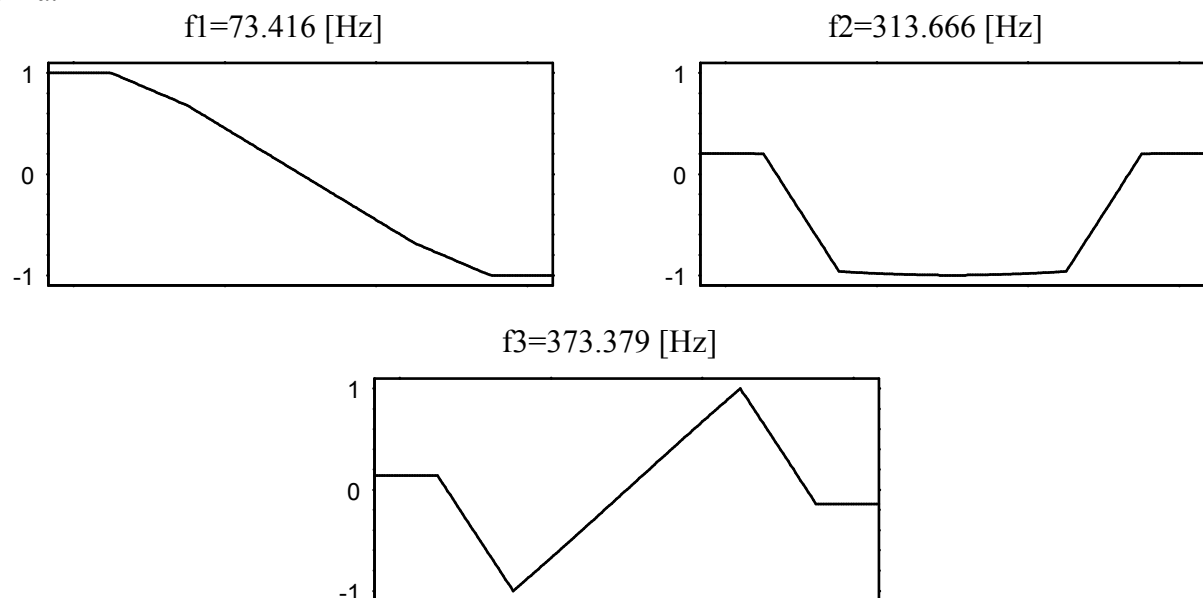
Rys. 6.14a Wyniki analizy giętych drgań własnych dyskretno-ciągłego modelu zestawów kołowych wózka 25ANa - pierwsze 12 funkcji własnych i odpowiadające im częstotliwości



Rys. 6.14b Wyniki analizy giętych drgań własnych dyskretno-ciągłego modelu zestawów kołowych wózka 25ANa - następane 12 funkcji własnych i odpowiadające im częstotliwości

drżania gięte są wzajemnie ze sobą sprzężone nie poprzez ramę wózka, lecz wskutek oddziaływania z torem. Ponadto, na wirujące zestawy działają siły żyroskopowe sprzęgając ich drżania w płaszczyźnie pionowej i poziomej, co demonstrują kształty wszystkich funkcji własnych pokazanych na rys. 6.14 a,b, tj. od postaci 10-tej do 24-tej. Porównując funkcje własne i przyporządkowane im częstości kolejnych średniczęstotliwościowych postaci drżań z analogicznymi postaciami drżań własnych otrzymanych dla pojedynczego zestawu kołowego w pracach [179, 181] i pokazanych na rys. 6.12a, nietrudno zauważyć podobieństwo kształtów odpowiadających sobie funkcji własnych oraz zbliżone wartości przyporządkowanych im częstości. Niemniej jednak należy podkreślić, że przy każdej postaci drżań odpowiadającej precesji współbieżnej i przeciwbieżnej w przypadku drżań dwóch identycznych zestawów kołowych wózka każdy zestaw drga względem drugiego „w fazie” oraz „w przeciw-fazie”, co podwaja łączną liczbę „wirmikowych” postaci drżań giętych w badanym zakresie średnich częstości. Jak wykazano w [186], analogiczne wyniki analizy giętych drżań własnych w zakresie średnich częstości modelu badanego wózka oddziaływującego z torem „bardzo miękkim” oraz z torem „bardzo twardym” charakteryzuje podobieństwo kształtów odpowiadających sobie funkcji własnych, przy czym wzajemne różnice względne wartości przyporządkowanych tym funkcjom częstości wynoszą przeciętnie od kilku do kilkunastu procent, nie przekraczając w tylko jednym przypadku 23%. Ponadto, można zaobserwować nieco odmienną kolejność następujących po sobie postaci drżań własnych.

Na rysunku 6.15 przedstawiono wyniki analizy skrętnych drżań własnych modelu pojedynczego zestawu kołowego wózka 25ANa. Przeprowadzone obliczenia wykazały, że w zakresie średnich częstości badany pojedynczy zestaw kołowy o 2 tarczach hamulcowych ma dwie antysymetryczne i jedną symetryczną postać drżań. W przypadku dwóch identycznych zestawów kołowych w wózku funkcje własne tych postaci występują nawzajem odpowiednio „w fazie” oraz „w przeciw-fazie”, dając łączną liczbę sześciu skrętnych postaci drżań własnych modelu całego wózka.

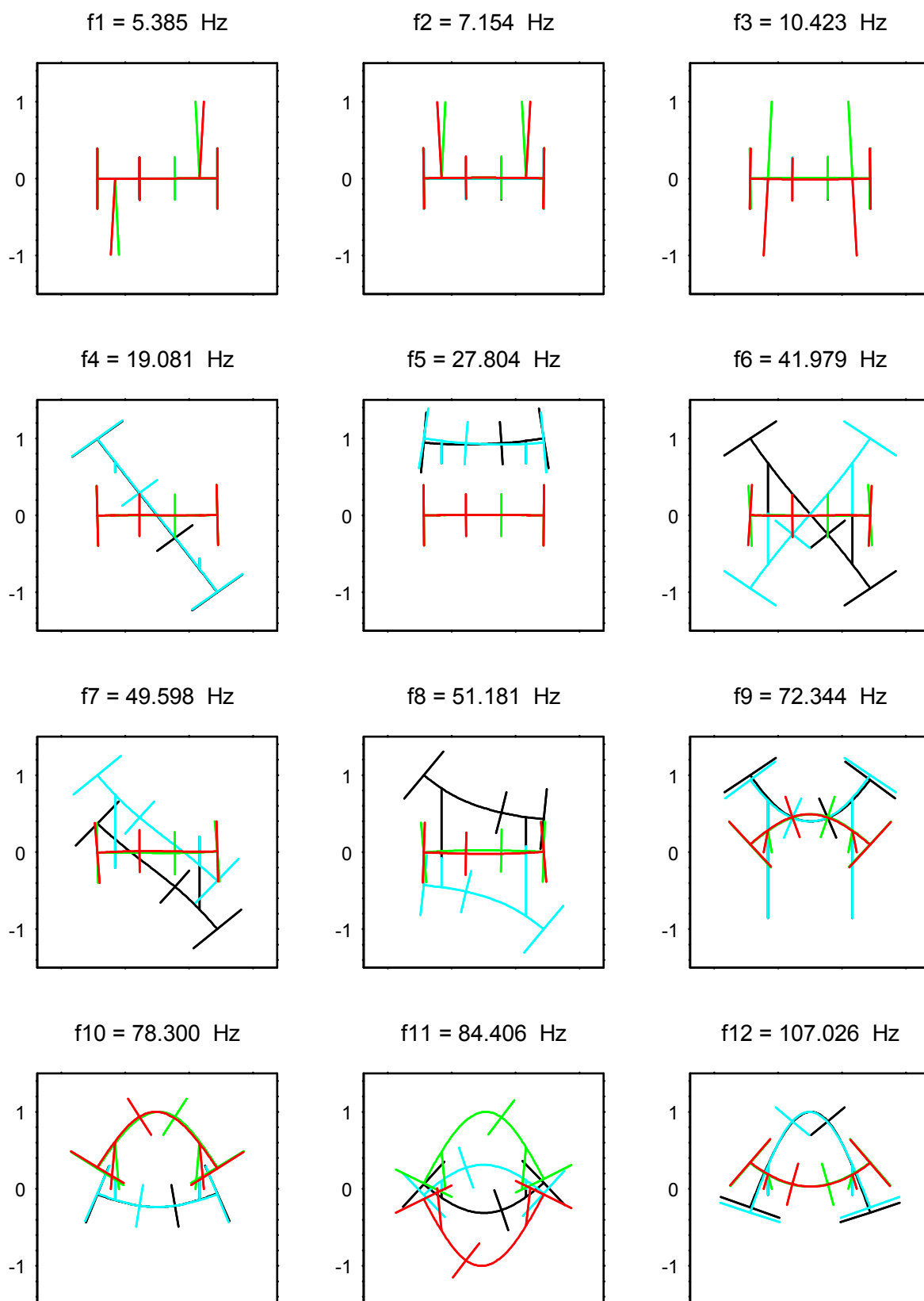


Rys. 6.15 Pierwsze 3 funkcje skrętnych drżań własnych i odpowiadające im częstości dyskretno-ciągłego modelu zestawu kołowego wózka 25ANa

Zademonstrowane powyżej przykłady analizy drżań własnych dotyczyły standardowego rozwiązania konstrukcyjnego układu jezdnego pojazdu szynowego, którego model mechaniczny wózka pokazano na rys. 6.1. W dalszej części zostaną przedstawione wyniki analizy drżań własnych oddziaływującego z torem „bardzo twardym” wózka lekkiej konstrukcji, dyskretno-ciągły model którego ilustruje rys. 6.2. W sposób analogiczny jak na rys. 6.14 a,b na rysunkach 6.16 a,b

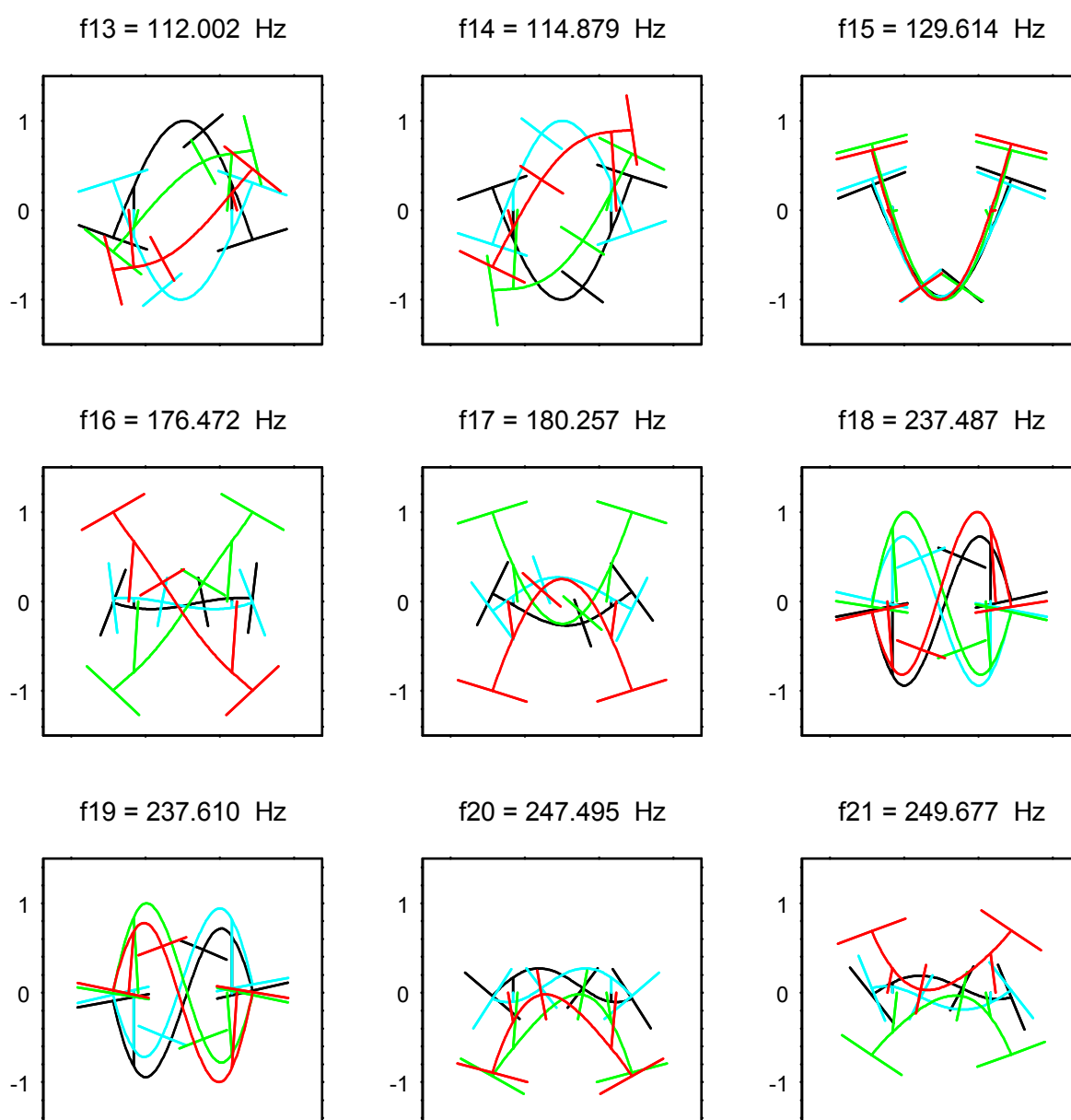
pokazano kolejne funkcje własne i odpowiadające im częstości giętnych drgań własnych dla parametrów modelu opisanego w pracy [197] eksperymentalnego wózka lekkiej konstrukcji firmy Bombardier-Talbot typu ICE-21 przeznaczonego do jazdy z prędkością maksymalną do 400 km/h. Jedynie kreski obrazujące w sposób symboliczny przemieszczenia modalne odpowiednich „narożników” bryły sztywnej reprezentującej bezwładność ramy wózka łączą się z funkcjami własnymi zestawów kołowych nie na ich końcach, lecz na odcinkach między kołami jezdnyymi a tarczami hamulcowymi, co odzwierciedla wspomniane w punkcie 6.1 i schematycznie pokazane na rys. 6.2 tzw. wewnętrzne ułożyskowanie osi zestawów kołowych wózka lekkiej konstrukcji. Ze względu na wspomniane powyżej mniejsze masy poszczególnych komponentów tego typu wózka oraz na jego bardziej sztywną i zwartą strukturę, w badanym zakresie częstotliwości 0÷250 Hz otrzymano jedynie 21 postaci własnych drgań giętnych obu zestawów kołowych sprzężonych z pionowymi drganiami modelu toru. Z wyjątkiem trzynastej i czternastej oraz dwóch najwyższych postaci drgań, tj. 20-tej i 21-szej, otrzymane wyniki praktycznie nie różnią się jakościowo od analogicznych wyników analizy giętnych drgań własnych zestawów kołowych wózka standardowego przedstawionych na rys. 6.14 a,b. Poszczególnym postaciom drgań otrzymanym w przypadku wózka standardowego można przyporządkować postaci uzyskane dla wózka lekkiej konstrukcji. Jak wynika z rysunków 6.16 a,b oraz 6.14 a,b, pierwszej postaci wózka lekkiej konstrukcji o częstości  $f_1=5.385$  Hz odpowiada postać czwarta wózka standardowego, postaci drugiej ( $f_2=7.154$  Hz) odpowiada również postać druga, postaci trzeciej ( $f_3=10.423$  Hz) odpowiada postać piąta, postaci czwartej ( $f_4=19.081$  Hz) odpowiada postać pierwsza, postaci piątej ( $f_5=27.804$  Hz) odpowiada postać trzecia, postaci szóstej ( $f_6=41.979$  Hz) odpowiada postać siódma, postaci siódmej ( $f_7=49.598$  Hz) odpowiada postać dziewiąta, postaci ósmej ( $f_8=51.181$  Hz) odpowiada postać szósta, a postaci dziewiątej ( $f_9=72.344$  Hz) odpowiada postać ósma. Z kolei postaciom dziesiątej ( $f_{10}=78.300$  Hz), jedenastej ( $f_{11}=84.406$  Hz) i dwunastej ( $f_{12}=107.026$  Hz) oraz piętnastej ( $f_{15}=129.614$  Hz), szesnastej ( $f_{16}=176.472$  Hz) i siedemnastej ( $f_{17}=180.257$  Hz) modelu wózka lekkiej konstrukcji odpowiadają te same postaci drgań własnych uzyskane w przypadku wózka standardowego, a postaciom osiemnastej ( $f_{18}=237.487$  Hz) i dziewiętnastej ( $f_{19}=51.181$  Hz) przedstawionym na rys. 6.16b można przyporządkować odwrotnie, tj. odpowiednio postać dziewiętnastą i osiemnastą pokazane na rys. 6.14b. Należy przy tym zauważyć, że z wyjątkiem postaci pierwszej i czwartej poszczególne postaci drgań zestawów kołowych wózka lekkiej konstrukcji charakteryzują się większymi wartościami częstości niż odpowiadające jej postaci otrzymane w przypadku wózka standardowego. Wynika to z założonej większej sztywności dynamicznej wózka lekkiej konstrukcji w porównaniu z wózkiem tradycyjnym. Na uwagę zasługują również niesymetryczne względem osi podłużnej toru kształty funkcji własnych zestawów kołowych przedstawione na rys. 6.16 a,b spowodowane niesymetrycznym osadzeniem tarcz hamulcowych na obu osiach wózka typu ICE-21, co zilustrowano na rysunku 6.2.

Na rysunku 6.17 przedstawiono wyniki analizy skrętnych drgań własnych dwóch zestawów kołowych wózka lekkiej konstrukcji typu ICE-21. W przypadku tego wózka obliczenia wykazały, że w zakresie średnich częstości każdy pojedynczy zestaw kołowy o jednej niesymetrycznie osadzonej tarczy hamulcowej ma dwie niesymetryczne postaci drgań. W rzeczywistości przy dwóch identycznych zestawach kołowych lecz odwrotnie zamontowanych w ramie wózka ich kolejne dwie częstości własne mają takie same wartości liczbowe, a odpowiadające tym częstościom funkcje własne jednego zestawu stanowią lustrzane odbicie względem osi podłużnej toru funkcji własnych drugiego zestawu. Podobnie jak w przypadku wózka standardowego przyporządkowane tym częstościom postaci obu zestawów kołowych występują nawzajem odpowiednio „w fazie” oraz „w przeciw-fazie”, dając łączną liczbę czterech skrętnych postaci drgań własnych modelu całego wózka.



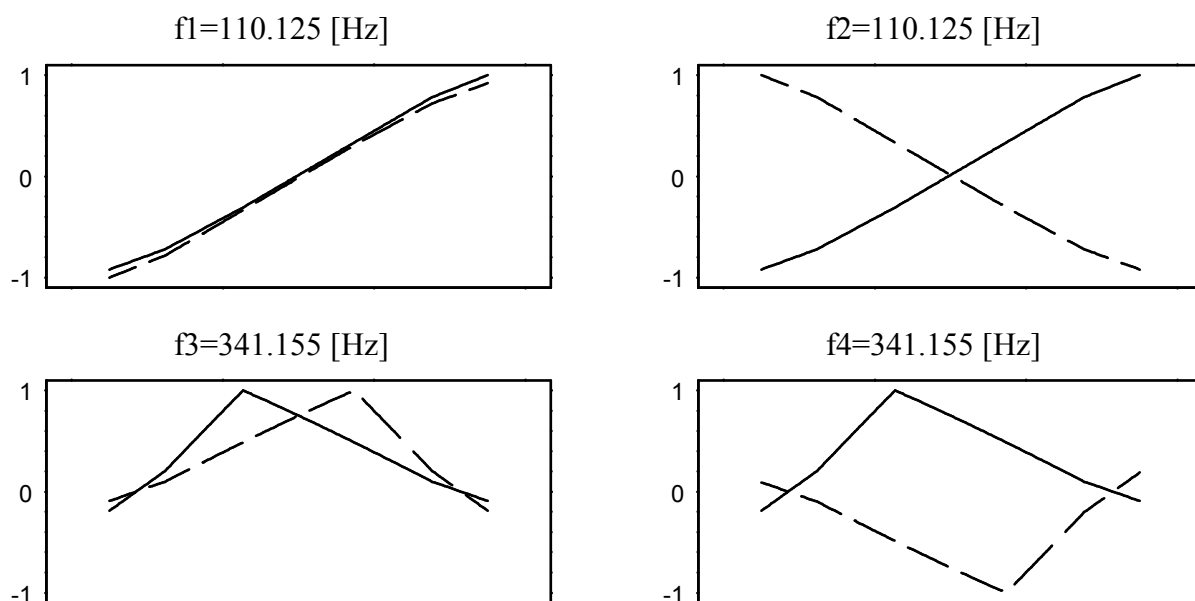
Rys. 6.16a Wyniki analizy giętych drgań własnych dyskretno-ciągłego modelu zestawów kołowych wózka lekkiej konstrukcji ICE-21 - pierwsze 12 funkcji własnych i odpowiadające im częstotliwości





Rys. 6.16b Wyniki analizy giętych drgań własnych dyskretno-ciągłego modelu zestawów kołowych wózka lekkiej konstrukcji ICE-21 - następne 9 funkcji własnych i odpowiadające im częstotliwości

Przeprowadzając analizę drgań własnych nietłumionych dyskretno-ciągłego modelu układu wózek kolejowy - tor pominięto badanie drgań poprzecznych modelu samego wózka oraz drgań poprzecznych modelu toru wyszczególnionych jako „podproblemy” własne odpowiednio 3 i 4 w punkcie 6.2.1. Należy zaznaczyć, że wyznaczanie częstości i wektorów własnych drgań poprzecznych dyskretnych modeli wózka i toru należy przede wszystkim do operacji pomocniczych przy rozwiązywaniu zagadnienia drgań wymuszonych pełnego układu wózek - tor. Natomiast same wyniki analizy poprzecznych drgań własnych modelu toru kolejowego znalazły swoje pełniejsze odzwierciedlenie przy wyznaczaniu jego poprzecznych receptancji dynamicznych, a oddzielne przedstawianie wyników analizy drgań poprzecznych dyskretnego modelu wózka o siedmiu czy dziewięciu stopniach swobody wydaje się być mało interesujące z punktu widzenia ogólnego profilu i celu niniejszej pracy.

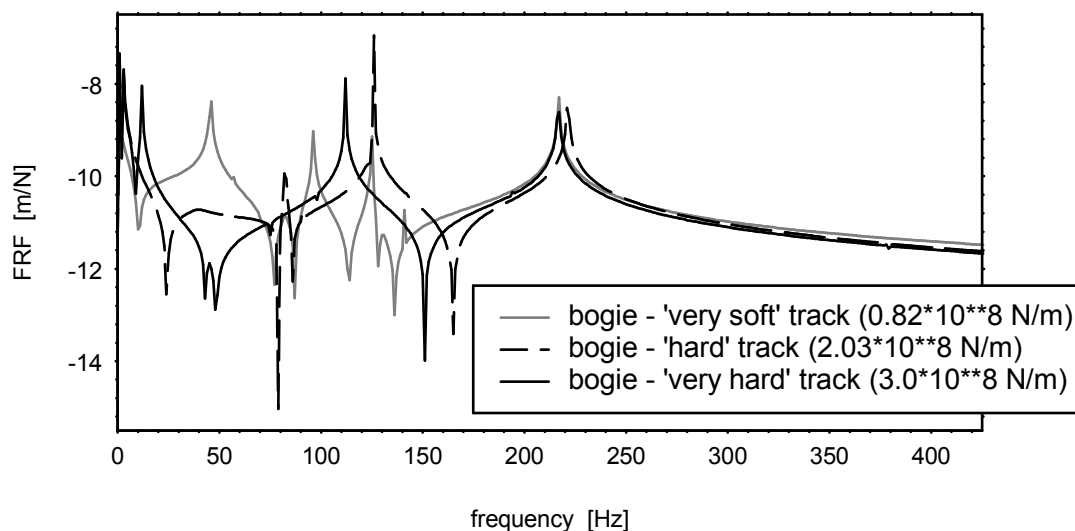


Rys. 6.17 Pierwsze 4 postacie skrętnych drgań własnych i odpowiadające im częstotliwości dyskretno-ciągłego modelu dwóch zestawów kołowych wózka lekkiej konstrukcji typu ICE-21

#### 6.4.2 Wyznaczanie funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF)

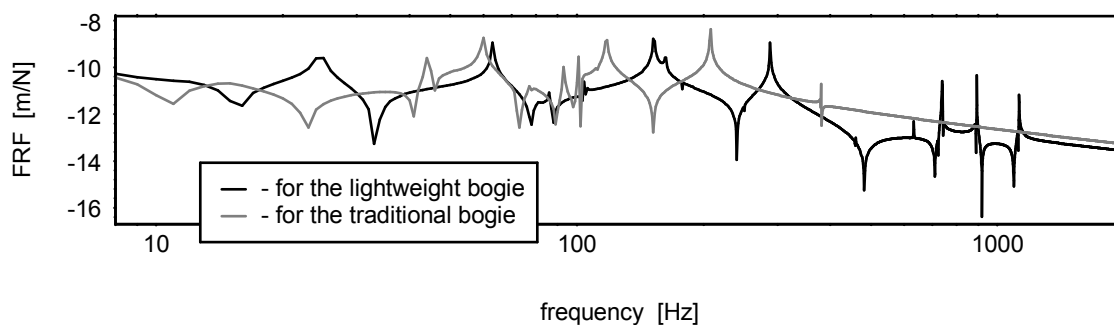
Przeprowadzone w poprzednim punkcie badanie drgań własnych nietłumionych dyskretno-ciągłego modelu układu wózek kolejowy – tor pozwalają na ocenę własności dynamicznych poszczególnych komponentów rozpatrywanego obiektu, czyli zestawów kołowych, całego wózka oraz toru, w ramach rozwiązywania „podproblemów” własnych 1, 2, 3 i 4 zdefiniowanych w punkcie 6.2.1. Natomiast znajomość funkcji odpowiedzi częstotliwościowej (FRF) umożliwia jakościowe badanie własności dynamicznych całego zlinearyzowanego modelu układu wózek – tor z uwzględnieniem tłumienia oraz efektów kontaktu stycznego koła jezdne – szyny i znajdowania w ten sposób zakresów częstości powstawania rezonansów i antyrezonansów wszystkich rozpatrywanych rodzajów drgań traktowanych jako wzajemnie ze sobą sprzężone. Na rysunku 6.18 przedstawiono funkcje odpowiedzi częstotliwościowej wyznaczone według równania (3.30) dla parametrów wózka wagonu pasażerskiego 25ANa oddziaływującego z trzema rodzajami torów: „bardzo miękkim” i „twardym” o pionowych sztywnościach statycznych na szynę  $0.82 \cdot 10^8$  N/m i  $2.03 \cdot 10^8$  N/m, receptancje dynamiczne których pokazano odpowiednio na rys. 6.9 i 6.11, oraz z torem „bardzo twardym” o pionowej sztywności statycznej na szynę  $3.0 \cdot 10^8$  N/m. We wszystkich trzech przypadkach jako wymuszenie zewnętrzne przyjęto przyłożone między kołem jezdnym wózka a szyną w kierunku pionowym obciążenie harmoniczne o jednostkowej amplitudzie działające w zakresie częstości  $0 \div 1300$  Hz. Na podstawie otrzymanych krzywych można stwierdzić, że w przypadku wszystkich trzech rodzajów toru „piki” możliwych rezonansów występują w zakresie częstości  $0 \div 250$  Hz, co oznacza iż przy częstościach większych badany układ wózek kolejowy – tor nie jest wrażliwy na pionowe wymuszenia wywoływane na przykład nierównościami powierzchni toczonej szyny (korugacjami), niekołowością bieżni kół jezdnych (poligonalizacją) lub periodyczną fluktuacją własności toru podczas jazdy. W zakresie średnich częstości, tj. powyżej 30 Hz, strefa możliwych najniebezpieczniejszych rezonansów mieści się w granicach  $90 \div 140$  Hz, szczególnie w przy oddziaływaniu wózka z torami „bardzo twardym” i „twardym”, w przypadku których „piki” funkcji odpowiedzi częstotliwościowej występują przy częstościach odpowiednio 112 i 126 Hz, rys. 6.18. Natomiast w zakresie częstości  $30 \div 70$  Hz przyczyną najsilniejszych drgań może być oddziaływanie zestawów kołowych wymienionego typu wózka z torem „bardzo miękkim”. Jak wynika z rysunku 6.18, funkcje odpowiedzi

częstotliwościowej otrzymane w przypadku rozpatrywanych trzech rodzajów toru kolejowego wykazują możliwość powstawania niebezpiecznych rezonansów również w zakresie niskich częstotliwości 0÷30 Hz wzbudzanych na przykład pionowymi nierównościami toru, a powyżej 160 Hz funkcje te stają się do siebie bardzo podobne.



Rys. 6.18 Funkcje odpowiedzi częstotliwościowej dyskretno-ciągłego modelu wózka typu 25A na oddziaływującego z torem: „bardzo miękki” (—), „twardy” (- - -) i „bardzo twardy” (—).

Na rysunku 6.19 przedstawiono uzyskane w identyczny sposób jak powyżej funkcje odpowiedzi częstotliwościowej dyskretno-ciągłych modeli wózków wagonów pasażerskich pociągów super-ekspresowych ICE, tj. standardowego wózka MD-530 oraz wózka lekkiej konstrukcji typu ICE-21, oddziaływujących ze wspomnianym torem „bardzo twardym”. Z porównania otrzymanych krzywych wynika, że z wyjątkiem trzech „wąskich pików” w zakresie wyższych częstotliwości, tzn. większych niż 900 Hz, funkcja odpowiedzi częstotliwościowej modelu wózka lekkiej konstrukcji charakteryzuje się podobnymi zakresami wrażliwości na powstawanie rezonansów jak w przypadku wózka standardowego, przy czym jej kolejne „piki” występują odpowiednio przy większych wartościach częstości. Wiąże się to z wykazaną w poprzednim punkcie drogą analizy drgań własnych wyższą sztywnością dynamiczną prototypowego wózka typu ICE-21. Z punktu widzenia obserwowanych w rzeczywistości w granicach prędkości jazdy po twardych torach 200÷280 km/h uciążliwych przy eksploatacji wózka tradycyjnego MD-530 efektów szybkiego zużywania się powierzchni toczonej kół jezdnych oraz generacji średnio-częstotliwościowego hałasu typu „grumbling” (niem. „Brummen”) szczególnie istotnym jest zakres częstotliwości 90÷130 Hz, w którym źródłem wymuszeń rezonansowych mogą być przede wszystkim niekołowość (poligonizacja) bieżni tych kół i periodyczna fluktuacja własności toru podczas jazdy wywoływana podparciem szyn na podkładach, [37, 146]. W przypadku wózka MD-530 występujący w tym zakresie „pik” funkcji odpowiedzi częstotliwościowej odpowiada częstotliwości 117.6 Hz, co dla powszechnie stosowanej wartości rozstawu podkładów  $l_s=0.6$  m stwarza możliwość powstawania rezonansów typu parametrycznego wzbudzanych periodyczną zmiennością własności toru przy prędkości jazdy  $v_0=254$  km/h. W przypadku wózka lekkiej konstrukcji omawiany „pik” funkcji odpowiedzi częstotliwościowej występuje przy częstotliwości 153 Hz, co z kolei odpowiada prędkości jazdy  $v_0=330$  km/h, przy której może dochodzić do powstawania analogicznych rezonansów typu parametrycznego. Należy zauważyć, iż potwierdzone przeprowadzonymi obliczeniami przesunięcie stref niebezpiecznych rezonansów w kierunku wyższych częstości mogło być jednym z głównych zamierzeń konstrukcyjnych lekkiego wózka typu ICE-21, [188, 197]. Wówczas rezonanse o tych częstościach są wzbudzane kinematycznie i parametrycznie przy odpowiednio większych prędkościach jazdy, a jak wiadomo towarzyszą im wtedy zwykle intensywniejsza dyssypacja energii i na ogół mniejsze amplitudy drgań.



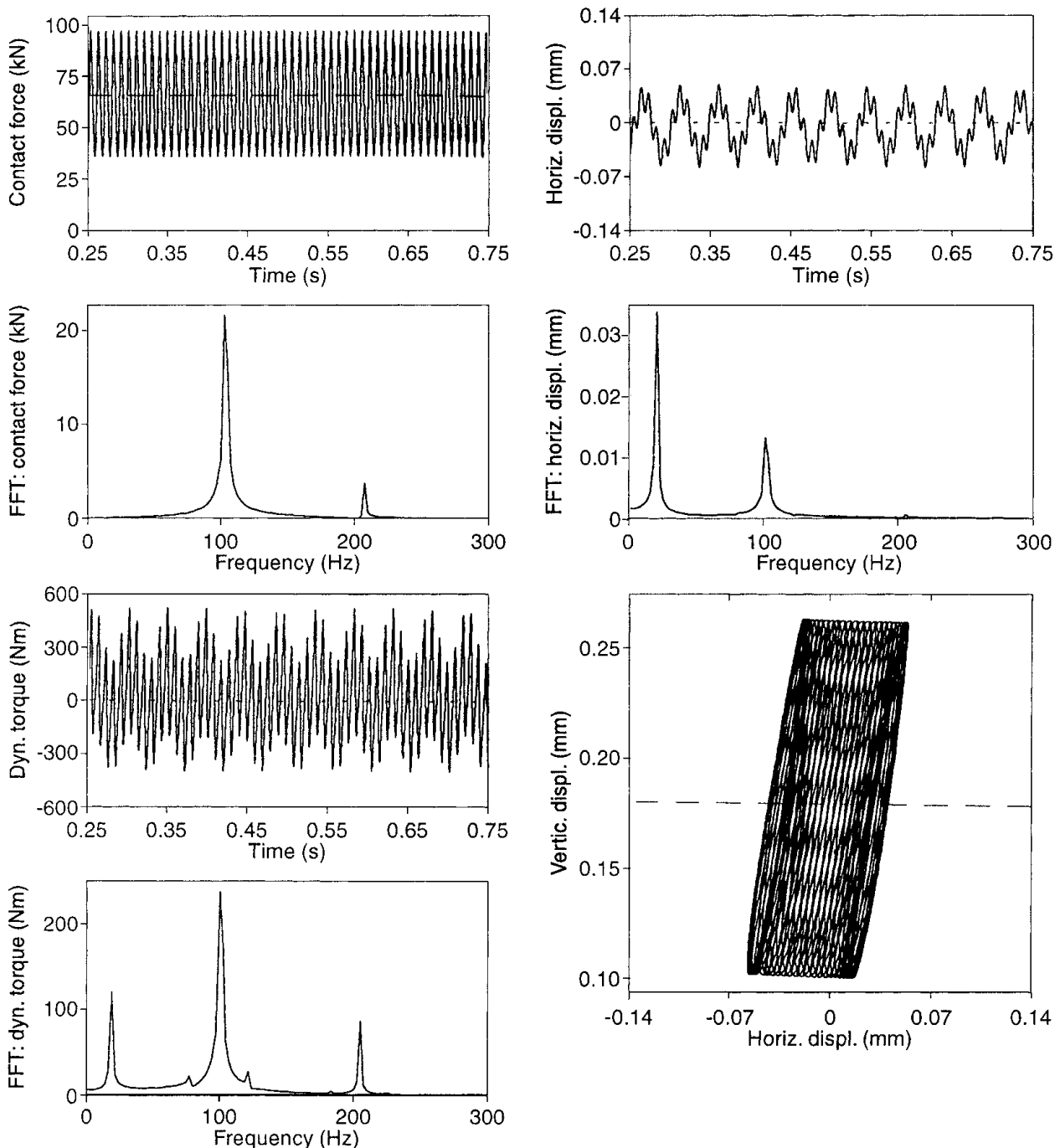
Rys. 6.19 Funkcje odpowiedzi częstotliwościowej oddziaływujących z torem „bardzo twardym” dyskretno-ciągłych modeli: wózka standardowego MD-530 (—) oraz wózka lekkiej konstrukcji typu ICE-21 (---)

### 6.4.3 Analiza drgań wymuszonych

W celu otrzymania odpowiedzi dynamicznej wywołanej oddziaływaniem pełnego dyskretno-ciągłego modelu wózka kolejowego z torem należy rozwiązać układ nieliniowych i parametrycznych równań różniczkowych (6.7) metodą bezpośredniego całkowania w zadanym przedziale czasu. W omawianym przypadku równania (6.7) rozwiązywano metodą Newmarka przy quasi-statycznych warunkach początkowych typu (2.10). W trakcie wykonywania symulacji bieżące wartości wielkości niezbędnych do wyznaczania nieliniowych charakterystyk modelu kontaktu koło jezdne-szlina, tj. sił normalnych  $Q_{l2}(t)$  i  $Q_{l,n+3}(t)$ ,  $l=1,2$ , oraz składowych przemieszczeń i poślizgów względnych, określano metodą ekstrapolacji kubicznej. Ponieważ w przyjętym modelu mechanicznym drgania giętno-skrętno-osiove zestawów kołowych wózka są sprzężone z pionowymi i poprzecznymi drganiami toru, zgodnie z zastosowanymi rozwiązaniami metodą Fouriera oraz metodą transformacji współrzędnych uogólnionych do współrzędnych głównych w postaci nieskończonych i skończonych szeregów rozwinięć względem ortogonalnych funkcji i wektorów własnych, całkowita liczba  $N$  równań (6.7), które praktycznie należy rozwiązać z należytą do celów technicznych dokładnością, jest sumą wszystkich postaci własnych drgań giętnych, skrętnych i poprzecznych modelu wózka oraz wszystkich postaci własnych drgań pionowych i poprzecznych modelu toru zawartych w rozpatrywanym zakresie częstości dynamicznego oddziaływania.

Analizę drgań wymuszonych wskutek dynamicznego oddziaływania układów jezdnych wagonów kolejowych z torami przeprowadzono w pracach [179, 181] rozpatrując pojedynczy zestaw kołowy oraz w pracach [184, 186-188, 190] uwzględniając cały wózek. W [179, 181] badano przyczyny wspomnianego w poprzednim podpunkcie przedwczesnego zużycia się bieżni kół jezdnych i generacji uciążliwego średniczestotliwościowego hałasu typu „grumbling” występujących w przypadku wózków MD-530 niemieckich super-ekspresów ICE poruszających się po torach o stosunkowo dużej sztywności pionowej. Szukając pierwotnego źródła tych niekorzystnych zjawisk jako wymuszenia zewnętrzne przyjęto resztkowe niewyważenia statyczne i dynamiczne kół jezdnych i tarcz hamulcowych zestawów kołowych BA-14 oraz wymuszenia typu parametrycznego wywoływane periodyczną fluktuacją własności toru „bardzo twardego” i „średniego” podczas jazdy. Natomiast pominięto wszelkie kinematyczne wymuszenia zewnętrzne spowodowane nierównościami powierzchni tocznych szyn i niekołowością bieżni kół jezdnych traktując ten rodzaj wymuszeń jako wtórne źródło wzbudzenia drgań powstałe na skutek zużycia eksploatacyjnego.

W przypadku badania oddziaływania z torem jednego zestawu kołowego w zakresie częstości 0÷800 Hz układ równań (6.7) rozwiązywano numerycznie dla  $N=32$  uwzględnionych postaci drgań własnych, w tym 20 giętnych, 5 skrętnych i 4 osiowych zestawu kołowego oraz 3 postaci drgań poprzecznych modelu toru. Symulację dynamicznego oddziaływania wymienionego zestawu kołowego z torami prostymi i krzywoliniowymi przeprowadzano przy prędkościach jazdy



Rys. 6.20 Odpowiedź dynamiczna dyskretno-ciągłego modelu układu zestaw kołowy-tor w formie periodycznego rezonansu parametrycznego

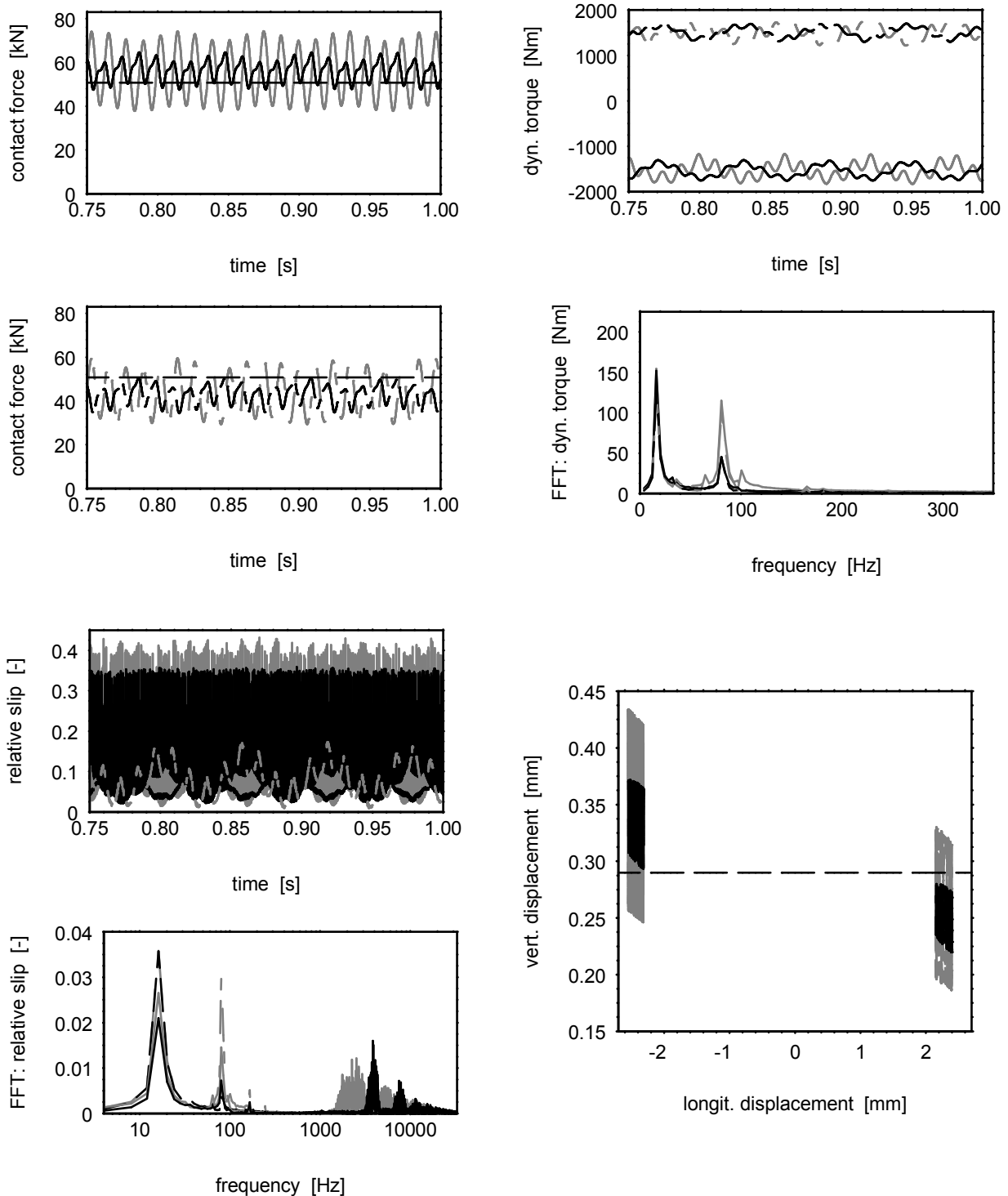
odpowiadających częstości wymuszeń stwarzających możliwość powstawania rezonansów parametrycznych wzbudzanych okresową zmiennością własności toru kolejowego. Na rysunku 6.20 przedstawiono przykładowe wyniki takiej symulacji zaczerpnięte z pracy [179] w formie przebiegów dynamicznej pionowej siły kontaktu koło jezdne - szyna, dynamicznego momentu skręcającego przenieszonego przez oś zestawu na odcinku między kołem jezdny a „sąsiadującą” tarczą hamulcową, przemieszczenia w kierunku wzdłużnym środka geometrycznego koła jezdne oraz w formie orbity przemieszczenia pionowego i podłużnego środka geometrycznego tego koła. Wszystkie wymienione wielkości wyznaczone w dziedzinie czasu i częstości. Z uwagi na symetrię struktury rozpatrywanego zestawu kołowego BA-14 oraz przyjęty symetryczny rozkład wymuszeń względem osi podłużnej toru, analogiczne wyniki dotyczące drugiego koła zestawu są niemal

identyczne, a pewne pomijalne różnice stanowią rezultat nieuniknionych niedokładności numerycznego całkowania układu równań (6.7). Pokazane na rys. 6.20 wyniki zostały uzyskane przy założonej prędkości jazdy  $v_0=62 \text{ m/s} \approx 224 \text{ km/h}$ , która odpowiada zawartej we wzorze (6.1) tzw. częstotliwości wymuszenia parametrycznego toru  $v_0/l_s=103.6 \text{ Hz}$ . Zachodzi wówczas zjawisko periodycznego rezonansu parametrycznego pierwszego rzędu wg definicji z pracy [92], kiedy to częstotliwość okresowej zmienności parametrów modelu toru jest bliska jednej z częstości drgań własnych badanego układu znajdującej swój wyraz w formie odpowiedniego „piku” funkcji odpowiedzi częstotliwościowej pokazanej na rys. 6.20 w przypadku wózka MD-530 z zestawami kołowymi BA-14. W wyniku tego rezonansu następuje silna oscylacja pionowej siły kontaktowej koło-szyna z amplitudą osiagającą 48% średniej wartości grawitacyjnej i z podstawową częstością  $v_0/l_s$ . W wyniku sprzężenia drgań giętnych z drganiami skrętnymi zestawu kołowego następuje również stosunkowo znaczna fluktuacja dynamicznego momentu skręcającego w osi o amplitudzie przekraczającej 500 Nm i o podstawowej częstości  $v_0/l_s$  oraz o składowej dodatkowej o częstości  $\sim 21.5 \text{ Hz}$  odpowiadającej synchronicznej częstości wirowania zestawu kołowego  $v_0/(2\pi r_0)$  wzbudzanej resztkowymi niewy wagami, gdzie  $r_0=0.46 \text{ m}$  jest nominalnym promieniem tocznym koła jezdnego. Jak wynika z szybkiej transformacji Fouriera (FFT) przebiegu przemieszczenia podłużnego środka geometrycznego koła, resztkowe niewy wagi kół jezdnych i tarcz hamulcowych mają dominujący wpływ na drgania zestawu w płaszczyźnie poziomej, przy czym wartości ekstremalne zamieszczonej na rys. 6.20 orbity przemieszczeń wskazują na wyraźną przewagę drgań zestawu kołowego w płaszczyźnie pionowej wzbudzanych badanym oddziaływaniem parametrycznym toru.

Przedstawione na rys. 6.20 wyniki otrzymano dla parametrów i warunków eksploatacji badanego układu zestaw kołowy - tor, przy których wspomniane powyżej nasilenie oddziaływania dynamicznego wózka MD-530 jadącego po torze „bardzo twardym” jest obserwowane w praktyce. Na podstawie tych wyników można wnioskować, że nawet przy założonej idealnej geometrii toru kolejowego i bieżni kół jezdnych samo periodyczne podparcie szyn na podkładach staje się źródłem wzbudzenia drgań układu na tyle silnych, by powstające w efekcie duże przeciążenia dynamiczne na styku kół i szyn mogły prowadzić do trwałych uszkodzeń ich powierzchni tocznych stających się z kolei dodatkową przyczyną wymuszeń typu kinematycznego - jeszcze bardziej niebezpieczną dla trwałości eksploatacyjnej tych elementów.

Analogiczne badania dotyczące wpływu samych własności dynamicznych i statycznych toru kolejowego na charakter oddziaływania układu jezdnego z torem przeprowadzono w pracy [186] przy wykorzystaniu dyskretno-ciągłego modelu całego wózka przyjmując identycznie wymuszenia jak w przykładzie przedstawionym powyżej. Symulacje drgań wymuszonych wykonywano w zakresie częstości  $0 \div 1300 \text{ Hz}$ . Wówczas układ równań (6.7) rozwiązywano przy liczbie  $N=76$  uwzględnionych funkcji własnych, tj. 55 giętnych, 8 skrętnych, w tym 2 tzw. postaci sztywnych, oraz 6 funkcji własnych drgań poprzecznych modelu wózka i 7 funkcji własnych drgań poprzecznych modelu toru. Dodatkowymi badanymi wielkościami oprócz wymienionych powyżej i zilustrowanych na rys. 6.20 są zdefiniowane w [145, 200] względne poślizgi styczne między kołami jezdnymi a szynami odniesione do wartości poślizgu pełnego, kiedy następuje utrata przyczepności. Obliczenia wykonano dla parametrów wózka wagonu pasażerskiego typu 25ANa oddziaływującego z prostym i krzywoliniowym torem „twardym” i „bardzo miękkim”. W przypadku „twardego” toru prostego otrzymano wyniki jakościowo podobne do tych zilustrowanych na rys. 6.20 w przypadku zestawu kołowego BA-14. Jednak badane w całym zakresie prędkości eksploatacyjnych wózka 25ANa nasilenie oddziaływania z torem „twardym”, którego miarę stanowią wartości amplitud pionowych sił kontaktu koło-szyna, dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez osie zestawów kołowych oraz amplitudy pionowych i podłużnych przemieszczeń środków geometrycznych kół jezdnych, jest znacznie słabsze niż w przykładzie poprzednim. Natomiast w przypadku oddziaływania wymienionego typu wózka z prostym torem „bardzo miękkim” fluktuacja własności dynamicznych toru podczas jazdy oraz założone realne wartości resztkowych niewy wag

kół jezdnych i tarcz hamulcowych w całym zakresie prędkości eksploatacyjnych nie wywołują znaczących drgań badanego układu.



Rys. 6.21 Odpowiedź dynamiczna modelu układu wózek kolejowy 25A Na - tor „twardy” podczas jazdy na łuku o promieniu krzywizny 1800 m z prędkością  $v_0=177$  km/h.

Na rysunku 6.21 przedstawiono przykładowe wyniki symulacji dynamicznego oddziaływania omawianego typu wózka z krzywoliniowym torem „twardym”, tj. z łukiem o promieniu  $R_0=1800$  m i przechyłce równej 0.08 m. Te wyniki otrzymano przy prędkości jazdy  $v_0=49.2$  m/s  $\approx 177$  km/h powodującej częstotliwość wymuszenia parametrycznego toru  $v_0/l_s=82$  Hz, której to na rysunku 6.18 odpowiada „mniejszy pik” funkcji odpowiedzi częstotliwościowej. Na

rys. 6.21 ciągłymi liniami czarnymi zaznaczono odpowiedzi przyporządkowanej zewnętrznej na łuku kołu pierwszego zestawu kołowego wózka, ciągłymi liniami szarymi zaznaczono odpowiedzi przyporządkowanej zewnętrznej kołu drugiego zestawu kołowego, a czarnymi i szarymi liniami przerywanymi zaznaczono odpowiedzi przyporządkowane wewnętrznym na łuku kołom odpowiednio pierwszego i drugiego zestawu kołowego.

Działanie sił odśrodkowych podczas jazdy na łuku powoduje dociążenie zewnętrznych kół wózka i odciążenie kół wewnętrznych, co wpływa na uzyskane większe wartości średnie pionowych dynamicznych sił kontaktu koło-szyna przyporządkowanym kołom zewnętrznym oraz na odpowiednio mniejsze wartości średnie pionowych dynamicznych sił kontaktu przyporządkowane kołom wewnętrznym, porównaniu z nominalnymi statycznymi wartościami grawitacyjnymi jakie można byłoby uzyskać w przypadku toru prostego bez przechyłki. Jak można zauważyć na rysunku 6.21, dociskane zewnętrzne koła wózka doznają nieco silniejszego wymuszenia parametrycznego wywołwanego okresową zmiennością własności toru w porównaniu z odciążonymi kołami wewnętrznymi, o czym świadczą otrzymane w przypadku kół zewnętrznych nieznacznie większe niż w przypadku kół wewnętrznych amplitudy sił kontaktowych oddziaływania z szynami z podstawową częstotliwością wymuszenia parametrycznego toru  $v_o/l_s=82$  Hz. Ponadto, amplitudy fluktuacji sił kontaktowych są wyraźnie większe w przypadku kół drugiego zestawu w porównaniu z amplitudami tych sił w przypadku kół zestawu pierwszego, co oznacza, że podczas jazdy po łuku z wymienioną prędkością  $v_o=49.2$  m/s  $\approx 177$  km/h pierwszy zestaw kołowy rozpatrywanego typu wózka jest dynamicznie odciążony, a zestaw drugi jest dynamicznie dociążony. Występujący powszechnie w kolejowych zestawach kołowych brak mechanizmów różnicowych powoduje powstawanie podczas jazdy na łukach znaczących składowych podłużnych poślizgów stycznych kół po szynach i odpowiadających im stycznym siłom kontaktowym. Siły te wywołują stosunkowo duże wartości statycznych momentów skręcających przenoszonych przez osie zestawów oraz przemieszczeń podłużnych środków geometrycznych kół jezdnych. Podczas jazdy na łuku te wartości są dodatnie w przypadku przyspieszanych kół wewnętrznych i ujemne w przypadku hamowanych kół zewnętrznych, a niemal identyczna w przypadku obu zestawów kołowych wózka wartość bezwzględna składowej stałej momentu skręcającego przeniesionego przez osie w sąsiedztwie wewnętrznych oraz zewnętrznych kół wynosi  $\sim 1500$  Nm i jest znacznie większa niż wartości bezwzględne amplitud fluktuacji tych momentów o dwóch podstawowych składowych częstotliwościach, tj. synchronicznej  $v_o/(2\pi r_o)=17.02$  Hz wzbudzonej resztkowymi niewyważeniami dla  $r_o=0.46$  m oraz częstotliwości wymuszenia parametrycznego toru  $v_o/l_s=82$  Hz. Wspomniane powyżej wykazane obliczeniami statyczne dociążenie zewnętrznych kół jezdnych wózka i odciążenie kół wewnętrznych oraz działanie podłużnych stycznych sił kontaktowych koło-szyna – hamująco na koła zewnętrzne i przyspieszająco na koła wewnętrzne powodują, że podczas jazdy na łuku punkty centralne orbit przemieszczeń środków geometrycznych kół jezdnych doznają odpowiednich stałych przesunięć zarówno w kierunku pionowym oraz wzdłużnym, rys. 6.21. Podobnie jak w przypadku pionowych dynamicznych sił kontaktowych koło-szyna dociążenie dynamiczne kół drugiego zestawu i odciążenie dynamiczne kół zestawu pierwszego wózka są przyczyną również znacznie większych amplitud składowych pionowych przemieszczeń środków geometrycznych kół drugiego zestawu w porównaniu z analogicznymi amplitudami przemieszczeń środków kół zestawu pierwszego.

Wymagającymi szczególnego komentarza w przypadku omawiania wyników symulacji dynamicznego oddziaływania pojazdu szynowego z torem krzywoliniowym są wypadkowe styczne poślizgi względne kół jezdnych po szynach odniesione do wartości poślizgu pełnego w myśl wspomnianej powyżej definicji podanej w [145, 200]. Jak wykazano w pracy [186], w przypadku rozpatrywanego układu wózek kolejowy 25ANa - tor „twardy”, przy założonych jak powyżej wymuszeniach, podczas jazdy na torze prostym w całym zakresie prędkości eksploatacyjnych chwilowe wartości poślizgów względnych nie przekraczają 13% wartości poślizgów pełnych równych w tym wypadku jedności. Podczas jazdy na łuku podobny jak na torze prostym charakter

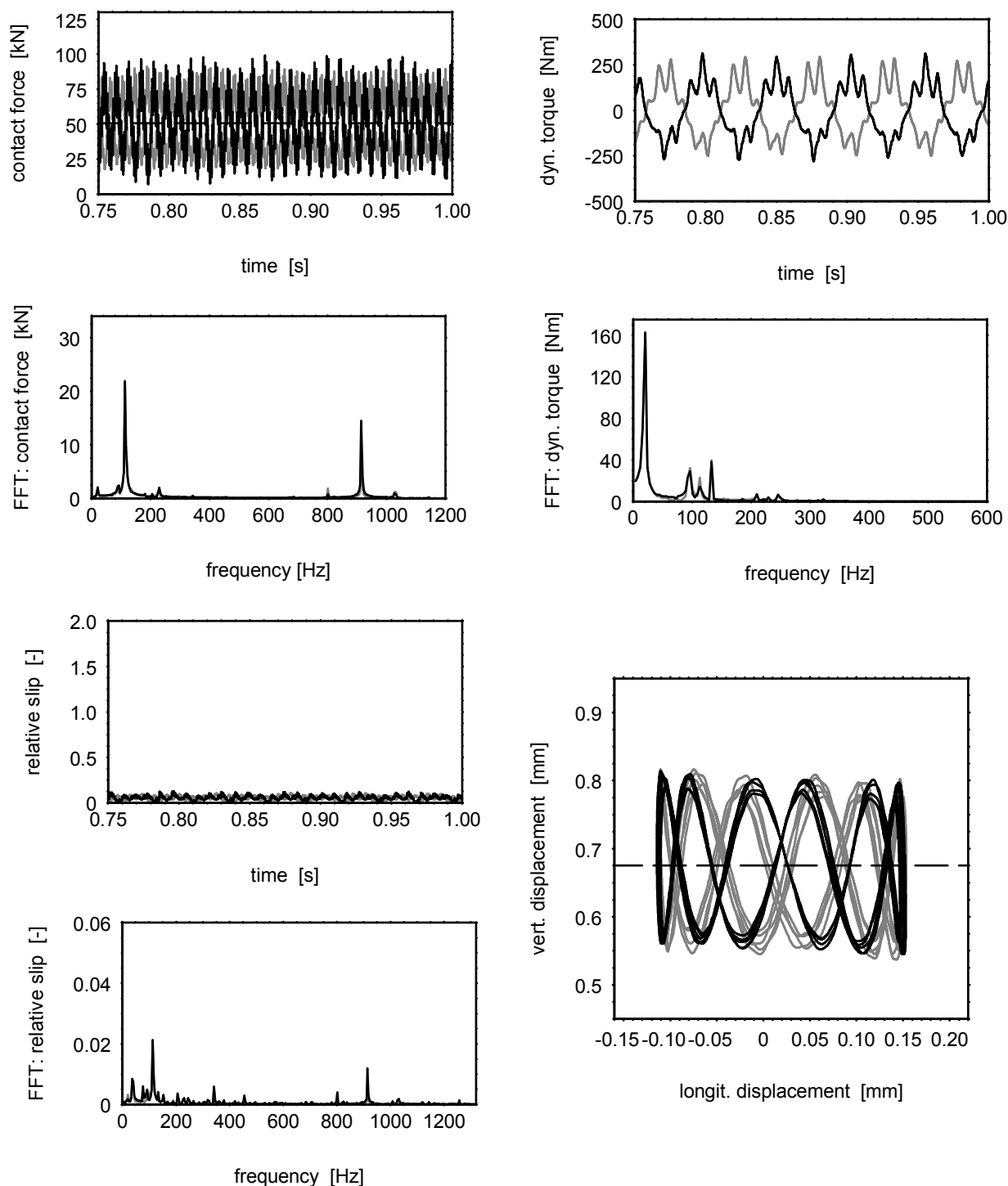


mają przebiegi stycznych poślizgów względnych po szynie wewnętrznych kół jezdnych wózka. Przebiegi te mają kształt gładkich krzywych o amplitudach nie przekraczających 18% wartości poślizgu pełnego i zmieniających się z wymienionymi powyżej dwoma podstawowymi częstotliwościami: synchroniczną  $v_0/(2\pi r_0)=17.02$  Hz wzbudzaną reszkowymi niewywagami kół jezdnych i tarcz hamulcowych oraz częstotliwością wymuszenia parametrycznego toru  $v_0/l_s=82$  Hz, jak zaznaczono liniami przerywanymi na rys. 6.21. Natomiast przebiegi wypadkowych poślizgów stycznych po szynie zewnętrznych na łuku kół wózka mają kształt regularnych „palisad pików”, których wartości ekstremalne osiągają 35 i 45% poślizgu pełnego odpowiednio w przypadku pierwszego i drugiego zestawu kołowego. Szybka transformacja Fouriera (FFT) przebiegów tych poślizgów wykazała istnienie składowych wysokoczęstotliwościowych rozłożonych nieregularnie w całym badanym paśmie częstotliwości  $0\div 33000$  Hz wynikającym z dokładności rozwiązywania równań (6.7) uwarunkowanej przyjętą podstawową długością kroku całkowania numerycznego. Otrzymane postacie „gęstych palisad pików” przebiegów wypadkowych poślizgów względnych zewnętrznych kół jezdnych wózka są spowodowane charakterem oddziaływania dynamicznego koło-szyna w kierunku poprzecznym prowadzącym do powstawania procesu zbliżonego do tzw. efektów „poślizg-przyleganie” (ang. “stick-slip” effects) typowych dla par ciał sztywnych w kontakcie stycznym. Ze względu na uzyskany nieregularny charakter tego oddziaływania wydaje się celowym przeprowadzenie dalszej analizy jakościowej otrzymanych wyników z punktu widzenia drgań chaotycznych.

W pracy [186] przedstawiono również analogiczne wyniki symulacji dynamicznego oddziaływania modelu układu wózek kolejowy 25A Na - tor „twardy”, przy identycznych jak powyżej wymuszeniach, podczas jazdy na łuku o promieniu krzywizny  $R_0=4000$  m i przechyłce  $0.06$  m z prędkością znacznie wykraczającą poza zakres prędkości eksploatacyjnych wózka 25A Na  $v_0=75.6$  m/s  $\approx 272$  km/h, przy której częstotliwość wymuszenia parametrycznego toru  $v_0/l_s=126$  Hz odpowiada „największemu pikowi” funkcji odpowiedzi częstotliwościowej pokazanej na rys. 6.18. Otrzymane wyniki są jakościowo zbliżone do tych z przypadku poprzedniego przedstawionych na rysunku 6.21. Przy częstotliwości wymuszenia parametrycznego toru odpowiadającej większej wrażliwości rozpatrywanego układu na wymuszenia pionowe przyłożone między kołami jezdnyymi a szynami otrzymano nieco większe amplitudy pionowych sił kontaktu koło-szyna, przy czym największe wartości tych amplitud charakteryzują tu koła pierwszego zestawu kołowego wózka, świadcząc o jego dociążeniu dynamicznym i odciążeniu zestawu drugiego, w przeciwieństwie do przypadku omawianego powyżej. Przy wymaganym zwykle w praktyce większym promieniu krzywizny łuku  $R_0=4000$  m przyjętym przy tak dużej prędkości  $v_0\approx 272$  km/h otrzymano mniejsze wartości ekstremalne wypadkowych poślizgów względnych wynoszące  $\sim 15$  i  $25\%$  poślizgu pełnego, przyporządkowane odpowiednio wewnętrznym i zewnętrznym kołom jezdnyemu wózka. W konsekwencji uzyskano o połowę mniejsze wartości średnie momentów skręcających przenoszonych przez osie zestawów kołowych w porównaniu z przypadkiem poprzednim.

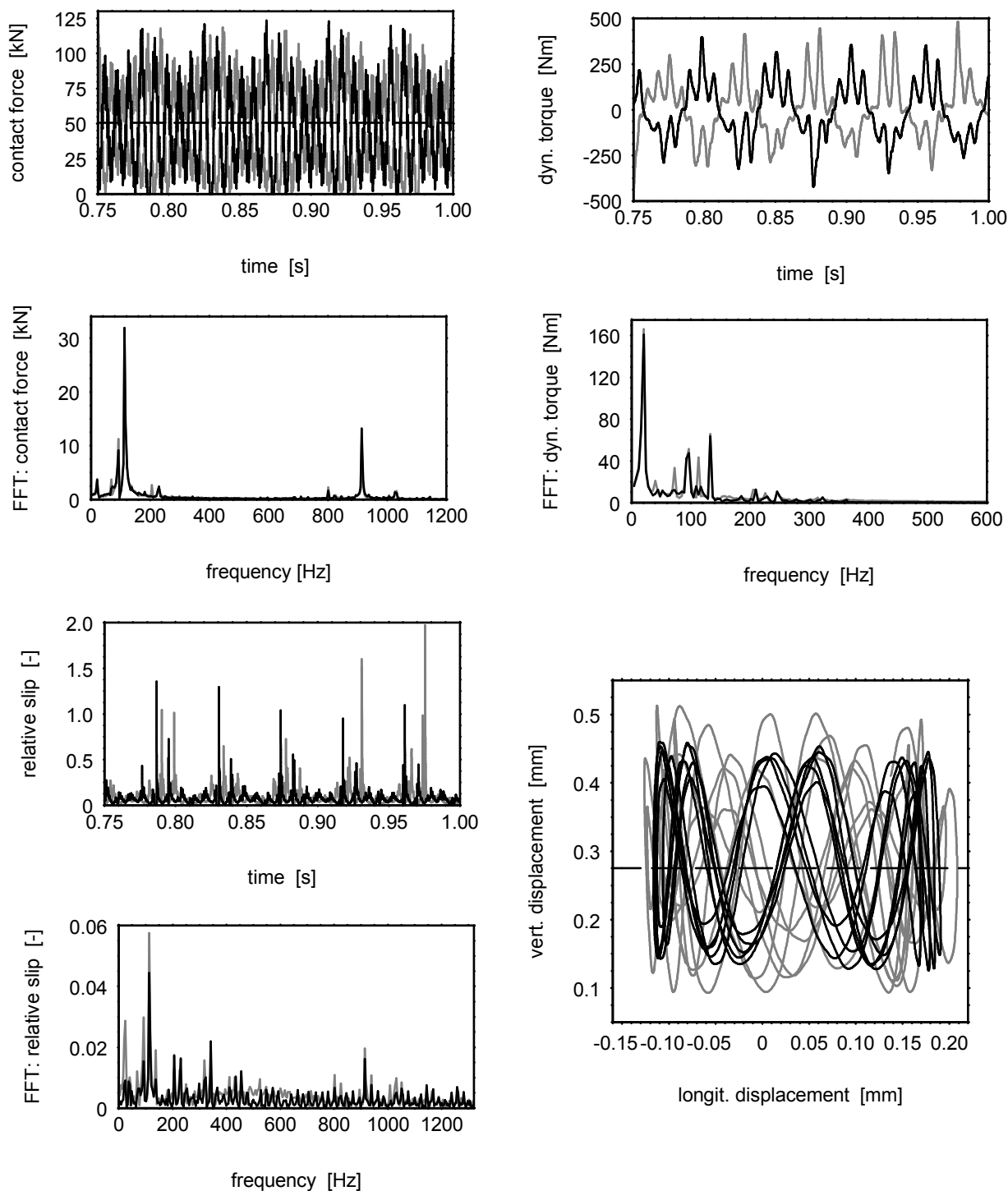
W pracy [187] porównywano wyniki symulacji dynamicznego oddziaływania dyskretno-ciągłego modelu wózka 25A Na z prostymi torami „twardym” i „bardzo miękkim” o pionowych sztywnościach na szynę odpowiednio  $2.03\cdot 10^8$  i  $0.82\cdot 10^8$  N/m, których receptancje przedstawiono na rys. 6.9 i 6.11. Przeprowadzone badania mają tu bardziej realistyczny charakter, gdzie obok wymuszeń spowodowanych okresową zmiennością własności toru podczas jazdy i reszkowymi niewywagami kół jezdnych i tarcz hamulcowych przyjęto również wymuszenia kinematyczne wywoływane poligonalizacją typu heksagonalnego bieżni kół o amplitudzie  $50$   $\mu$ m i długości fali równej  $1/6$  nominalnego obwodu koła oraz identycznymi w przypadku obu rodzajów toru korugacjami powierzchni tocznych szyn o amplitudzie  $100$   $\mu$ m i długości fali  $0.06$  m. Na rysunkach 6.22 i 6.23 przedstawiono przyporządkowane odpowiednio torowi „bardzo miękkim” i „twardemu” wyniki symulacji tych samych wielkości jak w przypadku poprzednim, czyli oddziaływania wózka 25A Na z torem „twardym” krzywoliniowym. Ciągłymi liniami czarnymi zaznaczono odpowiedzi przyporządkowane prawemu kołu pierwszego zestawu wózka, liniami

szarymi odpowiedzi przyporządkowane prawemu kołu drugiego zestawu wózka, a przerywane linie czarne oznaczają odpowiednie wartości statyczne. Analogicznie jak w omawianym powyżej przykładzie pojedynczego zestawu kołowego oddziaływującego z torem prostym, z uwagi na symetrię struktury rozpatrywanego typu wózka oraz przyjęty symetryczny rozkład wymuszeń względem osi podłużnej toru wyniki przyporządkowane lewym kołom są niemal identyczne, przez co nie zostały pokazane w formie wykresów. Aby przeprowadzone porównanie uczynić bardziej obiektywnym, odpowiedzi dynamiczne w przypadku toru „bardzo miękkiego” i „twardego” uzyskano przy jednakowej prędkości jazdy  $v_0=55$  m/s równej w przybliżeniu maksymalnej dopuszczalnej prędkości eksploatacyjnej rozpatrywanego typu wózka, tj. 200 km/h.



Rys. 6.22 Odpowiedź dynamiczna dyskretno-ciągłego modelu wózka 25A na oddziaływującego z torem „bardzo miękkim”.

Z porównania odpowiadających sobie wykresów zamieszczonych na rysunkach 6.22 i 6.23 wynika, że własności statyczne i dynamiczne toru istotnie wpływają na wartości ekstremalne pionowych sił kontaktowych koło-szyna. W obydwu badanych przypadkach toru wymuszenia kinematyczne wywołane stosunkowo mocno spoligonalizowanymi bieżniami kół jezdnych oraz skorugowanymi powierzchniami tocznymi szyn wzbudzają bardzo silne oscylacje sił kontaktowych wokół stałej grawitacyjnej wartości średniej. Wartości bezwzględne amplitud tych oscylacji w przypadku toru „bardzo miękkiego” prawie osiągają średnią statyczną siły kontaktowej, rys. 6.22, a w przypadku toru „twardego” przekraczają tę średnią o ok. 20% powodując chwilowe odciążenia dynamiczne prowadzące do tzw. „mikro-odrywania” kół jezdnych wózka od szyn, rys. 6.23. Szybka transformacja Fouriera (FFT) wykazuje, iż w obydwu przypadkach toru dominujący wpływ na



Rys. 6.23 Odpowiedź dynamiczna dyskretno-ciągłego modelu wózka 25A na oddziaływującego z torem „twardym”.

przebiegi pionowych sił kontaktu koło-szyna mają składowa o częstotliwości 114 Hz odpowiadającej wymuszeniu pochodzącemu od poligonalizacji bieżni kół oraz składowa o częstotliwości  $\sim 915$  Hz wzbudzana korugacjami powierzchni tocznych szyn. Należy zauważyć, że wpływ wymuszenia parametrycznego wskutek periodycznej fluktuacji własności toru podczas jazdy o podstawowej częstotliwości  $v_0/l_s=91.5$  Hz jest prawie pomijalny w przypadku toru „bardzo miękkiego”, rys. 6.22. Natomiast w przypadku toru „twardego” wpływ tego rodzaju wymuszenia staje się bardziej widoczny. Wówczas odpowiadający jemu „pik” pionowej siły kontaktowej jest porównywalny z „pikiem” pochodzącym od wymuszenia kinematycznego wywoływanego korugacjami powierzchni tocznych szyn, jak pokazano na rysunku 6.23. Własności statyczne i dynamiczne toru istotnie wpływają również na przebiegi wypadkowych poślizgów stycznych między kołami a szynami. W przypadku toru „bardzo miękkiego”, kiedy „mikro-odrywania” kół jezdnych wózka od szyn nie występują, oddziaływanie dynamiczne ogranicza się jedynie do tzw. „mikro-poślizgów”, wartości maksymalne których nieznacznie przekraczają 10% poślizgu pełnego, rys. 6.22. Natomiast krótkotrwałym odciążeniami kół od szyn podczas jazdy na torze „twardym” i związanym z tym ich „mikro-odrywaniami” towarzyszą chwilowe poślizgi styczne przekraczające prawie dwukrotnie wartości poślizgu pełnego, rys. 6.23. Wyznaczone widma amplitudowe przebiegów stycznych poślizgów względnych obu rozpatrywanych modeli torów charakteryzują się dwoma dominującymi składowymi o wspomnianych powyżej częstotliwościach 114 i 915 Hz przyporządkowanych odpowiednio wymuszeniom kinematycznym pochodzącym od poligonalizacji bieżni kół jezdnych i korugacji powierzchni tocznych szyn. Niemniej jednak przebiegi poślizgów uzyskane w przypadku oddziaływania modelu wózka z torem „twardym” są nieregularne w czasie, a ich bardzo „gęste” widma składowych w całym badanym zakresie 0÷1300 Hz świadczą o możliwości występowania procesów chaotycznych.

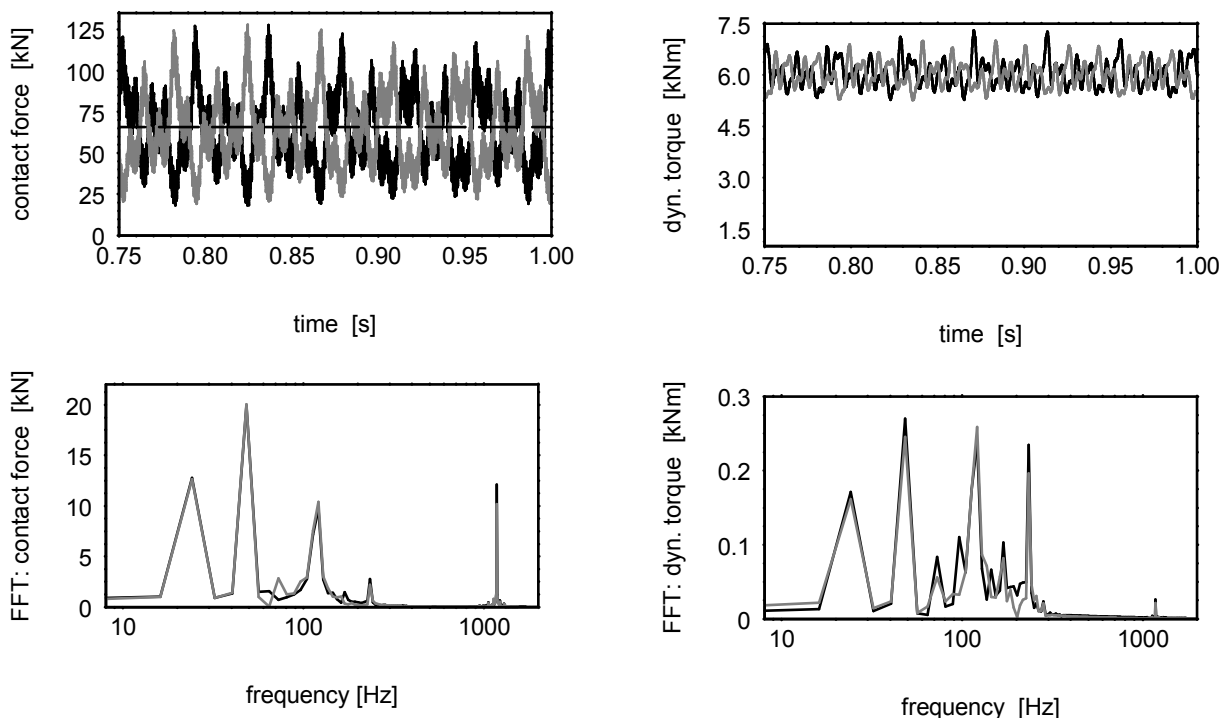
Na torze prostym przebiegi dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez osie zestawów kołowych oscylują wokół zerowych wartości średnich z amplitudami osiagającymi 300 Nm na torze „bardzo miękkim” i 500 Nm na torze „twardym” z podstawową składową o częstotliwości synchronicznej równej  $\sim 19$  Hz odpowiadającej wymuszeniom resztkowymi niewyważeniami kół jezdnych i tarcz hamulcowych. Wpływ wymuszeń spowodowanych poligonalizacją bieżni kół oraz wywoływanych okresową fluktuacją własności toru o częstotliwościach odpowiednio 114 i 91.5 Hz jest również znaczący. Natomiast w obydwu przypadkach toru składowe drgań skrętnych o częstotliwościach powyżej 350 Hz, w tym także składowe wzbudzone korugacjami powierzchni tocznych szyn, są pomijalne, rys. 6.22, 6.23. Kształty orbit przemieszczeń środków geometrycznych kół jezdnych są w obu rozpatrywanych przypadkach torów zasadniczo podobne, przy czym na torze „twardym” występują większe amplitudy drgań szczególnie w kierunku pionowym, a na torze „bardzo miękkim” przebiegi tych przemieszczeń mają charakter bardziej okresowy oraz cechuje je znacznie większa pionowa składowa stała spowodowana prawie 2.5-krotnie mniejszą sztywnością statyczną toru „bardzo miękkiego” w porównaniu ze sztywnością toru „twardego”, tak jak pokazano to na rys. 6.22 i 6.23.

Przy założonych identycznych jak powyżej wymuszeniach obliczenia porównawcze w przypadku dynamicznego oddziaływania modelu wózka 25A na z obydwoma rozpatrywanymi rodzajami toru przeprowadzono także przy różnych wartościach prędkości jazdy, w szczególności przy  $v_0=46.2$  m/s  $\cong 166.5$  km/h i  $v_0=60.7$  m/s  $\cong 218.5$  km/h. Przy tych prędkościach zostają wzbudzone drgania o dominującej częstotliwości wynoszącej 96 Hz w przypadku toru „bardzo miękkiego” i 126 Hz w przypadku toru „twardego”, którym to częstotliwościom przyporządkowane są znaczące „piki” odpowiednich funkcji odpowiedzi częstotliwościowych pokazanych na rys. 6.18. Źródłem wymuszenia tych drgań jest przyjęta poligonalizacja bieżni kół. Niemniej jednak otrzymane drogą symulacji odpowiedzi dynamiczne nie są już tak silne, ponieważ występujące przy tych prędkościach duże odciążenia dynamiczne i towarzyszące im „mikro-odrywania” kół jezdnych od szyn zmieniają chwilową strukturę układu wózek-tor uniemożliwiając w ten sposób powstawanie zjawiska rezonansów typowych w przypadku układów zlinearyzowanych.

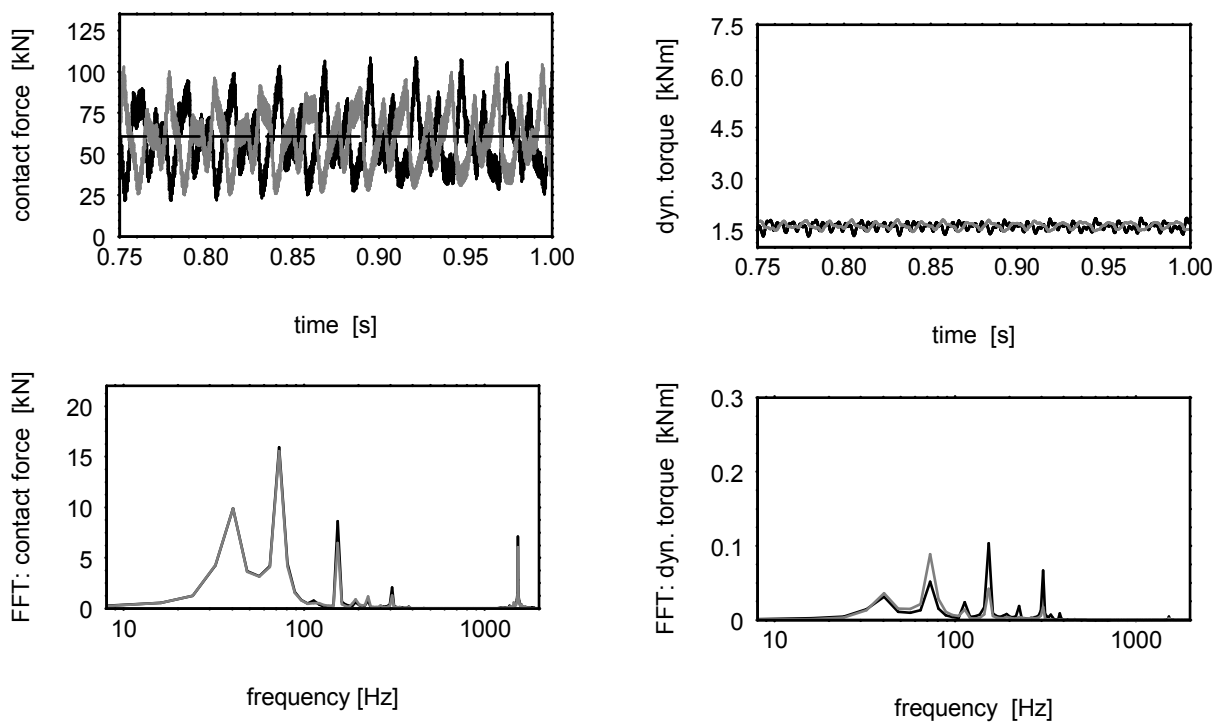
W poprzednim punkcie 6.4.2 przedstawiono na rysunku 6.19 zaczerpnięte z pracy [188] funkcje odpowiedzi częstotliwościowej uzyskane przy wykorzystaniu pokazanych odpowiednio na rys. 6.1 i 6.2 oddziaływujących z prostym torem „bardzo twardym” dyskretno-ciągłych modeli wózków super-ekspresowych pociągów ICE, czyli tradycyjnego wózka MD-530 oraz wózka lekkiej konstrukcji Bombardier-Talbot typu ICE-21, w celu porównania ich wrażliwości na powstawanie drgań. W tych pracach dokonano symulacji nieliniowych drgań tych modeli w całych zakresach eksploatacyjnych prędkości jazdy. Przyjęto analogiczne źródła wymuszenia jak w przypadku poprzednim, tj. naturalną fluktuację własności toru, resztkowe niewywagi kół jezdnych i tarcz hamulcowych oraz wymuszenia kinematyczne spowodowane korugacjami powierzchni tocznych szyn, tak jak poprzednio - o amplitudzie 100  $\mu\text{m}$  i długości fali 0.06 m. By przeprowadzane w ten sposób porównanie było możliwie obiektywnym, założono istnienie fabrycznie nowych zestawów kołowych w obu wózkach, przyjmując poligonalizację bieżni ich kół w postaci dopuszczalnego normami wykonawczymi bicia mieszczącego się w granicach 0.1÷0.2 mm i realizowanego przez dominujące najczęściej dwie pierwsze składowe harmoniczne o długościach fali równych odpowiednio pełnemu i połowie nominalnych obwodów tocznych kół. Chcąc dodatkowo porównać wpływ działania różnych konstrukcji układów hamulcowych występujących w rozpatrywanych wózkach, tzn. 4 hamulców tarczowych na osi każdego zestawu kołowego wózka MD-530 oraz 1 hamulca tarczowego na osi i 2 hamulców tarczowych na kołach jezdnych każdego zestawu kołowego wózka ICE-21, jako formę wymuszenia zewnętrznego przyjęto w warunkach brzegowych (6.2g) stałe momenty hamujące  $M_{ii}(t)=\text{const}$ , wartości liczbowe których dobrano tak by powodowały umiarkowane opóźnienie jazdy pociągu wynoszące 0.2 przyspieszenia ziemskiego (0.2·g). Na rysunku 6.24 przedstawiono wyniki symulacji dynamicznego oddziaływania modelu wózka tradycyjnego przy początkowej prędkości jazdy  $v_0=70.6 \text{ m/s} \cong 254 \text{ km/h}$  wywołującej dla typowej wartości rozstawu podkładów  $l_s=0.6 \text{ m}$  fluktuację własności toru o częstotliwości  $v_0/l_s=117.6 \text{ Hz}$ . Z kolei rysunek 6.25 pokazuje analogiczne wyniki symulacji dynamicznego oddziaływania modelu wózka lekkiej konstrukcji przy początkowej prędkości jazdy  $v_0=90.7 \text{ m/s} \cong 330 \text{ km/h}$  wywołującej fluktuację własności toru o częstotliwości  $v_0/l_s=153 \text{ Hz}$ . Wymienionym wartościom częstości wymuszenia parametrycznego toru są przyporządkowane omawiane w punkcie 6.4.2 szczególnie niebezpieczne „piki” rezonansowe przedstawionych na rys. 6.19 funkcji odpowiedzi częstotliwościowych wyznaczonych za pomocą dyskretno-ciągłych modeli rozpatrywanych typów wózków oddziaływujących z torem „bardzo twardym”. Wyniki symulacji pokazane na rysunkach 6.24 i 6.25 zostały zilustrowane w identyczny sposób jak na rysunkach 6.22 i 6.23 dla parametrów modelu wózka 25ANa, tzn. przyporządkowane prawym kołom jezdnych pierwszego i drugiego zestawu kołowego wózka, przy czym w omawianym przypadku ograniczono analizę do badania jedynie przebiegów pionowych sił kontaktowych koło-szyna i dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez osie zestawów w pobliżu przekrojów osadzenia kół.

Porównując wyniki symulacji zilustrowane na rysunkach 6.24 i 6.25 należy stwierdzić, że odpowiedź dynamiczna modelu wózka tradycyjnego jest silniejsza niż odpowiedź modelu wózka lekkiej konstrukcji, gdzie w obu wypadkach dominujące składowe drgań są wywoływane biciem bieżni kół o częstościach synchronicznej  $v_0/(2\pi r_0)$  i podwójnie synchronicznej  $v_0/(\pi r_0)$  wirowania osi zestawów kołowych. Periodyczna fluktuacja własności toru podczas jazdy ma również znaczący wpływ na obydwie odpowiedzi dynamiczne, szczególnie na przebiegi momentów skręcających. Natomiast wymuszenia kinematyczne wywoływane korugacjami powierzchni tocznych szyn o częstotliwościach 1176 i 1530 Hz, przyłożone odpowiednio do modelu wózka tradycyjnego i lekkiej konstrukcji, mają nieznaczący wpływ na uzyskane przebiegi zarówno sił kontaktowych jak i momentów skręcających. W przypadku wózka lekkiej konstrukcji jadącego ze znacznie większą prędkością niż wózek tradycyjny otrzymano prawie 30% mniejsze wypadkowe amplitudy pionowych sił kontaktu koło-szyna. Hamowanie wózków powoduje powstawanie dodatkowego obciążenia osi zestawów kołowych - przede wszystkim w postaci składowych stałych momentów skręcających. Te składowe stałe okazują się być szczególnie znaczące w przypadku wózka

tradycyjnego, w przeciwieństwie do wózka lekkiej konstrukcji, w którym koła jezdne służą jako tarcze hamulcowe, dzięki czemu przyłożone do nich momenty hamujące nie są przenoszone przez osie zestawów kołowych. Jak pokazano na rysunkach 6.24 i 6.25, również amplitudy składowych zmiennych momentów skręcających są większe w przypadku wózka tradycyjnego w porównaniu z analogicznymi amplitudami momentów w osiach zestawów kołowych wózka lekkiej konstrukcji.



Rys. 6.24 Odpowiedź dynamiczna modelu układu wózek tradycyjny - tor przy prędkości jazdy  $v_0=246$  km/h.



Rys. 6.25 Odpowiedź dynamiczna modelu układu wózek lekkiej konstrukcji - tor przy prędkości jazdy  $v_0=330$  km/h.

Obliczenia numeryczne wykazały, że w całym swoim zakresie prędkości eksploatacyjnych wózek lekkiej konstrukcji oddziałuje z torem „bardzo twardym” „łagodniej” niż wózek tradycyjny, tzn. z mniejszymi amplitudami dynamicznych sił kontaktu koło-szyna i momentów skręcających przenoszonych przez osie zestawów kołowych. Przy prędkościach jazdy  $v_0$  większych niż 140 km/h wyniki symulacji uzyskane za pomocą modeli obydwu porównywanych wózków są jakościowo podobne do odpowiedzi dynamicznych zilustrowanych na rysunkach 6.24 i 6.25, przy czym w przypadku wózka lekkiej konstrukcji otrzymywano prawie zawsze o ok. 20÷30% mniejsze amplitudy pionowych sił kontaktu koło-szyna. W tym zakresie prędkości dominujący wpływ na odpowiedź dynamiczną badanych układów wózek-tor mają wymuszenia kinematyczne wywoływane biciem bieżni kół oraz fluktuacją własności toru. Natomiast w zakresie prędkości  $v_0=50\div 140$  km/h odpowiedzi dynamiczne uzyskiwane za pomocą modeli porównywanych wózków stają się do siebie bardzo zbliżone osiągając największą różnicę amplitud pionowych sił kontaktu koło-szyna wynoszącą jednocześnie 18% przy prędkościach jazdy  $v_0=130$  km/h wózka tradycyjnego i  $v_0=136$  km/h wózka lekkiej konstrukcji, [188]. Przy tych prędkościach następuje fluktuacja własności toru o częstotliwościach  $v_0/l_s=60$  i 63 Hz, którym przyporządkowane są kolejne znaczące „piki” przedstawionych na rys. 6.19 funkcji odpowiedzi częstotliwościowej modeli wózka tradycyjnego i lekkiej konstrukcji. Jak wynika z obliczeń przeprowadzonych w [188], w wymienionym powyżej zakresie mniejszych prędkości jazdy na odpowiedzi dynamiczne obu badanych układów wózek-tor istotnie wzrasta udział wymuszeń kinematycznych powodowanych korugacjami powierzchni tocznych szyn i jednocześnie maleje wpływ wymuszeń typu parametrycznego wywoływanych fluktuacją własności toru. Reasumując należy stwierdzić, że wykazany obliczeniami przeprowadzonymi przy wykorzystaniu pokazanych na rysunkach 6.1 i 6.2 modeli dyskretno-ciągłych układów wózek kolejowy – tor nieco „łagodniejszy” charakter oddziaływania dynamicznego z torem „bardzo twardym” wózka lekkiej konstrukcji Bombardier-Talbot typu ICE-21 jest spowodowany głównie jego mniejszymi wg [197] o ok. 30% masami resorowanymi i nie resorowanymi w porównaniu z wózkiem tradycyjnym MD-530.

## **6.5 Weryfikacja doświadczalna uzyskanych za pomocą modelu dyskretno-ciągłego wyników symulacji dynamicznego oddziaływania wózka kolejowego z torem**

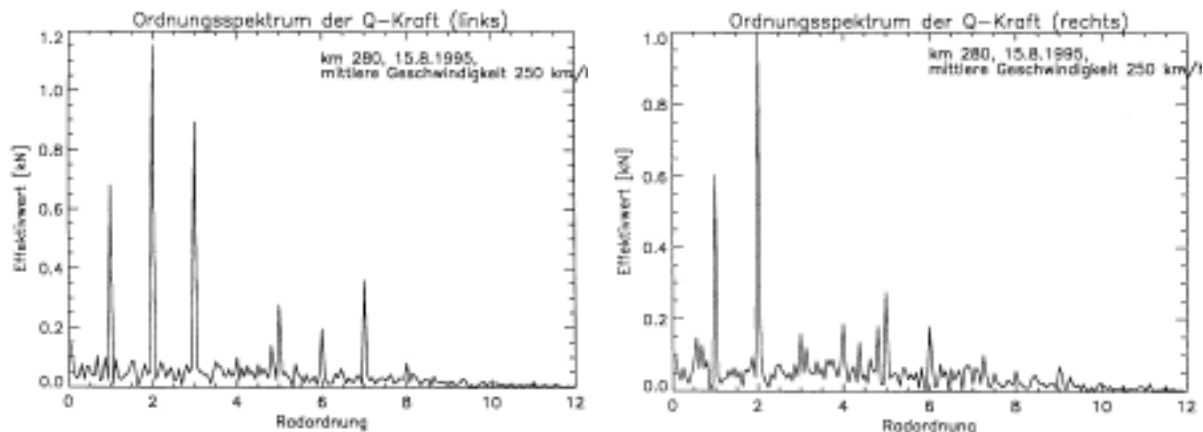
Jak zaznaczono w punkcie 6.3, w celu osiągnięcia należytej wiarygodności wyników obliczeń przeprowadzanych przy wykorzystaniu dyskretno-ciągłych modeli mechanicznych układów wózek kolejowy – tor ich parametry liczbowe wyznaczano na podstawie pomiarów doświadczalnych, szczegółowych dokumentacji technicznych czy też na podstawie porównań odpowiednich rezultatów otrzymywanych za pomocą innych modeli – oddzielnie w przypadkach modelu wózka, zestawu kołowego oraz toru. Niemniej jednak, najlepszym sposobem wiarygodnej weryfikacji uzyskiwanych wyników teoretycznych jest porównywanie ich z analogicznymi wynikami eksperymentalnymi otrzymywanymi drogą pomiarów wykonywanych na obiekcie rzeczywistym, tj. danym pojeździe szynowym poruszającym się po torze kolejowym o uprzednio określonych własnościach statycznych i dynamicznych. Tego typu badania doświadczalne były przeprowadzane m.in. w sierpniu 1995 roku w południowych Niemczech w przypadku wózka MD-530 jeżdżącego z różnymi prędkościami  $v_0$  po często spotykanych tam obecnie torach o średniej pionowej sztywności statycznej na szynę  $\sim 1.0 \cdot 10^8$  N/m z szynami typu UIC60. W związku z powyższym, porównawcze obliczenia numeryczne zostały wykonane za pomocą pokazanego na rys. 6.1 dyskretno-ciągłego modelu wózka tradycyjnego dla parametrów liczbowych charakteryzujących wspomniany wózek MD-530 z zestawami kołowymi BA-14 oddziałującego z dwoma rodzajami toru o podobnych własnościach, tj. z torem „bardzo miękkim” i „miękkim” o pionowych sztywnościach statycznych na szynę odpowiednio  $0.82 \cdot 10^8$  i  $1.10 \cdot 10^8$  N/m. Uzyskane drogą pomiarów i obliczeń pionowe i poprzeczne receptancje dynamiczne tych torów przedstawiono w punkcie 6.3.2 na rysunkach 6.9 i 6.10. Wymienione powyżej statyczne sztywności

toru mogą być traktowane w dokonywanym porównaniu jako odpowiednio dolna i górna granica naturalnej fluktuacji wokół wartości  $1.0 \cdot 10^8$  N/m pionowej sztywności statycznej toru, na którym przeprowadzono pomiary.

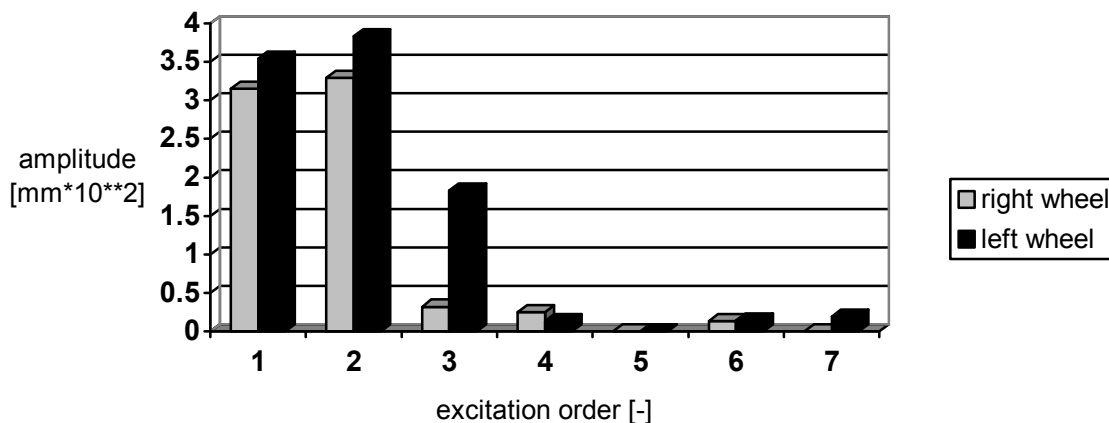
W wykonywanych obliczeniach uwzględniono następujące realne źródła wymuszeń:

- A. wywołowaną podparciem szyn na podkładach periodyczną fluktuację własności toru wynikającą w sposób naturalny z opisanej w punkcie 6.3.2 doświadczalnej identyfikacji parametrów modelu rozpatrywanych rodzajów toru,
- B. przeciętne statyczne obciążenie osi wagonu 140 kN,
- C. dopuszczalne resztkowe niewyważenia statyczne kół jezdnych i tarcz hamulcowych – realne wartości tych niewyważań w przypadku zestawu kołowego BA-14 po montażu przyjęto następujące: 350 gm dla kół i 160 gm dla tarcz hamulcowych wg [115],
- D. nierówności toru oraz powierzchni toczonej szyn przyjęto jako pomijalne;
- E. dopuszczalne bicie bieżni kół – w przypadku zestawów kołowych BA-14:  $0.1 \div 0.2$  mm.

Na rysunku 6.26 przedstawiono w dziedzinie częstości względnej odniesionej do częstości synchronicznej wirowania osi zestawu kołowego przykładowe wyniki szybkiej transformacji Fouriera (FFT) otrzymanych drogą pomiarów przebiegów pionowych sił kontaktu koło-szyna przyporządkowanych lewemu i prawemu kołu jezdnemu. Na podstawie obydwu widm amplitudowych można stwierdzić, że dominujące są składowe niskich rzędów, tj. pierwszego, drugiego i trzeciego, wzbudzone przede wszystkim niekołowatością bieżni kół jezdnych.



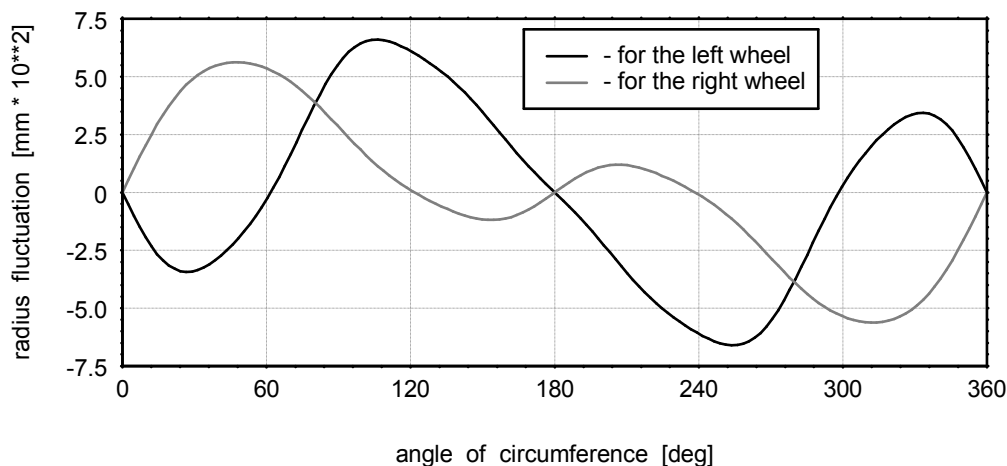
Rys. 6.26 Widma amplitudowe zmierzonych przebiegów pionowych sił kontaktowych działających na lewe i prawe koło jezdne zestawu BA-14 (wg DB A.G.).



Rys. 6.27 Założone widma amplitudowe niekołowatości bieżni lewego i prawego koła jezdne zestawu kołowego BA-14.



W związku z powyższym, do symulacji dynamicznego oddziaływania wózka z torem przyjęto pokazane na rysunku 6.27 podobne widma składowych harmonicznych niekołowości bieżni lewego i prawego koła jezdnego zestawu kołowego BA-14, których wypadkowe tworzą założone bicia dopuszczalne normami wykonawczymi. Podstawiając założone wartości amplitud niekołowości wraz z odpowiednimi kątami przesunięcia fazowego do szeregów funkcji harmonicznych, na przykład funkcji sinus, otrzymuje się przedstawione na rysunku 6.28 w funkcji obrotu koła przebiegi fluktuacji nominalnych promieni tocznych lewego i prawego koła jezdnego. Ekstremalne wartości bezwzględne odchyłek uzyskanych przebiegów od nominalnego promienia tocznego obydwu kół jezdnych są nie mniejsze niż 0.05 mm i nie przekraczają 0.1 mm, mieszcząc się tym samym w dopuszczalnych normami wykonawczymi granicach bicia wynoszących w przypadku zestawu kołowego BA-14  $0.1 \div 0.2$  mm.



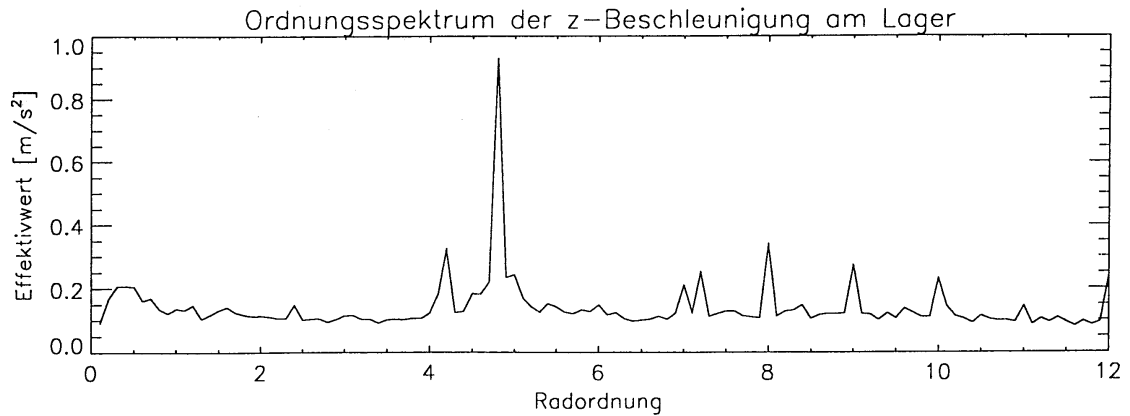
Rys. 6.28 Założone wypadkowe fluktuacje nominalnych promieni tocznych lewego i prawego koła jezdnego zestawu kołowego BA-14.

Pierwszymi porównywanymi wielkościami otrzymywanymi drogą pomiarów i obliczeń są pionowe i podłużne przyspieszenia obudów łożysk zestawów kołowych (maźnic). W modelu mechanicznym wózka odpowiadają im pionowe i podłużne przyspieszenia lewych i prawych przekrojów skrajnych osi zestawów, rys. 6.1. Na rysunkach 6.29, 6.30 i 6.31 pokazano uzyskane w sposób doświadczalny i teoretyczny wyniki przyspieszeń przy prędkościach jazdy odpowiednio  $v_0=111$ , 273 i 66 km/h. Wyniki te przedstawiono w postaci widm amplitudowych w dziedzinie częstości względnych odniesionych do częstości synchronicznej wirowania osi zestawu kołowego  $f_0=v_0/(2\pi r_0)$ , gdzie wartość nominalnego promienia tocznego zestawu BA-14 wynosi  $r_0=0.46$  m. Na tych rysunkach wyniki teoretyczne otrzymane za pomocą modelu toru „bardzo miękkiego” zaznaczono liniami czarnymi, a za pomocą modelu toru „miękkiego” - liniami szarymi. W celu skoncentrowania uwagi na wpływie wymuszenia powodowanego periodyczną fluktuacją własności toru podczas jazdy nad kolejnymi podkładami, ze zmierzonych sygnałów przyspieszeń zostały odfiltrowane składowe pochodzące od innych źródeł wymuszeń. Dlatego wykresy widm amplitudowych zamieszczone na rys. 6.29, 6.30 i 6.31 charakteryzują dominujące „piki” przyporządkowane bezwymiarowej częstości parametrycznego wymuszenia toru równej  $2\pi r_0/l_s \cong 4.82$  dla typowego rozstawu podkładów  $l_s \cong 0.6$  m. W związku z powyższym, odpowiadające wynikom pomiarów przyspieszeń symulacje numeryczne oddziaływania dynamicznego wózek-tor musiały zostać przeprowadzone z pominięciem pozostałych założonych źródeł wymuszenia, czyli wymuszeń wyszczególnionych powyżej w punktach C i E. Jak wynika z rysunków 6.29 i 6.30, przy prędkościach  $v_0=111$  i 273 km/h osiągnięto dobrą zgodność odpowiadających sobie amplitud pionowych przyspieszeń otrzymanych drogą pomiarów i obliczeń, gdzie w przypadku toru „bardzo miękkiego” uzyskano nieznacznie mniejsze, a w przypadku toru „miękkiego” nieznacznie większe wartości maksymalne. Natomiast przy  $v_0=66$  km/h zarówno w przypadku toru „miękkiego” jak i „średniego” wyniki teoretyczne cechują prawie o 70% większe amplitudy pionowych przyspieszeń

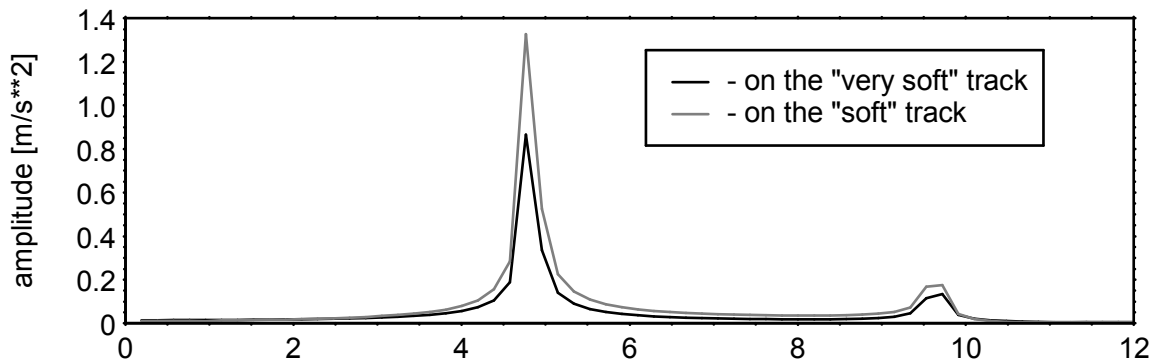
- w kierunku pionowym:

**z m i e r z o n e (przez DB A.G.)**

15.8.1995, km 230  
mittlere Geschwindigkeit 111km/h

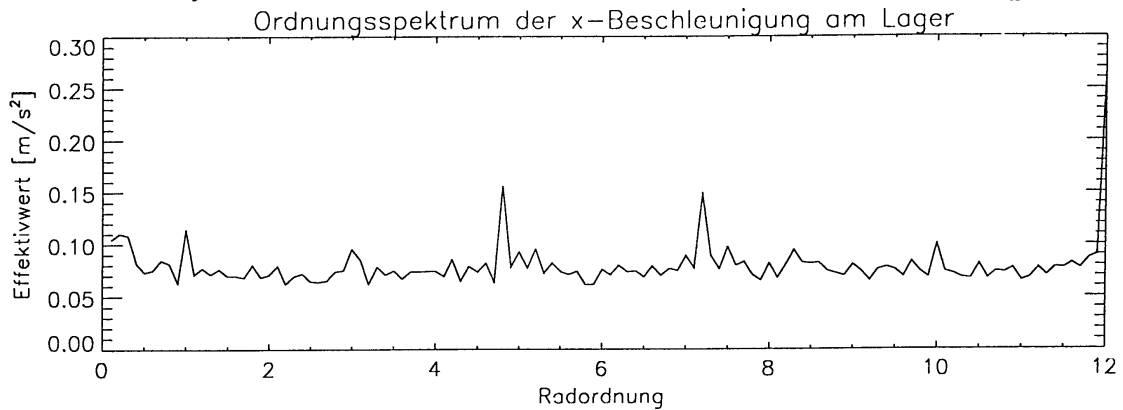


**o b l i c z o n e**

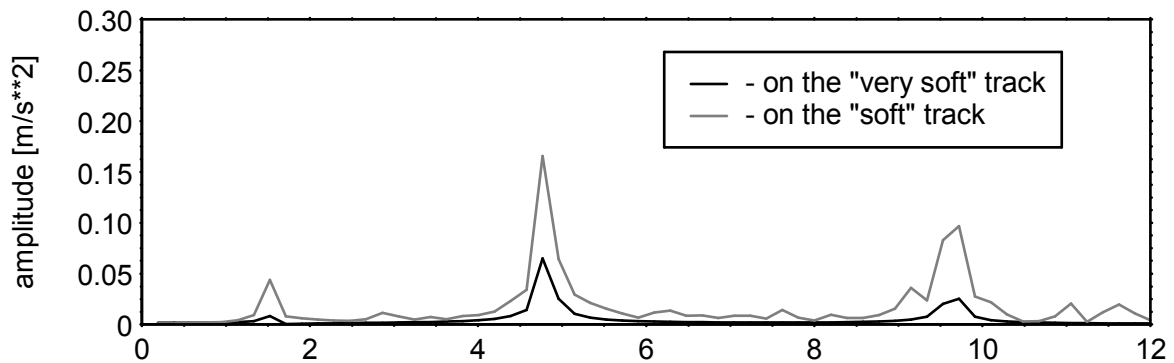


- w kierunku wzdłużnym:

**z m i e r z o n e (przez DB A.G.)**



**o b l i c z o n e**

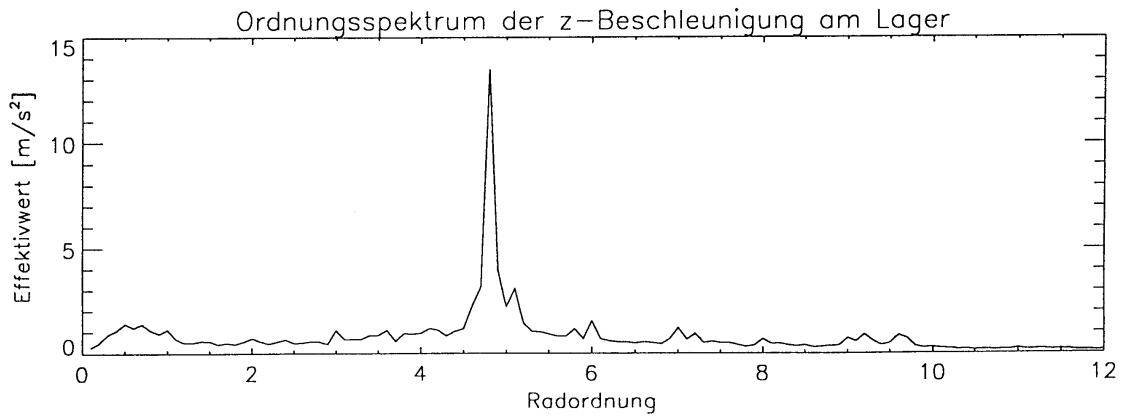


Rys. 6.29 Widma przyspieszeń obudowy łożyska zestawu kołowego przy prędkości jazdy  $v_0 = 111$  km/h.

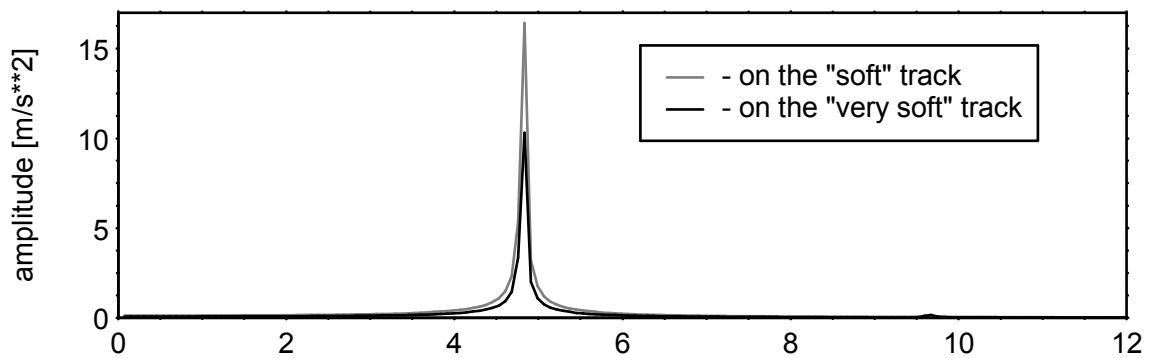
- w kierunku pionowym:

**z m i e r z o n e (przez DB A.G.)**

14.8.1995, km 58  
mittlere Geschwindigkeit 273km/h

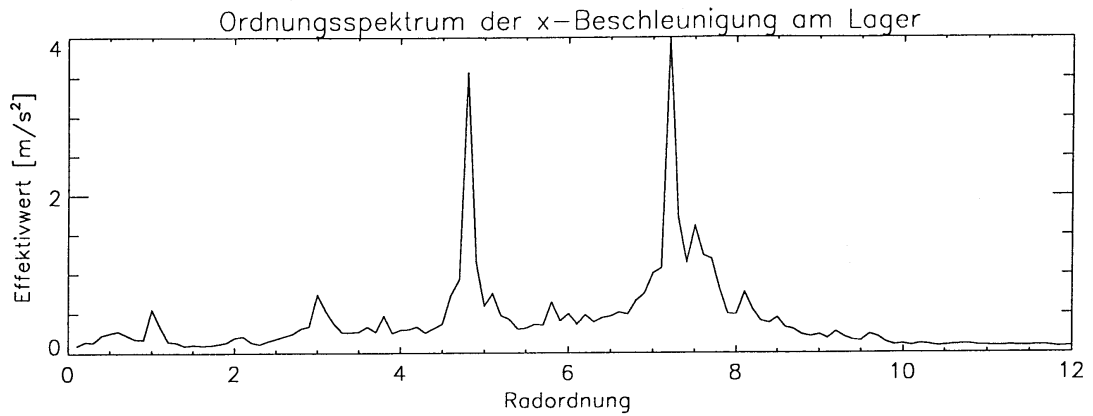


**o b l i c z o n e**

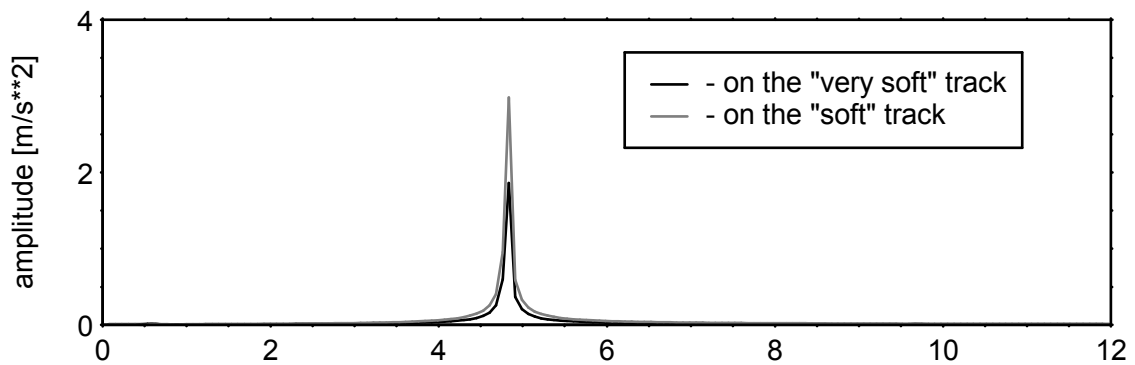


- w kierunku wzdłużnym:

**z m i e r z o n e (przez DB A.G.)**



**o b l i c z o n e**

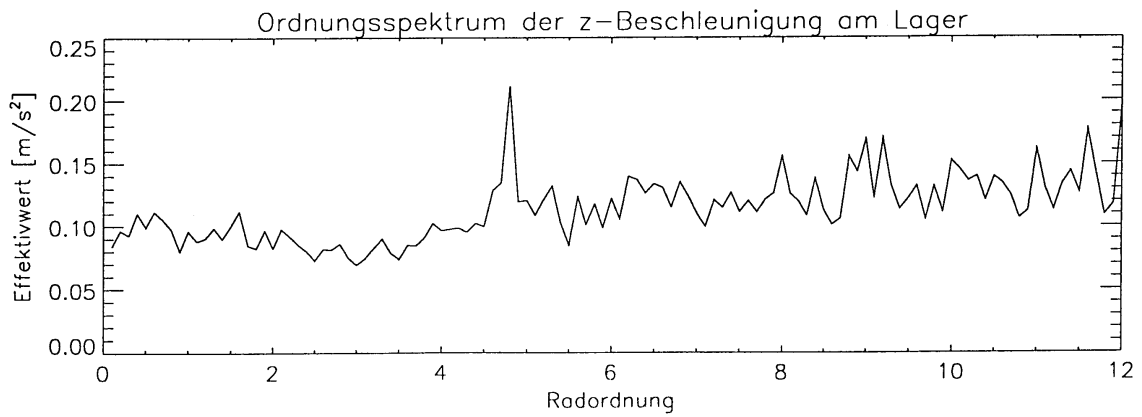


Rys. 6.30 Widma przyspieszeń obudowy łożyska zestawu kołowego przy prędkości jazdy  $v_0 = 273$  km/h.

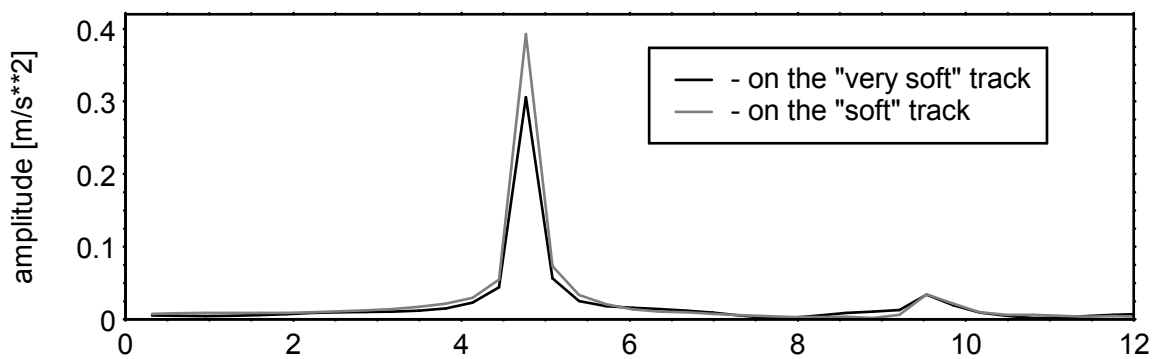
- w kierunku pionowym:

**z m i e r z o n e (przez DB A.G.)**

14.8.1995, km 591  
mittlere Geschwindigkeit 66km/h

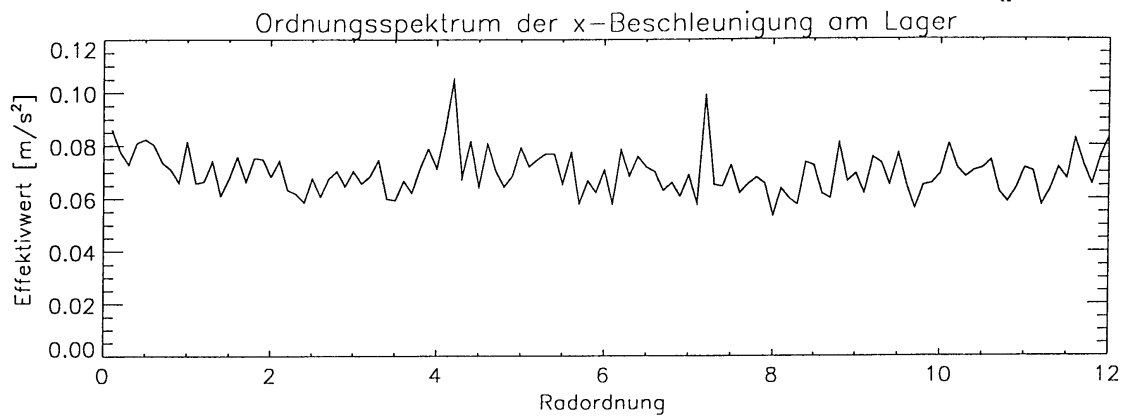


**o b l i c z o n e**

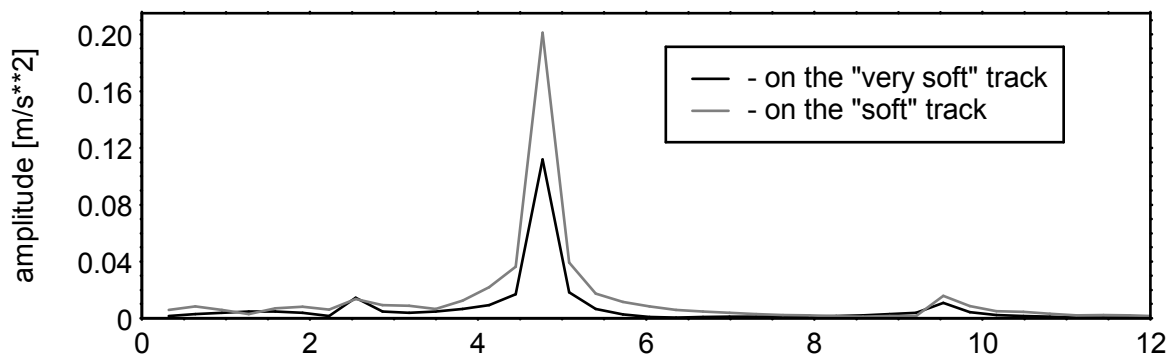


- w kierunku wzdłużnym:

**z m i e r z o n e (przez DB A.G.)**



**o b l i c z o n e**



Rys. 6.31 Widma przyspieszeń obudowy łożyska zestawu kołowego przy prędkości jazdy  $v_0 = 66$  km/h.

obudów łożysk w porównaniu z odpowiednimi amplitudami uzyskanymi doświadczalnie, jak pokazano na rys. 6.31. Niemniej jednak należy sobie zdawać sprawę, że otrzymane przy stosunkowo małej prędkości jazdy w sposób eksperymentalny i teoretyczny wartości amplitud są mniejsze od dopuszczalnych błędów pomiarów nawet stosując najbardziej dokładne do tego celu czujniki. W przypadku przyspieszeń wzdłużnych obudów łożysk zestawów kołowych dobrą zgodność między wynikami doświadczalnymi i obliczeniowymi osiągnięto przy prędkości  $v_0=111$  km/h, rys. 6.29. Przy  $v_0=273$  km/h amplitudy przyspieszenia wzdłużnego uzyskane w sposób teoretyczny zarówno za pomocą modelu toru „bardzo miękkiego” jak i „miękkiego” są nieco mniejsze niż amplitudy otrzymane eksperymentalnie, rys. 6.30. Natomiast bardzo małe, mieszczące się w granicach błędu pomiarowego amplitudy przyspieszeń wzdłużnych uzyskane eksperymentalnie i obliczeniowo przy prędkości  $v_0=66$  km/h charakteryzują się przypadkowo bardzo dobrą wzajemną zgodnością w przypadku toru „bardzo miękkiego” oraz zauważalnymi rozbieżnościami w przypadku toru „miękkiego”, rys. 6.31. Jak pokazano na rysunkach 6.29, 6.30 i 6.31, w otrzymanych drogą doświadczalną widmach amplitudowych przyspieszeń wzdłużnych obok dominujących pików o bezwymiarowej częstotliwości  $\sim 4.82$  wymuszenia zmiennością własności toru występują również dodatkowe znaczące „piki” przyporządkowane bezwymiarowej częstotliwości  $\sim 7.2$ , maksymalne wartości których progresywnie zwiększają się wraz ze wzrostem prędkości jazdy  $v_0$ , a ich obecność wydaje się być niezależna od przyspieszeń pionowych obudów łożysk, przez co można wnioskować, że jest także niezależna od pionowego oddziaływania dynamicznego wózek-tor. Ta dodatkowa istotna składowa widm przyspieszeń wzdłużnych jest prawdopodobnie wzbudzana źródłem nieuwzględnionym w modelu teoretycznym układu wózek-tor, na przykład oddziaływaniem układu napędu generatora prądu elektrycznego ruchem obrotowym osi zestawu kołowego.

Drugimi porównywanymi wielkościami otrzymywanymi drogą pomiarów i obliczeń są pionowe siły kontaktowe między kołami jezdnyymi a szynami. Podczas wykonywania symulacji numerycznej dynamicznego oddziaływania pojazd szynowy – tor pionowa siła kontaktu koło-szyna  $Q(t)$  jest zazwyczaj, na przykład w [152, 192], wyznaczana za pomocą następującej formuły

$$Q(t) = k_H(Q(t)) \cdot (u_W(t) - u_R(t) + \Delta z(v_0 t)), \quad (6.8)$$

gdzie  $k_H(Q(t))$  oznacza zmienną lub stałą sztywność kontaktową, której charakterystykę można otrzymać przy wykorzystaniu wzoru Hertza,  $u_W(t)$ ,  $u_R(t)$  są współrzędnymi uogólnionymi opisującymi pionowe przemieszczenia w punkcie kontaktu brył sztywnych reprezentujących odpowiednio koło jezdne i szynę, a  $\Delta z(v_0 t)$  oznacza funkcję opisującą wypadkową nierówność, względnie niekołowatość, powierzchni toczonej szyny i koła będącą źródłem wymuszenia kinematycznego. Ze względu na naturalne trudności w zamocowaniu czujników pomiarowych na powierzchniach toczonej kół jezdnych i szyn, siły kontaktowe koło-szyna są wyznaczone doświadczalnie zazwyczaj za pomocą metody pośredniej opisanej w [15], która polega na mierzeniu momentów zginających w zadanych sześciu przekrojach A, B, C, D, E i F osi zestawu kołowego pokazanych schematycznie na rysunku 6.32. Znając przebiegi w czasie działających w

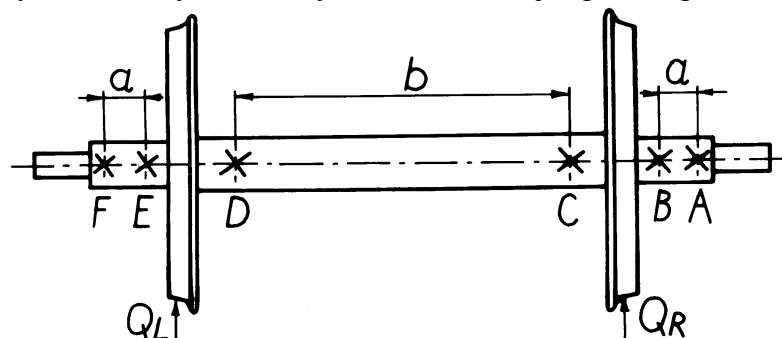


Fig. 6.32 Przekroje pomiarowe momentów zginających osi kolejowego zestawu kołowego.

tych przekrojach w płaszczyźnie pionowej momentów zginających  $M_p(t)$ ,  $p=A,B,C,D,E,F$ , przybliżone chwilowe wartości pionowych sił kontaktowych obciążających lewe i prawe koło zestawu można obliczać za pomocą następujących wyrażań różnicowych, [15]:

$$Q_R(t) = \frac{1}{a}(M_A(t) - M_B(t)) + \frac{1}{b}(M_D(t) - M_C(t)),$$

$$Q_L(t) = \frac{1}{a}(M_F(t) - M_E(t)) + \frac{1}{b}(M_C(t) - M_D(t)), \quad (6.9)$$

gdzie  $a$ ,  $b$  są odpowiednio odległościami między przekrojami poprzecznymi osi A-B, E-F oraz między przekrojami C-D, jak pokazano na rys. 6.32. W celu bardziej obiektywnego porównania pionowych sił kontaktu koło-szyna uzyskanych eksperymentalnie i teoretycznie, siły te wyznaczano podczas symulacji numerycznej wykorzystując wzory (6.9), gdzie działające w płaszczyźnie pionowej w analogicznych przekrojach A, B, C, D, E i F osi zestawów kołowych dyskretno-ciągłego modelu wózka momenty zginające  $M_p(t)$  obliczano stosując znane wzory dotyczące belki lekko-sprężystej.

Na rysunku 6.33 przedstawiono w funkcji długości jednego pełnego obwodu koła jezdnego uzyskane drogą pomiarów i symulacji komputerowej przebiegi dynamicznych sił kontaktu koło-szyna przy prędkości  $v_0=135$  i  $250$  km/h. Na tym rysunku ciągłymi liniami czarnymi zaznaczono wyniki eksperymentalne i teoretyczne otrzymane za pomocą modelu układu wózek - tor „bardzo miękki” przyporządkowane lewemu kołu zestawu. Z kolei czarnymi liniami przerywanymi zaznaczono analogiczne wyniki przyporządkowane prawemu kołu zestawu. Wyniki teoretyczne otrzymane za pomocą modelu układu wózek - tor „miękki” zaznaczono liniami szarymi - ciągłymi przyporządkowane kołu lewemu i przerywanymi przyporządkowane kołu prawemu. Przy prędkości jazdy  $v_0=135$  km/h w obu przypadkach toru, tj. „bardzo miękkiego” i „miękkiego”, osiągnięto bardzo dobrą zgodność wyników symulacji z wynikami eksperymentu przyporządkowanych lewemu i prawemu kołu zestawu. Należy zauważyć, że odpowiedź otrzymaną w sposób teoretyczny w przypadku toru „miękkiego” charakteryzuje występowanie dodatkowej składowej dynamicznej o podwojonej częstotliwości wymuszenia fluktuacjami własności toru równej  $2v_0/l_s=125$  Hz. Przy braku tej dodatkowej składowej uzyskany przebieg niemal pokrywałby się z odpowiednim przebiegiem siły otrzymanym w przypadku toru „bardzo miękkiego”. Natomiast przy prędkości  $v_0=250$  km/h duże podobieństwo wyników pomiaru i symulacji numerycznej pionowych sił kontaktu koło-szyna osiągnięto jedynie w przypadku toru „bardzo miękkiego”. Podobnie jak przy prędkości  $v_0=135$  km/h, odpowiedź otrzymaną w sposób teoretyczny w przypadku toru „miękkiego” także charakteryzuje występowanie analogicznej dodatkowej składowej dynamicznej o pojedynczej częstotliwości wymuszenia fluktuacjami własności toru równej w tym wypadku  $v_0/l_s=115.7$  Hz lecz o znacznie większej amplitudzie, jak pokazano na rys. 6.33. Fakt ten można wytłumaczyć potwierdzoną przy wykorzystaniu odpowiedniej funkcji odpowiedzi częstotliwościowej szczególną wrażliwością układu wózek MD-530 - tor „miękki” na pionowe wymuszenia przyłożone między kołami jezdnymi a szynami w zakresie częstotliwości  $110\div 130$  Hz. W przyjętym dyskretno-ciągłym modelu mechanicznym układu wózek - tor przy zadanych wartościach prędkości  $v_0=135$  i  $250$  km/h parametryczny charakter wymuszenia fluktuacją własności toru podczas jazdy powoduje istotny wzrost amplitudy drgań w wymienionym zakresie częstości.

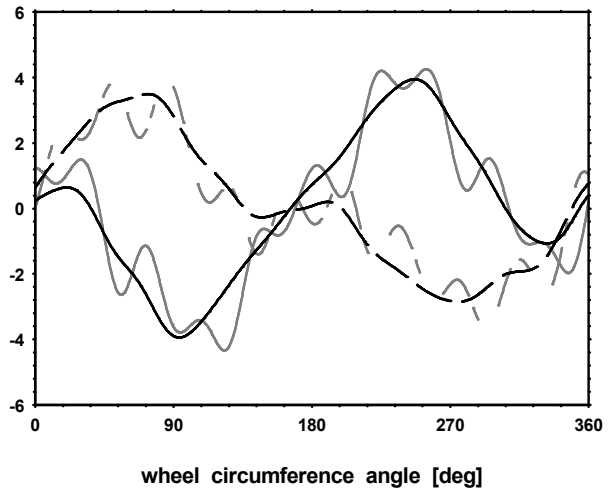
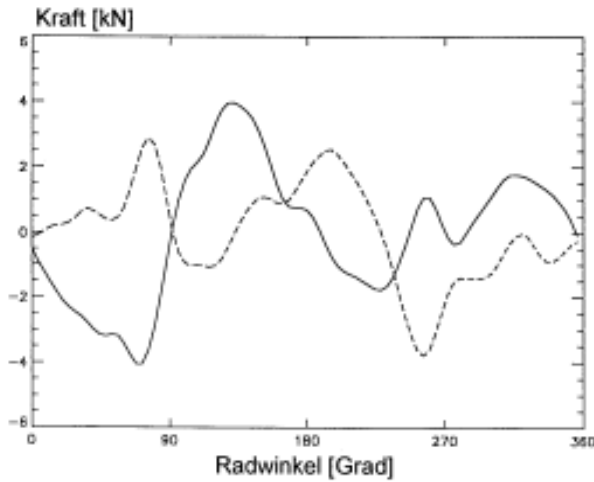
Przedstawione na rysunku 6.33 otrzymane za pomocą pomiarów i symulacji przebiegi dynamicznych sił kontaktu koło-szyna charakteryzują się stosunkowo małymi amplitudami oscylacji w stosunku do swojej średniej wartości statycznej równej  $70$  kN spowodowanej wspomnianym powyżej w punkcie B założonym grawitacyjnym obciążeniem osi zestawu kołowego wózka  $140$  kN. Na rysunkach 6.34 i 6.35 odpowiednio przy prędkości jazdy  $v_0=135$  i  $250$  km/h przedstawiono w dziedzinie czasu uzyskane drogą tych samych symulacji, za pomocą których

z m i e r z o n e (przez DB A.G.)

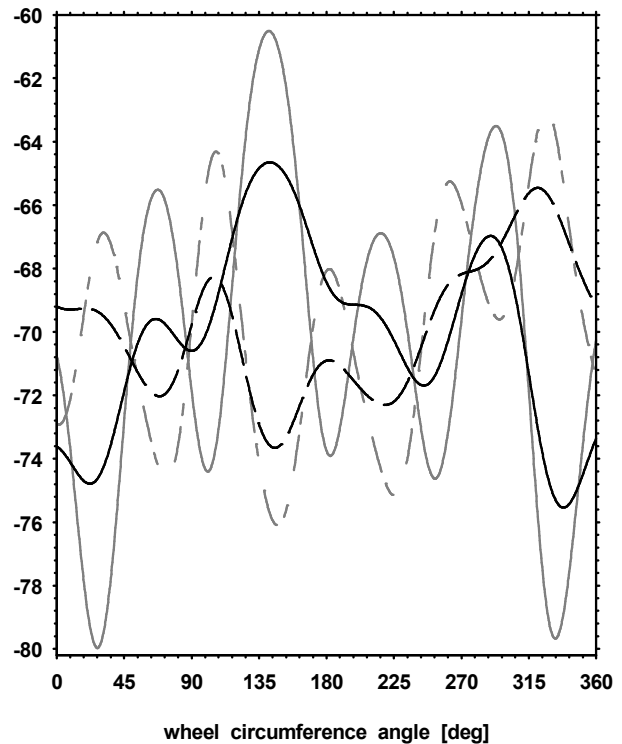
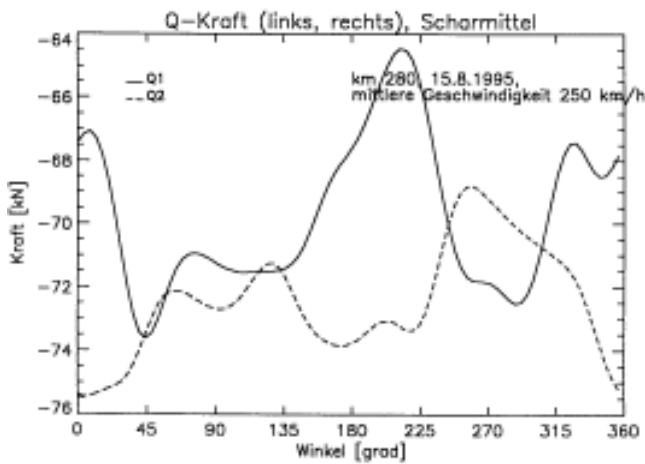
$v_0 = 135 \text{ km/h}$

o b l i c z o n e

dynamic force [kN]



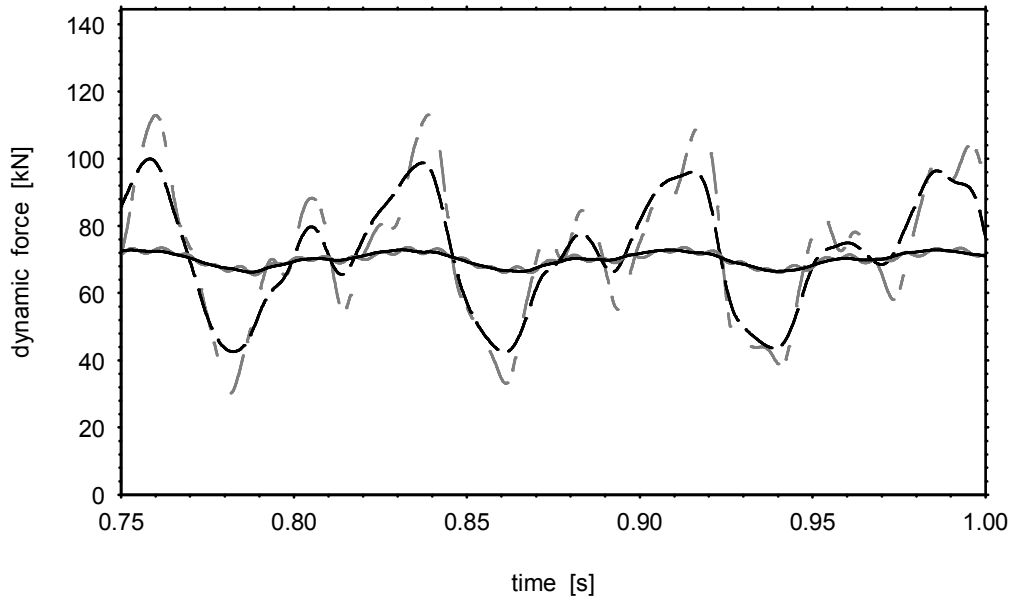
$v_0 = 250 \text{ km/h}$



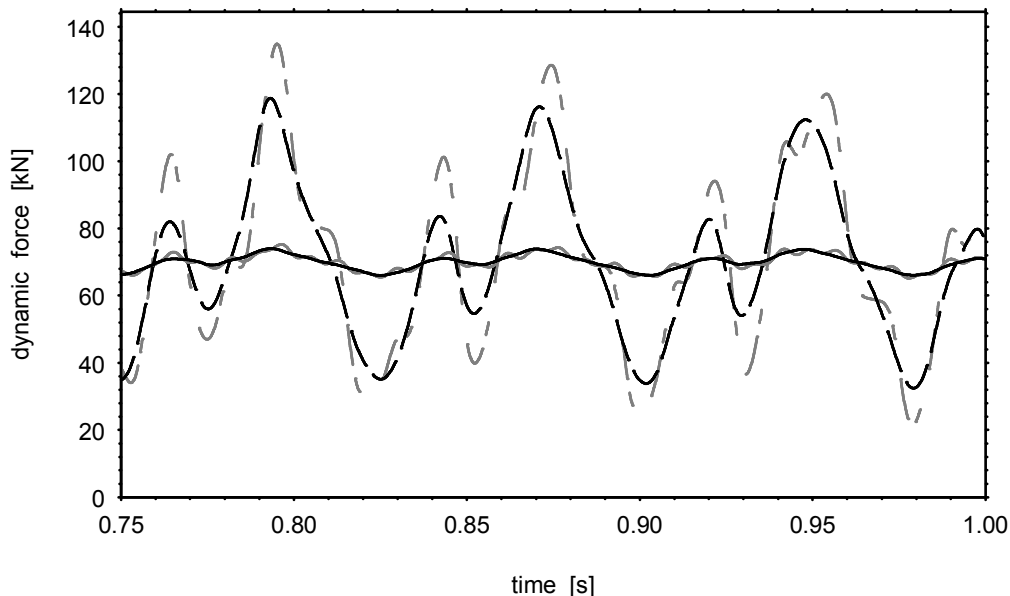
Rys. 6.33 Uzyskane drogą pomiarów i symulacji komputerowej przebiegi pionowych sił kontaktu koło-szyna.

otrzymano wyniki pokazane na rys. 6.33, przebiegi dynamicznych sił kontaktu koło-szyna wyznaczone przy wykorzystaniu wzorów (6.9), czyli na podstawie momentów zginających w osi zestawu kołowego, jak również analogiczne przebiegi otrzymane przy wykorzystaniu sztywności kontaktowej zgodnie ze wzorem (6.8). Na tych rysunkach ciągłymi liniami czarnymi zaznaczono odpowiedź uzyskaną za pomocą wzorów (6.9) w przypadku toru „bardzo miękkiego”, a ciągłymi liniami szarymi analogiczną odpowiedź w przypadku toru „miękkiego”. Z kolei czarnymi liniami przerywanymi zaznaczono odpowiedź uzyskaną przy użyciu sztywności kontaktowej wg wzoru (6.8) w przypadku toru „bardzo miękkiego”, a przerywanymi liniami szarymi analogiczną odpowiedź w przypadku toru „miękkiego”. Jak wynika z przedstawionych wykresów przyporządkowanych lewemu i prawemu kołu zestawu przy obydwu prędkościach jazdy, oscylacje

- przyporządkowane kołu **prawemu**



- przyporządkowane kołu **lewemu**



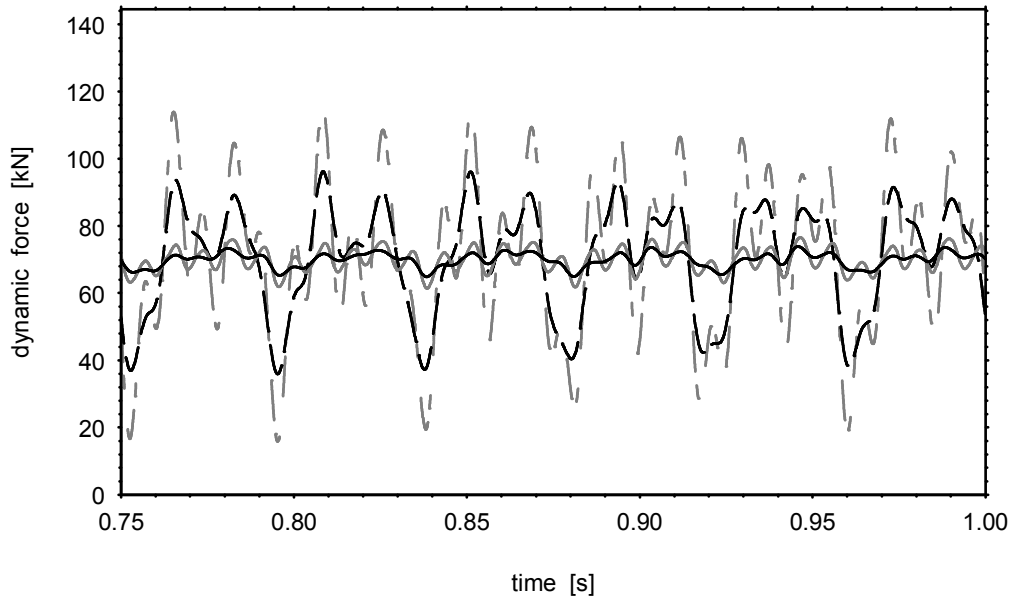
- przy wykorzystaniu momentów zginających – w przypadku toru „bardzo miękkiego” (—————)*
- przy wykorzystaniu momentów zginających – w przypadku toru „miękkiego” (—————)*
- przy wykorzystaniu sztywności kontaktowej – w przypadku toru „bardzo miękkiego” (— — —)*
- przy wykorzystaniu sztywności kontaktowej – w przypadku toru „miękkiego” (— — —)*

Rys. 6.34 Porównanie teoretycznych przebiegów pionowych sił kontaktu koło-szyna przy prędkości  $v_0 = 135$  km/h

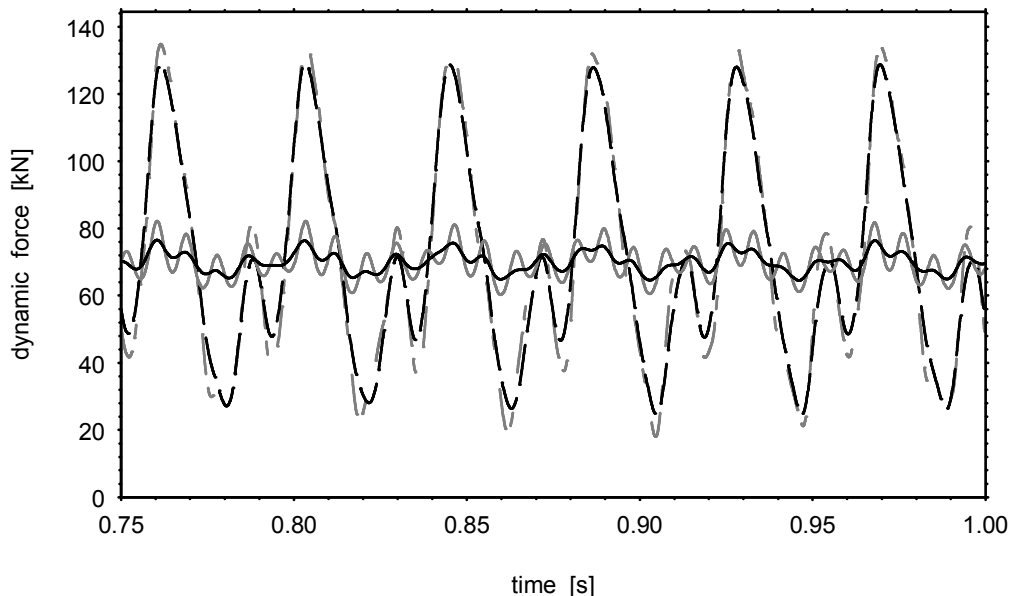
pionowych sił kontaktu koło-szyna uzyskane przy wykorzystaniu sztywności kontaktowej są nieporównywalnie większe aniżeli te otrzymane z użyciem momentów zginających w osi. Niemniej jednak te znaczące wzajemne różnice wyznaczonych w różny sposób przebiegów przyporządkowanych tym samym kołom mają charakter głównie ilościowy. Oscylują one wokół wspólnej średniej wartości statycznej 70 kN w podobny sposób różniąc się nawzajem jedynie wartościami lokalnych ekstremów, jak pokazano na rysunkach 6.34 i 6.35. Zaistniałe różnice są spowodowane głównie przez oczywiste pominięcie bezwładności koła jezdnego, w przypadku gdy wykorzystywane są przebiegi momentów zginających oś zestawu i wzory (6.9) prowadzące w istocie rzeczy do wyznaczenia przybliżonych wartości sił tnących w przekrojach osadzenia kół, a



- przyporządkowane kołu **prawemu**



- przyporządkowane kołu **lewemu**



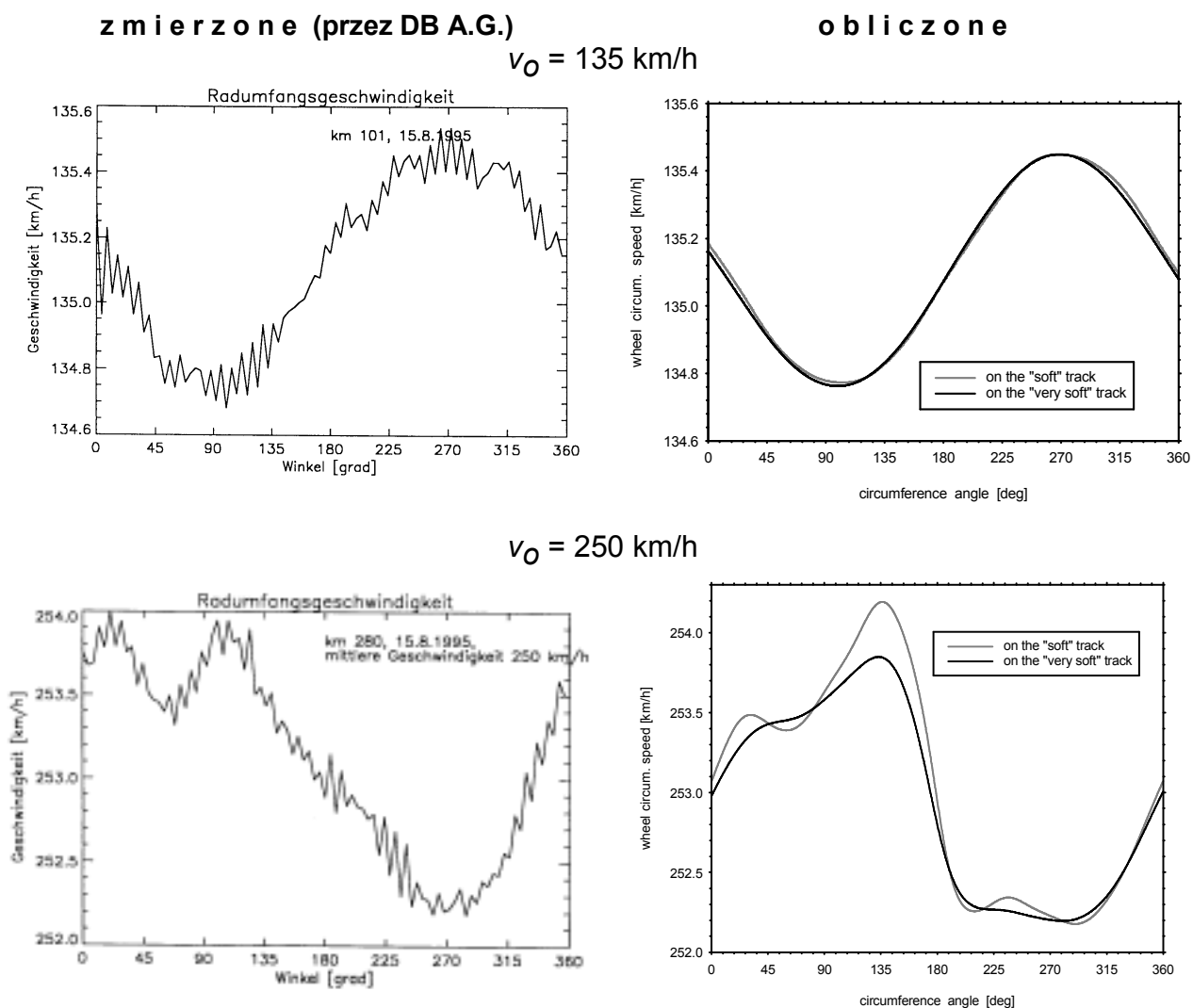
- przy wykorzystaniu momentów zginających – w przypadku toru „bardzo miękkiego” (—————)*
- przy wykorzystaniu momentów zginających – w przypadku toru „miękkiego” (—————)*
- przy wykorzystaniu sztywności kontaktowej – w przypadku toru „bardzo miękkiego” (— — —)*
- przy wykorzystaniu sztywności kontaktowej – w przypadku toru „miękkiego” (— — —)*

Rys. 6.35 Porównanie teoretycznych przebiegów pionowych sił kontaktu koło-szyna przy prędkości  $v_0 = 250$  km/h

nie faktycznych sił działających na styku ich powierzchni toczy. Przeprowadzone porównanie dwóch różnych metod wyznaczania sił kontaktu koło-szyna wykazało dobitnie, że stosowana powszechnie technika przy wykonywaniu pomiarów wydaje się być bardzo niedokładna. Bezkrytyczne poleganie na tej metodzie może prowadzić do poważnego niedocenia doniosłości efektów dynamicznych towarzyszących rzeczywistemu oddziaływaniu pojazdu szynowego z torem kolejowym. Natomiast pokazane na rys. 6.34 i 6.35 przebiegi wyznaczone przy wykorzystaniu sztywności kontaktowej Hertza zgodnie ze wzorem (6.8) podkreślają znaczenie dynamicznego charakteru tego oddziaływania wykazując zarazem występowanie bardzo dużych pionowych sił kontaktowych koło-szyna powstałych wskutek wymuszeń spowodowanych jedynie mieszczącymi

się w granicach tolerancji błędami wykonawczymi nowych zestawów kołowych. Ponadto, należy stwierdzić, iż biorąc pod uwagę możliwość popełniania większych lub mniejszych niedokładności modelowania układu pojazd szynowy – tor, czy też modelowania samego interfejsu kontaktowego koło-szyna, uzyskiwane drogą symulacji komputerowej tak duże wartości pionowych sił kontaktowych wydają się być zupełnie realne, tym bardziej, że zostały one również potwierdzone wynikami obliczeń innych autorów, na przykład [63, 72, 115, 152] przy wykorzystaniu innych modeli układu jezdni pojazdu szynowego i toru. Dodatkowym dowodem występowania tak dużych pionowych sił kontaktowych są stwierdzone doświadczalnie zjawiska mikro-odrywania kół jezdnych od szyn oraz wczesnego zużycia się powierzchni tocznych kół jezdnych i szyn w postaci narastających trwałych deformacji plastycznych.

Trzecimi porównywanymi wielkościami otrzymywanymi drogą pomiarów i obliczeń są prędkości obwodowe koła jezdni zestawu kołowego. Na rysunku 6.36 przedstawiono w funkcji długości jednego pełnego obrotu koła jezdni uzyskane drogą pomiarów i symulacji komputerowej przebiegi prędkości obwodowej koła jezdni otrzymane także przy prędkościach  $v_0=135$  i  $250$  km/h. Liniami czarnymi zaznaczono na tym rysunku przebiegi otrzymane eksperymentalnie oraz uzyskane teoretycznie za pomocą modelu układu wózek - tor „bardzo miękki”, a liniami szarymi zaznaczono przebiegi teoretyczne otrzymane za pomocą modelu układu wózek - tor „miękki”. Przebiegi uzyskane doświadczalnie przy obydwu wymienionych prędkościach charakteryzują się występowaniem powstałej najprawdopodobniej w wyniku zakłóceń składowej wysokoczęstotliwościowej o stosunkowo małej amplitudzie nałożoną na quasi-okresową



Rys. 6.36 Uzyskane drogą pomiarów i symulacji komputerowej przebiegi prędkości obwodowej koła jezdni.

fluktuację wokół przeciętnej prędkości jazdy  $v_0$  z podstawową synchroniczną częstością wirowania osi zestawu  $f_0 = v_0 / (2\pi r_0)$ . Przebiegi prędkości obwodowej otrzymane w przypadku obu rozpatrywanych torów metodą symulacji komputerowej są również quasi-okresowe o podstawowej częstości synchronicznej  $f_0$  oraz mają prawie takie same wartości ekstremalne jak analogiczne przebiegi uzyskane w sposób doświadczalny. Analizując z kolei same wyniki teoretyczne należy zauważyć, że przy  $v_0 = 135$  km/h przebiegi prędkości obwodowej koła w przypadku obu torów są niemal identyczne. Natomiast przy  $v_0 = 250$  km/h za pomocą modelu układu wózek - tor „miękki” otrzymano nieco większą amplitudę fluktuacji prędkości obwodowej niż za pomocą modelu układu wózek - tor „bardzo miękki”, jak pokazano na rys. 6.36.

Przeprowadzone porównanie wyników pomiarów i symulacji komputerowej dynamicznego oddziaływania wózka MD 530 z torem dokonane przy wykorzystaniu modelu dyskretno-ciągłego układu wózek-tor wykazało dobrą zgodność między rzeczywistością a zastosowaną teorią. Zarówno wartości ekstremalne jak i charakter oscylacji odpowiedzi dynamicznych układu wózek-tor otrzymanych teoretycznie okazały się być bardzo podobne do analogicznych wyników eksperymentu przeprowadzonego na obiekcie rzeczywistym w stosunkowo szerokim zakresie prędkości jazdy. Ze względu na ograniczony zakres tego porównania sprowadzającego się jedynie do oddziaływania dynamicznego w kierunku pionowym i wzdłużnym, nie można więc uznać przyjętego modelu dyskretno-ciągłego układu wózek kolejowy-tor jako w pełni zweryfikowanego doświadczalnie. Na przykład brak informacji dotyczących geometrii odcinków toru, na których wykonywano pomiary, przede wszystkim promieni krzywizny, wartości przechylek i in., uniemożliwił dokonania analogicznego porównania dla wielkości związanych z oddziaływaniem dynamicznym w kierunku poprzecznym do osi toru. Niemniej jednak, na podstawie przedstawionych powyżej wyników badań eksperymentalnych i teoretycznych dynamicznego oddziaływania wózka z torem w kierunku pionowym i wzdłużnym można stwierdzić, iż przyjęte w pracy dyskretno-ciągłe modele mechaniczne układów wózek kolejowy-tor są należycie wiarygodnymi narzędziami obliczeniowymi do zastosowań technicznych.

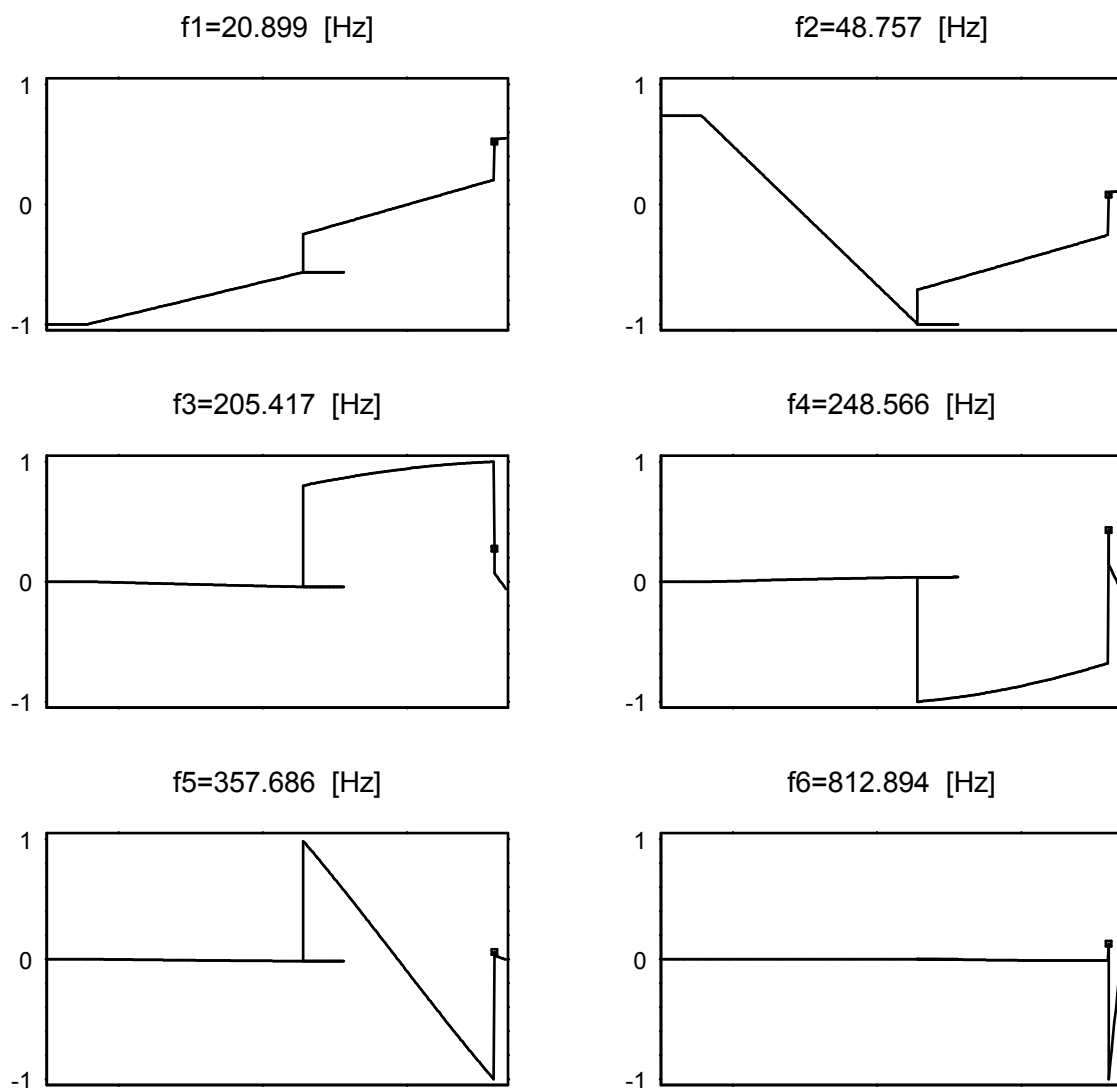
## **6.6 Wyniki obliczeń otrzymane za pomocą dyskretno-ciągłego modelu układu wózek napędny - tor kolejowy**

Obliczenia numeryczne dotyczące dynamicznego oddziaływania wózka napędnego z torem przeprowadzono przy zastosowaniu dyskretno-ciągłego modelu pokazanego na rys. 6.3 dla parametrów liczbowych układu jezdnego szybkobieżnej 4-osiowej lokomotywy elektrycznej B0-B0 typu EP-09 oraz dla parametrów modelu toru charakteryzujących prosty tor „średni” oraz prosty tor „twardy”. Wartości parametrów układu jezdnego wymienionego typu lokomotywy ustalono na podstawie jej dokumentacji technicznej, wyników pomiarów z pracy [58] oraz kierując się wskazaniem z rozprawy doktorskiej [136]. Podano je w raporcie wewnętrznym [182].

### **6.6.1 Analiza drgań własnych**

Analiza drgań własnych zdefiniowanego w punkcie 6.2.1 „podproblemu 1” dotyczącego drgań giętnych zestawów kołowych sprzężonych z pionowymi drganiami modelu toru oraz z pionowymi i podłużnymi drganiami ramy wózka daje jakościowo bardzo podobne wyniki wartości częstości własnych i odpowiadających im funkcji własnych do tych otrzymanych w przypadku modelu standardowego wózka tocznego pokazane na rys. 6.14. Wówczas, w badanym zakresie częstotliwości 0÷1300 Hz dla parametrów wózka lokomotywy EP-09 oddziaływującej z torem „twardym” uzyskano 45 częstości i postaci drgań własnych. Niemniej jednak, ze względu na zilustrowaną na rys. 6.3 antysymetrię względem osi podłużnej toru struktury wózka omawianego typu lokomotywy spowodowaną wzajemnym usytuowaniem układów napędu zestawów kołowych, uzyskano więc pewną antysymetrię kształtów odpowiadających sobie funkcji własnych pierwszego i drugiego zestawu kołowego, analogiczną jak w przypadku funkcji własnych wyznaczonych za

pomocą modelu wózka tocznego lekkiej konstrukcji typu ICE-21 przedstawionych na rys. 6.16. Pierwsze 12 funkcji własnych i częstości giętnych drgań własnych otrzymanych w zakresie częstotliwości 0÷240 Hz przy wykorzystaniu modelu pojedynczego zestawu kołowego lokomotywy EP-09 oddziaływującego z torem „średnim” i połową masy ramy wózka zamieszczono w pracy [183].



Rys. 6.37 Pierwsze 6 funkcji skrętnych drgań własnych i odpowiadające im częstości dyskretno-ciągłego modelu układu napędu zestawu kołowego wózka lokomotywy elektrycznej EP-09.

W przypadku wózka napędowego, szczególnego znaczenia nabiera analiza skrętnych drgań własnych sprowadzająca się do rozwiązania „podproblemu 2” zdefiniowanego w punkcie 6.2.1. Wówczas, obiektem badań stają się układy napędowe obydwu zestawów kołowych, z których każdy składa się z samego zestawu kołowego, wału pośredniego, przekładni zębatej i silnika napędowego, jak pokazano na rys. 6.3. Na rysunku 6.37 przedstawiono wyniki analizy skrętnych drgań własnych układu napędu pojedynczego zestawu kołowego lokomotywy EP 09 w zakresie częstotliwości 0÷1000 Hz w postaci funkcji i częstości własnych. Jak wynika z tego rysunku, w rozpatrywanym paśmie częstości badany układ ma 6 postaci skrętnych drgań własnych. W przypadku dwóch pierwszych postaci o odpowiadających im częstościach własnych 20.9 i 48.8 Hz dominujące znaczenie mają odkształcenia skrętne osi zestawu i wału pośredniego. Następne trzy postaci drgań własnych można określić jako „formy sprzęgłowe”, w których największym odkształceniom skrętnym ulegają nieważkie elementy sprzężyste reprezentujące

podatność sprzęgieł wychylnych. Z kolei w przypadku postaci szóstej o częstotliwości 812.9 Hz deformacji ulega jedynie zazębienie przekładni oraz wał silnikowy, jak pokazano na rys. 6.37.

### 6.6.2 Analiza drgań wymuszonych

Zgodnie z zaleceniami podanymi w pracach [95, 98] do analizy drgań wymuszonych założono harmoniczny charakter zmienności sztywności zazębienia przekładni względem wartości średniej  $k_{Gc}$  wg zależności:

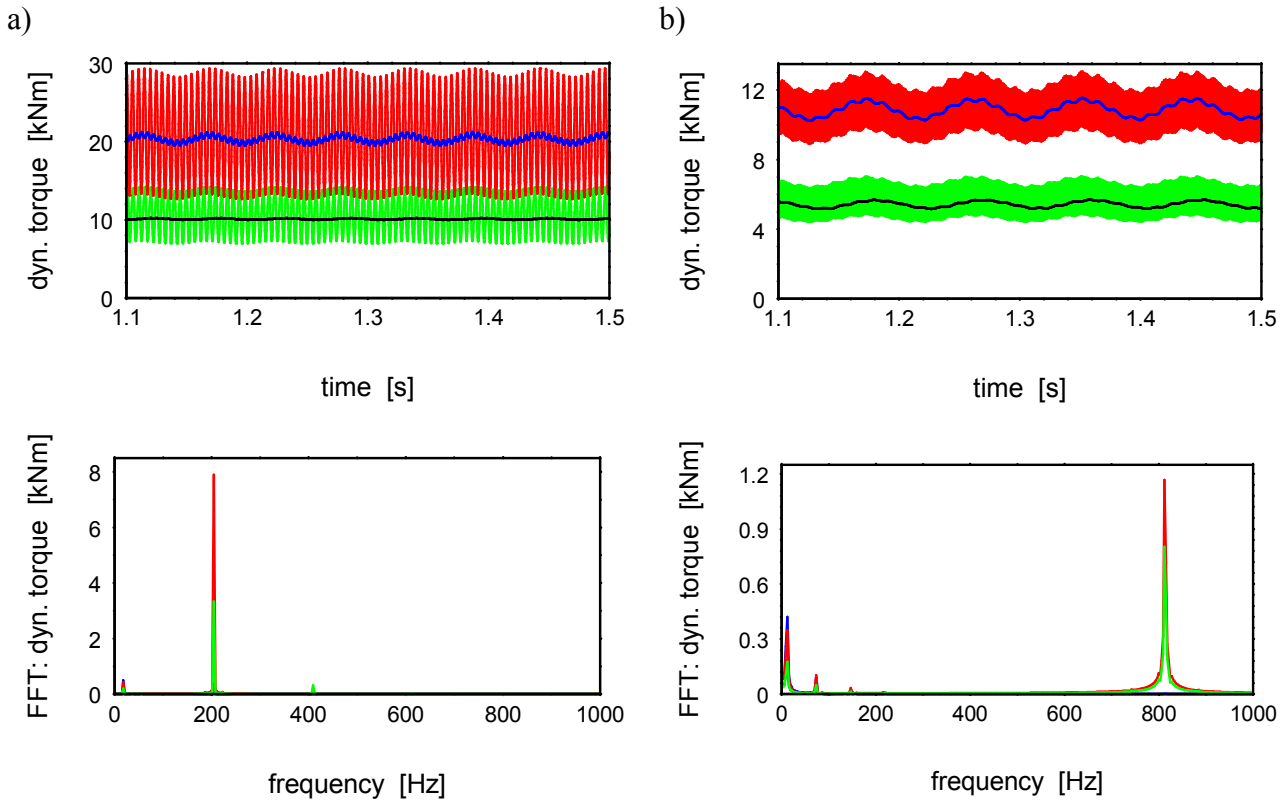
$$k_G(t) = k_{Gc} + k_{Gv}\sin(z\Omega t), \quad (6.10)$$

gdzie w przypadku rozpatrywanego typu lokomotywy EP-09  $z=73$  oznacza liczbę zębów koła zębatego obracającego się ze średnią prędkością kątową  $\Omega$ , a  $k_{Gv} \approx 0.15 k_{Gc}$  w przypadku przekładni o zębach prostych i przełożeniu równym 1.921. Ponieważ składowa stała momentu obrotowego przenoszonego przez przekładnię w normalnych warunkach pracy jest zwykle znacznie większa od amplitud składowej zmiennej, można przyjąć, że zazębienie działa w stanie stałego przyporu jednostronnego, i wg [56, 95, 98] pominąć luz międzyzębny. Zgodnie z równaniami warunków brzegowych (6.6b) do brył sztywnych odpowiadających wirnikom silników napędowych są przyłożone momenty zewnętrzne  $M_{el}(t)$ , których wartości w czasie zależą od chwilowego obciążenia układu napędowego według zadanej charakterystyki - w omawianym przypadku lokomotywy EP-09 - charakterystyki szeregowego silnika prądu stałego. Tłumienie względne w sprzęgłach wychylnych oraz w zazębieniu przekładni przyjęto w postaci tłumienia modalnego, którego odpowiednie współczynniki wyznaczono zgodnie ze wzorem (4.7) z punktu 4.1.4. Obliczone w ten sposób wartości liczbowe współczynników tłumienia  $d_j$ ,  $j=W1, W2, G, S$ , występujących w warunkach brzegowych (6.6a) i (6.6b) dyskretno-ciąłego modelu układu napędu zestawu kołowego lokomotywy można znaleźć w raporcie [182].

Analizę drgań wymuszonych powstających w wyniku dynamicznego oddziaływania układu jezdnego lokomotywy elektrycznej typu EP-09 z torem przeprowadzono w celu ustalenia przyczyn nadmiernego zużywania się powierzchni współpracujących zębów przekładni zębatych oraz w celu badania efektów cieplnych powstających w wyniku tarcia na styku powierzchni tocznych kół i szyn. Pierwszy z wymienionych problemów rozwiązano w pracach [182, 183]. Ze względu na wzajemne podobieństwo warunków działania układów napędu obydwu zestawów kołowych wózka rozważania ograniczono do badania układu napędu jednego zestawu kołowego wymienionego typu lokomotywy poruszającej się po torze „średnim” o średniej pionowej sztywności statycznej na szynę  $\sim 1.4 \cdot 10^8$  N/m. Parametry tego typu toru reprezentują uśrednione własności spotykanych powszechnie na liniach Polskich Kolei Państwowych torów „bardzo miękkiego”, „miękkiego” i „twardego” o pionowych sztywnościach statycznych na szynę odpowiednio  $0.82 \cdot 10^8$ ,  $1.10 \cdot 10^8$  i  $2.03 \cdot 10^8$  N/m, dzięki czemu uzyskiwane wyniki mogą być bardziej przydatne do oceny realnych warunków eksploatacji rozpatrywanej lokomotywy.

Rozpatrywany układ mechaniczny badano w ustalonych warunkach pracy, tj. przy różnych stałych prędkościach jazdy lokomotywy  $v_0$  na torze prostym o idealnej geometrii kontaktu kołoszlina, tzn. pomijając wymuszenia kinematyczne wywoływane nierównościami powierzchni tocznych szyn i niekołowatością bieżni kół jezdnych, oraz przy znamionowych przy danej wartości  $v_0$  stałych siłach uciągu  $F_t$ . Najsilniejsze drgania w badanym obiekcie wózek napędny - tor zaobserwowano przy prędkości jazdy  $v_0=40$  km/h i odpowiadającej jej znamionowej sile uciągu  $F_t=130$  kN oraz przy prędkości  $v_0=157$  km/h i sile  $F_t=70$  kN w postaci drgań skrętnych układów napędu zestawów kołowych. Na rysunkach 6.38 a i b przedstawiono odpowiednio dla wymienionych powyżej przypadków uzyskane drogą symulacji komputerowej odpowiedzi dynamiczne w formie przebiegów dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez wybrane elementy układu napędowego. Na tych rysunkach w dziedzinie czasu i częstości liniami czerwonymi zaznaczono przebiegi momentu skręcającego przenoszonego przez zazębienie przekładni, liniami zielonymi - przebiegi momentu skręcającego przenoszonego przez wał

silnikowy łączący przekładnię z wirnikiem silnika, liniami niebieskimi - przebiegi momentu skręcającego przenieszonego przez drażony wał pośredni, a liniami czarnymi zaznaczono przebiegi momentu skręcającego przenieszonego przez oś zestawu kołowego na odcinku między kołami jezdny. Prędkość lokomotywy  $v_0=40$  km/h odpowiada przeciętnej prędkości kątowej osi zestawu kołowego i wału pośredniego  $\Omega_{40}$ , przy której fluktuacja sztywności zazębienia przekładni powoduje powstawanie rezonansu parametrycznego z pokazaną na rys. 6.37 trzecią postacią skrętnych drgań własnych układu napędowego o częstotliwości 205.4 Hz, kiedy to zostaje spełniona



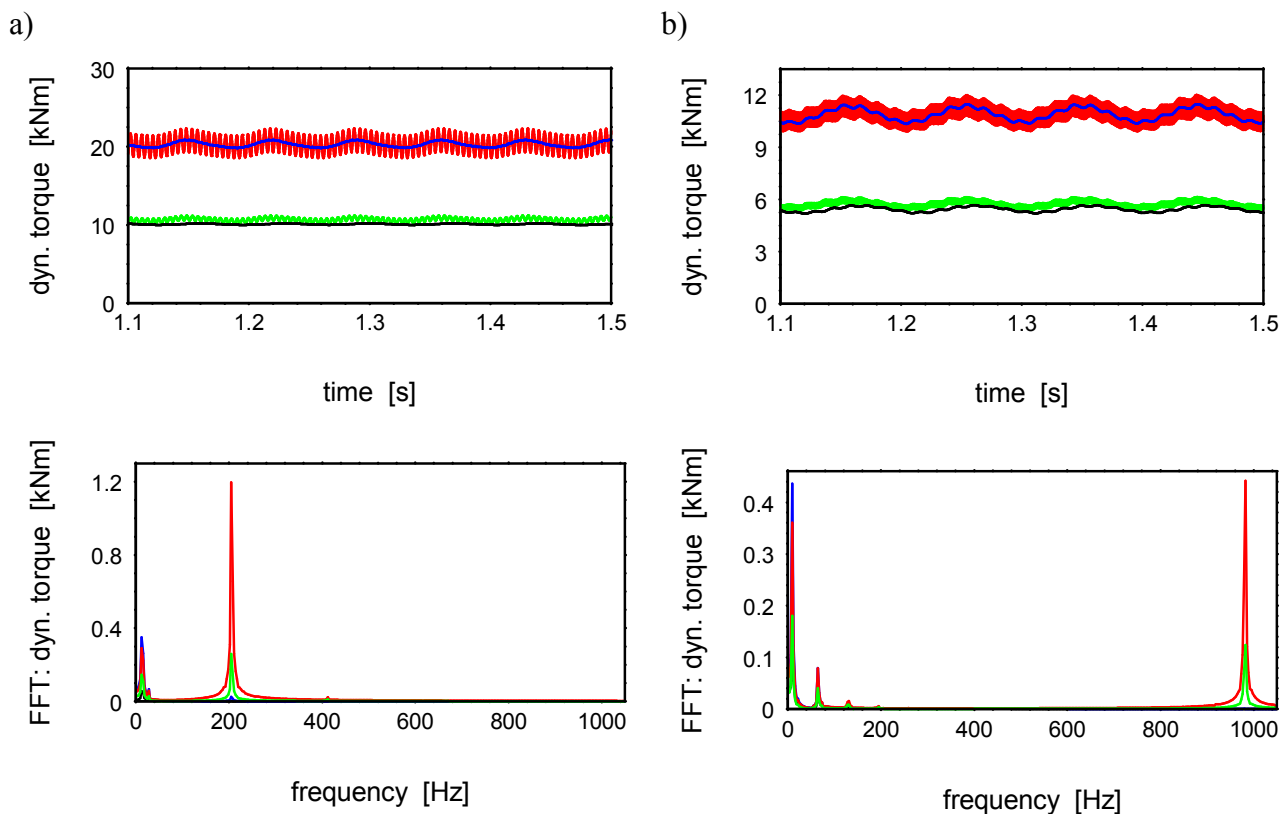
Rys. 6.38 Dynamiczne momenty skręcające przenieszone przez model układu napędu zestawu kołowego lokomotywy EP-09 z przekładnią o zębach prostych przy prędkości jazdy (a)  $v_0=40$  km/h i (b)  $v_0=157$  km/h.

następująca równość  $205.4 \approx z\Omega_{40}/(2\pi)$  dla  $z=73$ . W analogiczny sposób przy prędkości jazdy  $v_0=157$  km/h wzbudzany jest rezonans parametryczny z szóstą postacią skrętnych drgań własnych o częstotliwości 812.9 Hz. Wówczas zachodzi równość  $812.9 \approx z\Omega_{157}/(2\pi)$ . W obydwu przypadkach te rezonanse powodują bardzo silne oscylacje momentów skręcających przenoszonych przez zazębienie przekładni oraz przez wał silnikowy, co może stanowić przyczynę obserwowanych w praktyce w tego typu lokomotywach szybko narastających uszkodzeń zmęczeniowych powierzchni współpracujących zębów. Natomiast stosunkowo duże wartości biegunowych masowych momentów bezwładności koła zębatego przekładni i kół jezdnych powodują prawie całkowite „odfiltrowanie” składowej wymuszenia parametrycznego wywołwanego fluktuacją sztywności zazębienia przekładni z przebiegów momentów skręcających przenoszonych przez oś zestawu kołowego i wał pośredni. Jak wynika z widm amplitudowych uzyskanych przebiegów momentów skręcających pokazanych na rys. 6.38 a i 6.39b, w obu omawianych przypadkach oddziaływanie zestawu kołowego z torem ma znikomy wpływ na drgania skrętne układu napędowego, czego wyrazem są stosunkowo niewielkie składowe o częstotliwościach wymuszenia toru  $v_0/l_s$  równych  $\sim 18$  i  $\sim 73$  Hz odpowiednio przy prędkości jazdy  $v_0=40$  i 157 km/h dla typowej wartości rozstawu podkładów  $l_s = 0.6$  m. Natomiast przy większej prędkości jazdy  $v_0=157$  km/h istotniejszego znaczenia nabierają wymuszenia wywołwane resztkowymi niewyważeniami statycznymi kół jezdnych zestawu przejawiające się wyraźnym „pikiem” przyporządkowanym częstotliwości  $\sim 11$  Hz równej w przybliżeniu częstotliwości synchronicznej wirowania osi zestawu kołowego

$\Omega_{157} = v_0 / (2\pi r_0)$ , gdzie w przypadku lokomotywy EP-09 nominalny promień toczy kół jezdnych  $r_0$  wynosi 0.625 m.

W celu zmniejszenia tak dużych amplitud fluktuacji momentów skręcających przenoszonych przez zazębienie przekładni oraz przez wał silnikowy powstałych w wyniku rezonansów parametrycznych spowodowanych okresowo-zmienną sztywnością zazębienia przekładni do omawianego modelu układu napędu zestawu kołowego lokomotywy EP-09 wprowadzono parametry charakteryzujące inny typ przekładni zębatej - przekładni o zazębieniu daszkowym stosowaną w bardzo podobnych układach napędu zestawów kołowych m.in. niemieckich lokomotyw elektrycznych produkowanych przez firmę Krauss&Maffei. Wzorując się na rozwiązaniu konstrukcyjnym przekładni daszkowej lokomotywy typu „Europrinter” firmy Krauss&Maffei założono prawie niezmienną wartość przełożenia tej przekładni, tj. bliską 1.921, przy liczbie zębów koła zębatego  $z=99$ . Wówczas, przy odpowiadających tym parametrom wymiarach geometrycznych koła zębatego, zębniaka i samych zębów średnia wartość sztywności zazębienia takiej przekładni daszkowej wzrasta ok. 2.3-raza w stosunku do średniej sztywności zazębienia przekładni o zębach prostych stosowanej seryjnie w lokomotywie EP-09. Natomiast, mimo oczywistej zmiany kształtów geometrycznych koła zębatego i zębniaka przekładni daszkowej ich biegunowe masowe momenty bezwładności przyjęto takie same jak dla przekładni o zębach prostych. Dla zmodyfikowanych w ten sposób parametrów układu napędowego przeprowadzona analogicznie jak w punkcie 6.6.1 analiza skrętnych drgań własnych przy nie zmienionych parametrach pozostałych wykazała wzrost częstotliwości szóstej postaci drgań do wartości 1031 Hz, przy bardzo bliskich wartościach częstości pięciu pierwszych postaci drgań w stosunku do odpowiadających im wartości otrzymanych w przypadku przekładni o zębach prostych. Zgodnie z zaleceniami podanymi w [95, 98], w przypadku przekładni daszkowej o przyjętych powyżej parametrach można założyć dwukrotnie mniejszą amplitudę fluktuacji sztywności zazębienia  $k_{Gv} \cong 0.075 k_{Gc}$  we wzorze (6.10) oraz ok. 2.7-krotnie większą wartość współczynnika tłumienia w zazębieniu w porównaniu z analogicznym współczynnikiem wyznaczonym wg (4.7) dla przekładni o zębach prostych.

Symulacje komputerowe dynamicznego oddziaływania z torem napędowego zestawu kołowego lokomotywy przeprowadzone za pomocą dyskretno-ciągłego modelu omawianego układu napędowego z przekładnią daszkową wykazały powstawanie analogicznych rezonansów parametrycznych jak w przypadku przedstawionym powyżej i zilustrowanych w formie wykresów zamieszczonych na rys. 6.38a i 6.38b, tzn. odpowiednio z trzecią i szóstą postacią skrętnych drgań własnych. Wówczas, w przypadku układu napędowego z przekładnią daszkową najsilniejsze drgania skrętne zaobserwowano przy prędkości jazdy  $v_0=30$  km/h i przyjętej sile uciągu  $F_t=130$  kN oraz przy prędkości  $v_0=146$  km/h i sile  $F_t=70$  kN. Stosując taką samą jak poprzednio konwencję oznaczeń dla obydwu wymienionych wartości prędkości  $v_0$ , na rysunkach 6.39 a i b pokazano przebiegi dynamicznych momentów skręcających przenoszonych przez te same elementy układu napędu zestawu kołowego. Z rysunków tych wynika, że dla zmodyfikowanych parametrów badanego modelu reprezentujących występowanie w układzie napędu zestawu kołowego daszkowej przekładni zębatej uzyskano rezonansowe przebiegi momentu skręcającego przenoszonego przez zazębienie przekładni oraz przez wał silnikowy o znacznie mniejszych amplitudach w porównaniu z analogicznymi przebiegami pokazanymi na rys. 6.38a i 6.38b. Natomiast przebiegi momentów skręcających przenoszonych przez oś zestawu kołowego i wał pośredni o podstawowych składowych drgań wzbudzanych resztkowymi niewywagami kół jezdnych i fluktuacją własności toru podczas jazdy zgodnie z oczekiwaniami pozostały prawie niezmienione. Na podstawie przeprowadzonych obliczeń można stwierdzić, że zastosowanie w badanym układzie napędu zestawu kołowego lokomotywy elektrycznej wzorem innych producentów przekładni daszkowej mogłoby pozwolić na uzyskanie istotnego zmniejszenia oscylacji obciążenia przenoszonego przez zazębienie i osiągnięcie tym samym jego większej trwałości eksploatacyjnej, co stanowiło przedmiot odpowiedniej ekspertyzy przemysłowej opisaną w raporcie [182].



Rys. 6.39 Dynamiczne momenty skręcające przenoszone przez model układu napędu zestawu kołowego lokomotywy EP-09 z przekładnią o zębach daszkowych przy prędkości jazdy (a)  $v_0=30$  km/h i (b)  $v_0=146$  km/h.

Nie pokazane w formie wykresów wyniki symulacji w postaci przebiegów pionowych sił kontaktu koło-szyna, stycznych poślizgów względnych między kołami a szynami oraz w postaci orbit pionowych i poziomych przemieszczeń geometrycznych środków kół jezdnych wskazują na prawie pomijalny wpływ drgań skrętnych samego układu napędowego na dynamiczne oddziaływanie napędowego zestawu kołowego lokomotywy elektrycznej z torem. Jak wynika z [182, 183], przy wszystkich rozpatrywanych prędkościach jazdy  $v_0$  przebiegi te są jakościowo bardzo zbliżone do tych uzyskanych w pracach [179, 181, 186] oraz pokazanych m.in. na rys. 6.20 i 6.21 w przypadkach zestawów kołowych wózków tocznych przy założonych analogicznych źródłach wymuszenia drgań, tj. reszkowymi niewyważaniami zestawów kołowych i fluktuacją własności toru podczas jazdy.

Drugie z wymienionych i będących zarazem przedmiotem rozważań zagadnień dynamicznego oddziaływania układu jezdnego lokomotywy elektrycznej z torem dotyczy badania efektów cieplnych powstających wskutek tarcia w obszarze styku powierzchni tocznych kół i szyn. Celem tych badań jest coraz dokładniejsze poznawanie zjawiska kontaktu między kołami jezdnych pojazdów szynowych a szynami, gdzie mierzalne w praktyce rozkłady pól temperatury w materiale szyny i koła mogłyby być traktowane jako wynikowe wielkości diagnostyczne zawierające szereg istotnych informacji dotyczących rozkładu naprężeń w obszarze styku. W pracy [189] zaproponowano metodykę rozwiązywania tak sformułowanego problemu przy wykorzystaniu dwóch modeli mechanicznych, tj. pokazanego na rys. 6.3 dyskretno-ciągłego „makro-modelu” układu wózek napędny-tor oraz trójwymiarowego „mikro-modelu” fragmentu szyny kolejowej, której górna część główki jest zdyskretyzowana wskutek podziału jej objętości na skończoną liczbę od kilkunastu do kilkudziesięciu tysięcy sześciennych komórek, [123, 124, 189]. Wówczas, wyniki symulacji dynamicznego oddziaływania pojazdu szynowego z torem w zakresie niskich i średnich częstotliwości otrzymane za pomocą „makro-modelu” stanowią sygnał wejściowy do szczegółowego badania zjawisk lepko-sprężysto-termicznych w strefie kontaktu koło-szyna. W celu uzyskania możliwie dokładnego opisu kontaktu koła jezdnego z szyną w „makro-modelu” zastosowano



specjalnie zmodyfikowaną interpretację nieliniowej teorii Kalkera opracowaną przez Kika i Piotrowskiego w pracy [82]. Polega ona na sprowadzaniu do zastępczej elipsy kontaktowej otrzymywanego przy wykorzystaniu niehertzowskiego modelu kontaktu pola powierzchni styku koła z szyną charakteryzujących się rzeczywistymi kształtami geometrycznymi ich powierzchni toczonej. Owe przyporządkowanie przeprowadza się za pomocą uprzednio sporządzonego drogą obliczeń schematu tabelarycznego, w którym podstawowymi parametrami wejściowymi są wzajemne położenie koła i szyny oraz aktualna wartość działającej między nimi siły normalnej. Najważniejszymi wielkościami potrzebnymi do wyznaczania pola rozkładu naprężeń i temperatury w obszarze styku są uzyskane drogą symulacji przy wykorzystaniu „makro-modelu” układu wózek napędny - tor przebiegi sił kontaktowych koło-szyna, wypadkowych poślizgów między kołami a szynami oraz odpowiadające tym poślizgom przebiegi gęstości mocy tarcia powstającego w strefie kontaktu. Zgodnie z [189], poślizg wypadkowy między kołem jezdnym a szyną jest wyrażany w funkcji czasu  $t$  w następującej postaci:

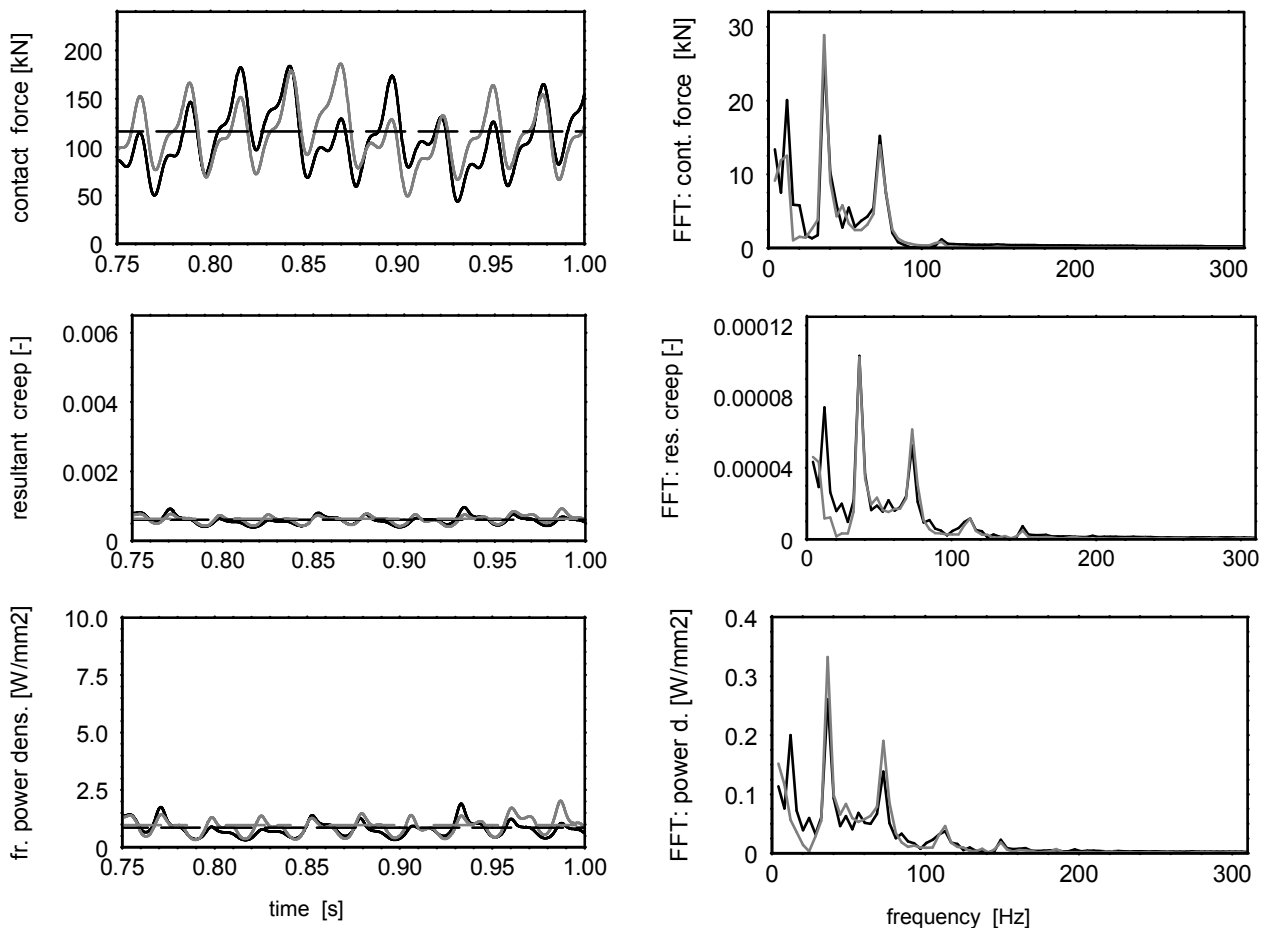
$$v(t) = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t) + a(t)b(t) \cdot v_z^2(t)},$$

gdzie  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $v_z(t)$  są składowymi poślizgu, odpowiednio wzdłużną, poprzeczną i wiertną, zdefiniowanymi za pomocą wzorów (6.3), a  $a(t)b(t)$  oznacza iloczyn długości półosi zastępczej elipsy kontaktowej, do której sprowadza się pole powierzchni styku koła i szyny wyznaczone w [82] przy wykorzystaniu niehertzowskiego modelu kontaktu. Z kolei gęstość mocy tarcia jest definiowana m. in. w [63] jako

$$p_F(t) = -\frac{v_0}{\pi(a(t)b(t))} \left[ T_x(t) \cdot v_x(t) + T_y(t) \cdot v_y(t) + M_z(t) \cdot v_z(t) \right], \quad (6.11)$$

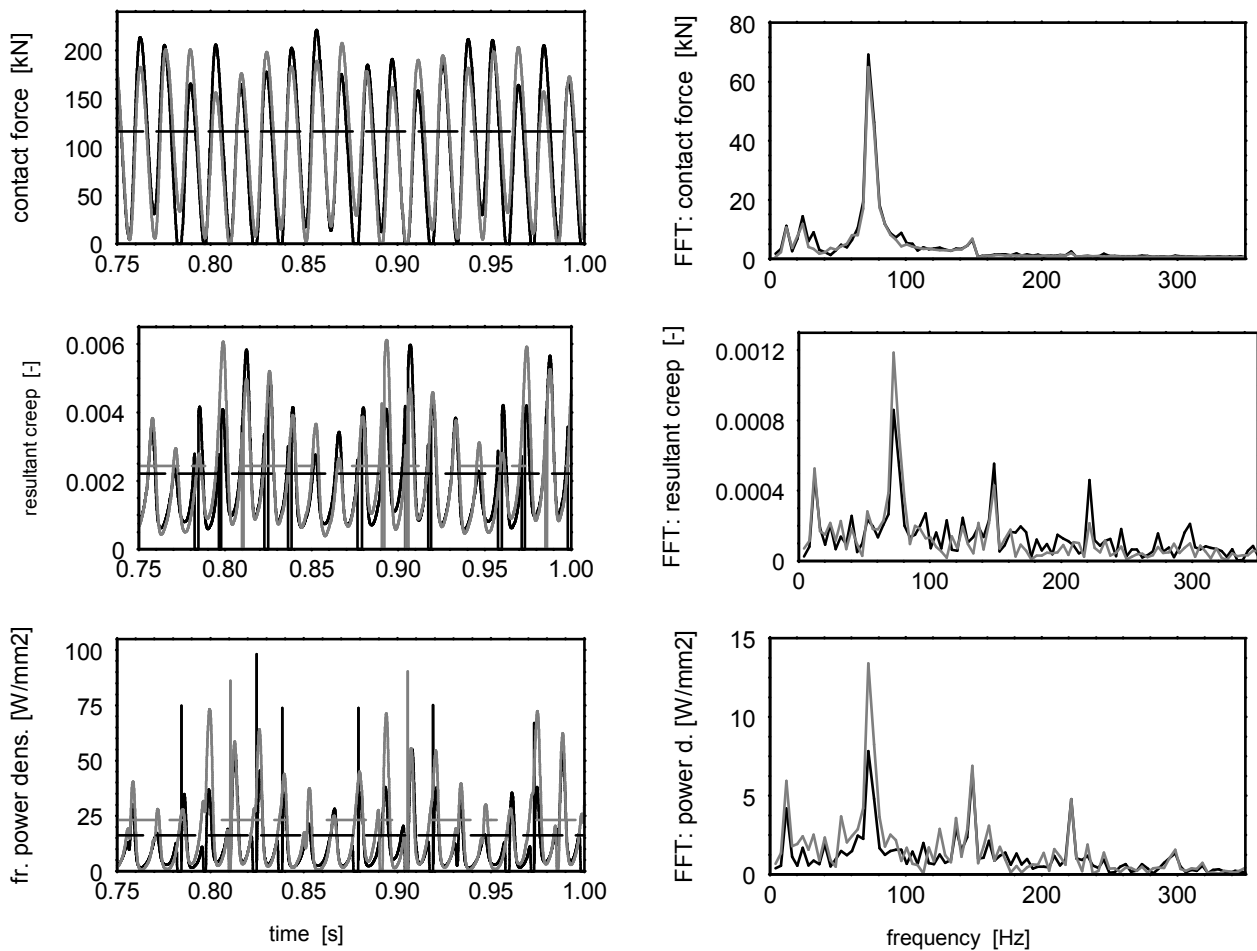
gdzie  $T_x(t)$ ,  $T_y(t)$ ,  $M_z(t)$  oznaczają odpowiednio przebiegi wzdłużnej i poprzecznej stycznej siły kontaktu koło-szyna oraz momentu wiertnego wyznaczone na podstawie odpowiednich algorytmów podanych na przykład w [145, 200] wg nieliniowej teorii Kalkera.

Na rysunkach 6.40, 6.41 i 6.42 przedstawiono wyniki symulacji dynamicznego oddziaływania z prostym torem „twardym” wózka napędzonego otrzymane przy wykorzystaniu dyskretno-ciągłego „makro-modelu” pokazanego na rys. 6.3. Obliczenia wykonano dla parametrów układu jezdnyego wspomnianej powyżej lokomotywy elektrycznej EP-09 ciągnącej w omawianym przypadku 14 wagonów pasażerskich ze stałą prędkością jazdy  $v_0$  i pokonującej wzniesienie o nachyleniu 5‰. Oprócz przyjętych powyżej wymuszeń zewnętrznych wywołanych resztkowymi niewyważeniami kół jezdnych oraz wymuszeń typu parametrycznego powodowanych fluktuacją własności toru podczas jazdy i okresowo-zmiennymi sztywnościami zazębien przekładni zgodnie ze wzorem (6.10), uwzględniono również wymuszenia kinematyczne wzbudzone mieszczącymi się w dopuszczalnych normami wykonawczymi granicach biciami bieżni kół, które opisano w sposób identyczny jak w przypadku wózka toczonego w punkcie 6.5 i zilustrowany na rys. 6.27 i 6.28. Na rys. 6.40, 6.41 i 6.42 przedstawiono w formie wykresów w dziedzinie czasu i częstości przyporządkowane pierwszemu prowadzącemu zestawowi kołowemu wózka będące przedmiotem zainteresowań przebiegi pionowych sił kontaktu koło-szyna, poślizgów wypadkowych  $v(t)$  między powierzchniami toczonej kół i szyn oraz odpowiadające im przebiegi gęstości mocy tarcia  $p_F(t)$ . Na obu tych rysunkach zaznaczono ciągłymi liniami szarymi odpowiedzi przyporządkowane prawemu kołu zestawu, ciągłymi liniami czarnymi odpowiedzi przyporządkowane lewemu kołu zestawu, a przerywanymi liniami szarymi i czarnymi zaznaczono odpowiednie wartości przeciętne. Na rys. 6.40 przedstawiono wyniki uzyskane przy prędkości jazdy  $v_0=80$  km/h, przy której wynikająca z oporów ruchu wartość średniej siły pociągowej przyłożonej do haka lokomotywy wynosi 70 kN. Z kolei na rys. 6.41 i 6.42 zamieszczono analogiczne wyniki otrzymane przy prędkości  $v_0=160$  oraz 200 km/h i przyporządkowanych im średnich sił pociągowych odpowiednio 133 i 180 kN.



Rys. 6.40 Odpowiedź dynamiczna modelu układu wózek napędny - tor przy prędkości jazdy  $v_0=80$  km/h

Na stosunkowo twardym torze przy prędkości jazdy  $v_0=80$  km/h w przypadku przebiegów wszystkich trzech badanych wielkości można stwierdzić dominujący wpływ wymuszenia powodowanego okresowo zmiennymi własnościami toru o podstawowej częstotliwości wymuszenia parametrycznego toru  $v_0/l_s \approx 37$  Hz oraz jej pierwszej harmonicznej  $2v_0/l_s \approx 74$  Hz dla powszechnie stosowanego rozstawu podkładów  $l_s=0.6$  m. Ponadto, jak pokazano na rys. 6.40, istotne znaczenie ma tu również składowa drgań o częstotliwości równej  $\sim 11$  Hz, której wartości amplitud są porównywalne z amplitudami wspomnianego wymuszenia parametrycznego toru wskutek przejeżdżania nad kolejnymi podkładami. Przy prędkości  $v_0=80$  km/h dla nominalnego promienia tocznego kół jezdnych lokomotywy  $r_0=0.625$  m wymieniona częstotliwość odpowiada podwójnej częstotliwości synchronicznej wirowania osi zestawów kołowych  $v_0/(\pi r_0)$  i jest wzbudzana drugimi harmonicznymi założonych przebiegów dopuszczalnego bicia bieżni kół. W omawianym przypadku następuje wyraźna oscylacja pionowych sił kontaktu koło-szyna względem średniej grawitacyjnej wartości statycznej, lecz nie dochodzi do mikro-odrywania się kół jezdnych lokomotywy od szyn. Wówczas, przy średniej sile pociągowej 70 kN występują małe wartości wypadkowych poślizgów między kołami a szynami charakteryzujące się niewielkimi amplitudami oscylacji względem równie małych wartości przeciętnych wyznaczanych jako średnie kwadratowe (RMS). W efekcie otrzymywane są przebiegi gęstości mocy tarcia o niskich wartościach amplitud fluktuacji względem swoich wartości przeciętnych równych  $0.86$  W/mm<sup>2</sup> w przypadku lewego koła oraz  $0.98$  W/mm<sup>2</sup> w przypadku koła prawego.



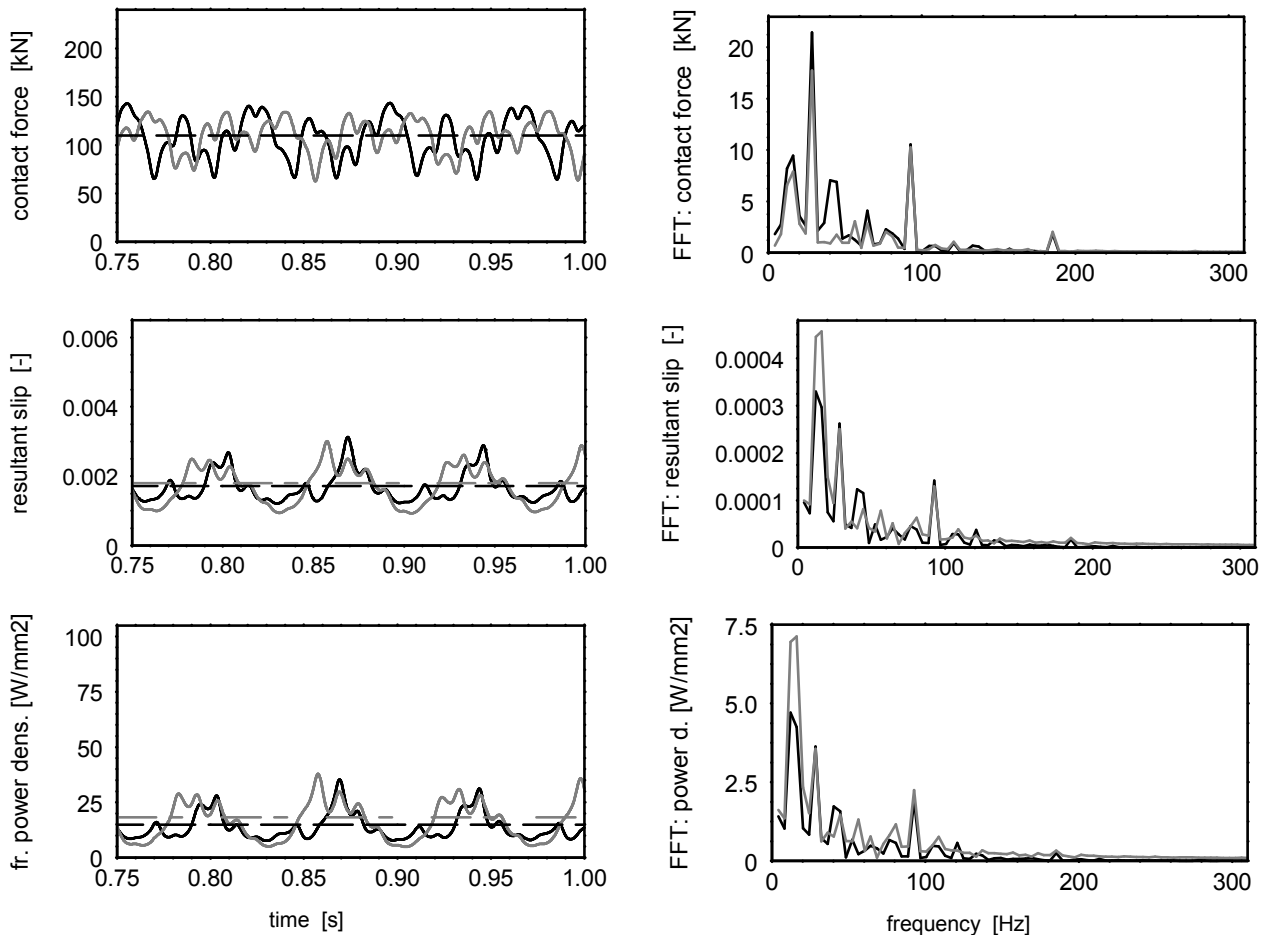
Rys. 6.41 Odpowiedź dynamiczna modelu układu wózek napędny - tor przy prędkości jazdy  $v_0=160$  km/h

Wraz ze wzrostem prędkości jazdy  $v_0$  amplitudy analogicznych odpowiedzi dynamicznych rozpatrywanego układu wózek napędny - tor stają się coraz większe przy narastających również wartościach średnich kwadratowych (RMS) wypadkowych poślizgów koło-szyna i odpowiadających im gęstości mocy tarcia. Największe amplitudy przebiegów badanych wielkości oraz największe wartości średnie kwadratowe otrzymano przy prędkości  $v_0=160$  km/h. Jak wynika z rys. 6.41, odpowiedź dynamiczna badanego układu wózek napędny - tor otrzymana przy dwukrotnie większej prędkości jazdy  $v_0=160$  km/h różni się bardzo istotnie od odpowiedzi uzyskanej w przypadku poprzednim zarówno pod względem ilościowym oraz jakościowym. Przy prędkości  $v_0=160$  km/h pionowe siły kontaktu koło-szyna niezwykle znacząco oscylują wokół średniej wartości statycznej z praktycznie jedną dominującą częstotliwością  $\sim 74$  Hz odpowiadającą podstawowej częstotliwości wymuszenia parametrycznego toru  $v_0/l_s$ . Wartości maksymalne tych sił przekraczają 200 kN, a minimalne osiągają wartość zerową, co wskazuje na występowanie mikro-odrywania się kół jezdnych lokomotywy od szyn. Związane z tym chwilowe znaczne odciążenia dynamiczne kół powodują bardzo silne fluktuacje wypadkowych poślizgów między kołami a szynami charakteryzujące się prawie 10-krotnie większymi w porównaniu z przypadkiem poprzednim wartościami maksymalnymi, rys. 6.41. Wskutek tak silnych oscylacji poślizgów wypadkowych oraz sił kontaktu koło-szyna, zgodnie ze wzorem (6.11) otrzymano szybkozmienne przebiegi gęstości mocy tarcia, których występujące w formie ostrych „pików” maksima lokalne osiągają ok. 20-krotnie większe wartości bliskie  $100$  W/mm<sup>2</sup> oraz średniokwadratowe wartości przeciętne równe  $16.2$  W/mm<sup>2</sup> przyporządkowaną kołu lewemu i  $23.1$  W/mm<sup>2</sup> przyporządkowaną kołu prawemu, tj. odpowiednio  $\sim 19$ - i  $\sim 23.5$ -krotnie większe w porównaniu z przypadkiem  $v_0=80$  km/h. Jak można stwierdzić na podstawie wykresów przedstawionych rys. 6.41, fluktuacje wypadkowych poślizgów między kołami jezdnymi a szynami oraz odpowiadających im gęstości

mocy tarcia charakteryzuje nie tylko dominująca składowa o częstotliwości wymuszenia parametrycznego toru  $v_0/l_s \cong 74$  Hz, tak jak to ma miejsce w przypadku przebiegów pionowych sił kontaktu koło-szyna, lecz również jej pierwsza i druga harmoniczna o częstotliwościach wynoszących odpowiednio  $2v_0/l_s \cong 150$  Hz i  $3v_0/l_s \cong 225$  Hz. Ponadto, z szybkiej transformacji Fouriera (FFT) przebiegów wypadkowych poślizgów między kołami jezdnyymi a szynami oraz przebiegów odpowiadających im gęstości mocy tarcia wynika, że istotny wpływ na te wielkości mają także resztkowe niewywagi statyczne zestawów kołowych oraz w tym wypadku pierwsze harmoniczne założonego dopuszczalnego bicia bieżni kół o częstotliwości  $\sim 11$  Hz odpowiadającej przy prędkości jazdy  $v_0=160$  km/h i wymienionej powyżej wartości nominalnego promienia tocznego kół  $r_0$  synchronicznej częstotliwości wirowania osi zestawów  $v_0/(2\pi r_0)$ .

Przy prędkościach jazdy  $v_0$  większych niż 160 km/h amplitudy badanych przebiegów odpowiedzi dynamicznej nie są już tak duże, jak również przebiegi wypadkowych poślizgów koło-szyna i odpowiadających im gęstości mocy tarcia cechują mniejsze średnie wartości kwadratowe (RMS). Oznacza to, że przy prędkościach jazdy większych od  $v_0=160$  km/h badany układ wózek napędny - tor znajduje się poza strefą możliwego rezonansu wzbudzanego przyłożonymi w kierunku pionowym wymuszeniami spowodowanymi dynamicznym oddziaływaniem pojazdu szynowego z torem. Na przykład odpowiedź dynamiczną uzyskaną przy prędkości jazdy  $v_0=200$  km/h charakteryzują znacznie mniejsze amplitudy przebiegów trzech badanych wielkości w porównaniu z analogicznymi amplitudami otrzymanymi przy prędkości  $v_0=160$  km/h. Amplitudy oscylacji pionowych sił kontaktu koło-szyna przy prędkości  $v_0=200$  km/h są nawet mniejsze niż przy  $v_0=80$  km/h, gdzie wartości maksymalne nie przekraczają 150 kN, a minimalne są nie mniejsze niż 60 kN, rys. 6.42. Z szybkiej transformacji Fouriera (FFT) przebiegów tych sił wynika, że w przeciwieństwie do przedstawionych na rys. 6.40 i 6.41 przypadków prędkości  $v_0=80$  i 160 km/h drgania rozpatrywanego układu wózek napędny - tor zostają wzbudzone w znacznie mniejszym stopniu fluktuacją własności toru podczas jazdy z częstotliwością  $v_0/l_s$  równą przy  $v_0=200$  km/h ok. 92.6 Hz, lecz przede wszystkim są wymuszane kinematycznie przez założone dopuszczalne bicia bieżni kół o trzech podstawowych składowych o częstotliwościach równych  $\sim 14.2$ ,  $\sim 28.3$  i  $\sim 42.5$  Hz odpowiadających w przybliżeniu pierwszej harmonicznej  $v_0/(2\pi r_0)$ , drugiej harmonicznej  $v_0/(\pi r_0)$  i trzeciej harmonicznej  $3v_0/(2\pi r_0)$  założonych przebiegów niekołowości, gdzie składową harmoniczną drugą można uznać za podstawową. Mimo istotnie większej siły pociągowej równej 180 kN występującej przy prędkości  $v_0=200$  km/h i przy opisanych powyżej znacznie mniejszych odciążeniach i dociążeniach dynamicznych kół jezdnych wózka otrzymano ok. 2-krotnie mniejsze niż przy  $v_0=160$  km/h amplitudy fluktuacji wypadkowych poślizgów między kołami a szynami względem swoich przeciętnych wartości średniokwadratowych. W efekcie przy  $v_0=200$  km/h uzyskano zupełnie odmienne przebiegi gęstości mocy tarcia w porównaniu z przypadkiem prędkości  $v_0=160$  km/h. Charakteryzują je stosunkowo łagodne fluktuacje względem swoich przeciętnych wartości średniokwadratowych z dominującą składową o synchronicznej częstotliwości  $\sim 14.2$  Hz wirowania osi zestawów kołowych wzbudzaną resztkowymi niewywagami tych zestawów i założonymi przebiegami dopuszczalnego bicia bieżni kół jezdnych. Podobnie jak w przypadku przebiegów pionowych sił kontaktowych koło-szyna oraz przebiegów wypadkowych poślizgów, składowa o częstotliwości parametrycznego wymuszenia toru  $v_0/l_s$  ma tu znaczenie drugorzędne. Przy  $v_0=200$  km/h wartości chwilowych maksimów tych fluktuacji nie przekraczają  $40$  W/mm<sup>2</sup>, a przeciętne wartości średniokwadratowe gęstości mocy tarcia są również mniejsze niż przy  $v_0=160$  km/h i wynoszą  $14.9$  W/mm<sup>2</sup> przyporządkowaną kołu lewemu oraz  $18.3$  W/mm<sup>2</sup> przyporządkowaną kołu prawemu, jak pokazano na rys. 6.42.

Analogiczne odpowiedzi dynamiczne przyporządkowane drugiemu zestawowi kołowemu rozpatrywanego wózka napędnego lokomotywy elektrycznej oraz wzajemne różnice odpowiadających sobie wyników uzyskanych przy trzech wymienionych prędkości jazdy  $v_0$  są ilościowo i jakościowo podobne do tych przedstawionych w formie wykresów zamieszczonych na



Rys. 6.42 Odpowiedź dynamiczna modelu układu wózek napędny - tor przy prędkości jazdy  $v_0=200$  km/h

rys. 6.40, 6.41 i 6.42. Podobnie jak w przykładzie poprzednim, w omawianych przypadkach prędkości jazdy lokomotywy charakter oddziaływania kół jezdnych z szynami ma mało znaczący wpływ na odpowiedź dynamiczną w układach napędu obu zestawów kołowych w postaci drgań skrętnych. Otrzymane przebiegi momentów skręcających przenoszonych przez zazębienia przekładni, wały pośrednie, wały silnikowe i osie zestawów kołowych na odcinkach między kołami jezdny są jakościowo podobne do tych pokazanych na rys. 6.38 i dlatego nie zostały przedstawione w formie wykresów.

Wartym szczególnego podkreślenia jest fakt, iż zgodnie ze wzorem (6.11) kierując się kryteriami quasi-statycznymi przy większej prędkości jazdy i związanymi z nią większymi poślizgami między kołami a szynami wywoływanymi głównie siłą pociągową wynikającą ze zwiększonych wówczas oporów ruchu należałoby oczekiwać wyższych przeciętnych wartości gęstości mocy tarcia powodujących szybsze zużywanie się powierzchni tocnych. Okazuje się jednak, że uwzględniony typowo dynamiczny charakter oddziaływania układu jezdnego pojazdu szynowego z torem kolejowym przeczy wymienionej prawidłowości wynikającej z podejścia quasi-statycznego stosowanego często w praktyce inżynierskiej. Rezultatów obliczeń przedstawionych na rysunkach 6.40, 6.41 i 6.42 również nie można byłoby otrzymać za pomocą tradycyjnego podejścia dynamicznego do zakresu niskich częstotliwości  $0 \div 20$  Hz przy wykorzystaniu modelu mechanicznego układu pojazd szynowy - tor charakteryzującego się sztywnym torem i sztywnymi zestawami kołowymi, na przykład w [144], ponieważ strefy możliwych rezonansów, przy których występują silne fluktuacje sił kontaktowych i poślizgów między kołami a szynami, w przypadku parametrów wynikających z typowych rozwiązań konstrukcyjnych konwencjonalnych torów kolejowych i układów jezdnych pojazdów szynowych występują zazwyczaj w zakresie średnich częstotliwości oddziaływania  $20 \div 500$  Hz. W związku z powyższym należy stwierdzić, iż

zastosowanie proponowanych dyskretno-ciągłych strukturalnych modeli mechanicznych wózków kolejowych o odkształcalnych giętno-skrętnie zestawach kołowych oraz funkcjonalnego dyskretnego modelu toru o parametrach identyfikowanych doświadczalnie w myśl założeń podanych w punkcie 6.1 daje możliwość znacznie dokładniejszego badania zjawisk towarzyszących oddziaływaniu dynamicznemu pojazdu szynowego z torem i powstającego w efekcie zużywania się powierzchni tocznych kół jezdnych i szyn.

Przedstawione na rys. 6.40, 6.41 i 6.42 przebiegi pionowych sił kontaktowych koło-szyna oraz przebiegi składowych poślizgu wypadkowego  $v_x(t)$ ,  $v_y(t)$ ,  $v_z(t)$  są wykorzystywane jako dane wejściowe do szczegółowej analizy kontaktowej wykonywanej za pomocą wymienionej metody opracowanej przez Kika i Piotrowskiego, [82], umożliwiającej wyznaczenie rozkładów pól naprężeń normalnych i stycznych oraz rozkładów gęstości mocy tarcia w obszarach styku. Otrzymywane w ten sposób rozkłady naprężeń mogą służyć do badania efektów zmęzeniowych i odkształceń plastycznych na powierzchniach tocznych kół i szyn oraz do prognozowania zużycia materiału. Z kolei rozkłady gęstości mocy tarcia posłużyły jako sygnał wejściowy do analizy termodynamicznej przy wykorzystaniu wspomnianego powyżej „mikro-modelu” odcinka szyny kolejowej o zdyskretyzowanej bieżni. Uzyskane w omawianym przypadku przy prędkości jazdy lokomotywy  $v_0=160$  km/h wyniki szczegółowej analizy kontaktowej w formie rozkładów pól naprężeń normalnych i stycznych oraz gęstości mocy tarcia, jak również odpowiadające im wyniki analizy termodynamicznej w formie rozkładu pól temperatury w szynie przedstawiono w pracy [189].

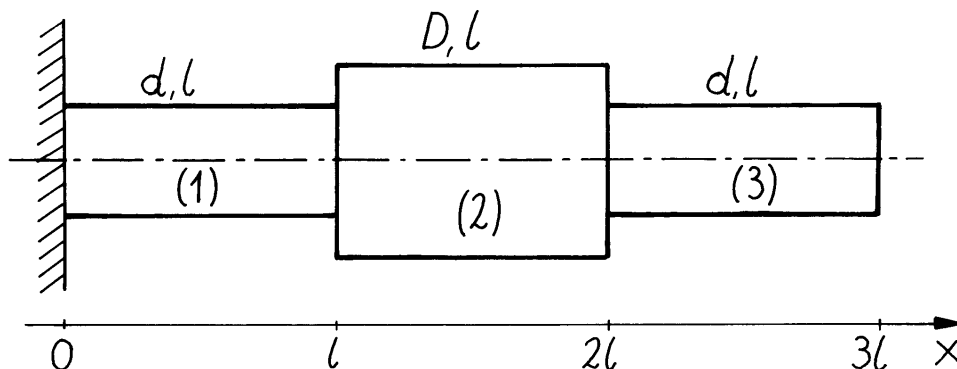
## 7. Zakończenie

W pracy przedstawiono metodykę dyskretno-ciągłego (hybrydowego) modelowania i analizy drgań wybranych liniowych i nieliniowych układów mechanicznych. Tę metodykę ilustrowano licznymi przykładami porównując niektóre z uzyskanych wyników z wynikami pomiarów przeprowadzonych na obiektach rzeczywistych. Rozpatrywano liniowe, nieliniowe i parametryczne małe drgania giętne, skrętne, translacyjne, giętno-skrętne i giętno-skrętno-osiove szczególnie odpowiedzialnych elementów maszyn, urządzeń, konstrukcji i układów jezdnych pojazdów, takich jak: wały, osie, wirniki, wsporniki, prowadnice i inne. Elementy te charakteryzują się stosunkowo prostymi kształtami geometrycznymi, dzięki czemu w zadanych zakresach częstości, z dostateczną do celów technicznych dokładnością można je modelować w sposób jednowymiarowy przy wykorzystaniu lepko-sprężystych makroelementów ciągłych. Zastosowano tu identyczne podejście jak w przypadku strukturalnego modelowania za pomocą klasycznego sformułowania metodą elementów skończonych osiągając ten sam poziom błędów identyfikacji parametrów wyjściowego modelu fizycznego badanego obiektu, przy czym ruch przekrojów poprzecznych L-SMC jest opisany w sposób ścisły – analityczny w odróżnieniu od przybliżonego opisu ruchu analogicznych elementów belkowych, czy prętowych. Dzięki temu istnieje możliwość uzyskiwania jeszcze dokładniejszych wyników przy dużej stabilności i efektywności numerycznej przeprowadzanych obliczeń. Przy wykorzystaniu zaproponowanego w pracy podejścia można badać drgania złożonych układów mechanicznych, a potwierdzona eksperymentem wiarygodność uzyskiwanych wyników pozwala na stosowanie tej metodyki do potrzeb praktycznych w środowiskach inżynierskich. Istnieje jednak godny uwagi problem granic stosowalności podejścia jednowymiarowego do analizy małych drgań giętnych i skrętnych belek i wałów przy powszechnym przyjmowaniu zasady sztywnych przekrojów oraz zasady prostoliniowego elementu. Dlatego wydaje się być celowym przeprowadzenie odpowiedniego porównania wyników uzyskiwanych za pomocą ciągłego modelu jednowymiarowego z analogicznymi wynikami otrzymywanymi przy wykorzystaniu modelu trójwymiarowego.

### 7.1 Porównanie wyników analizy drgań własnych uzyskanych za pomocą jedno- i trójwymiarowego modelu wspornikowej belki wielostopniowej

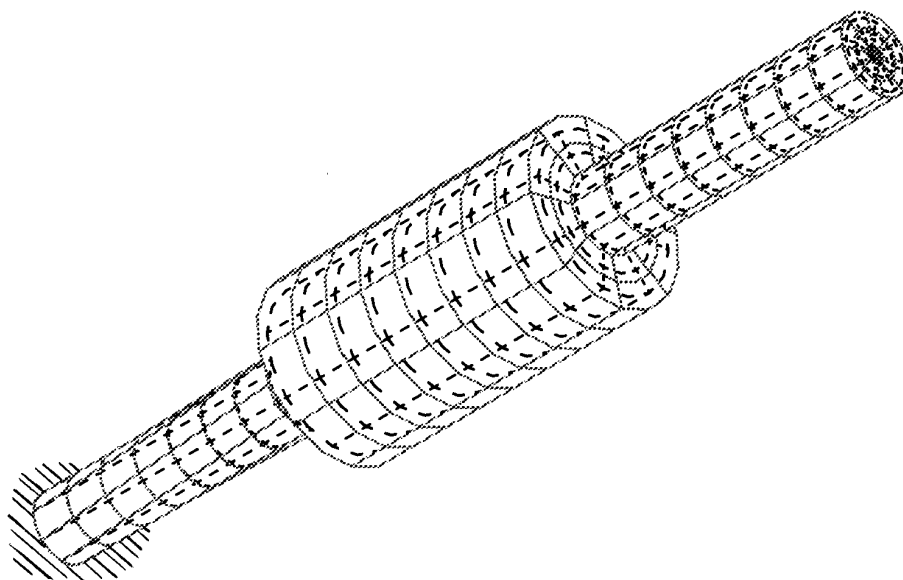
Przedmiotem porównania są wyniki analizy skrętnych i giętnych drgań własnych nietłumionych uzyskane za pomocą jedno- i trójwymiarowego modelu w przypadku trójstopniowej stalowej belki wspornikowej o przekroju kołowo-symetrycznym i długości całkowitej  $3l$ , gdzie  $l=1.0$  m oznacza długość jednego stopnia (segmentu). Model jednowymiarowy zbudowano przy wykorzystaniu trzech odkształcalnych giętnie i skrętnie makroelementów belkowych, utwierdzając w sposób sztywny lewy przekrój skrajny pierwszego makroelementu oraz traktując jako swobodny prawy przekrój skrajny makroelementu trzeciego, jak pokazano na rysunku 7.1. Do odkształceń giętnych wykorzystano trzy teorie zginania, tj. teorię belki Bernoulliego-Eulera, Rayleigha i Timoshenki, przyjmując jako równania ruchu przekrojów poprzecznych makroelementów odpowiednio równania (2.2), (2.3) i (2.4). Z kolei do odkształceń skrętnych jako równanie ruchu przyjęto jednorodne równanie hiperboliczne typu falowego (2.1) z pominięciem tłumienia wewnętrznego. Jako warunki brzegowe lewego przekroju skrajnego pierwszego makroelementu o współrzędnej  $x=0$ , rys. 7.1, przyjęto zerowe przemieszczenia i kąt ugięcia, a dla prawego przekroju skrajnego trzeciego makroelementu o współrzędnej  $x=3l$  przyjęto zerową siłę poprzeczną oraz zerowe momenty zginający i skręcający. Podobnie jak w przykładach przedstawionych poprzednio, w przypadku granicznych przekrojów skrajnych makroelementów o współrzędnych  $x=l$  i  $x=2l$  przyjęto geometryczne warunki zgodności przemieszczeń translacyjnych i kątów ugięcia (5.13 a,b), względnie (5.14 a,b), warunki zgodności kątów skręcenia (3.2a) oraz dynamiczne warunki równowagi sił poprzecznych typu (2.7), momentów gnących (2.8) i skręcających typu (2.9).

Analizę drgań własnych przeprowadzono stosując jako rozwiązanie równań ruchu metodę rozdzielania zmiennych (3.7) prowadząca do analitycznych postaci funkcji własnych odpowiednio (3.11) w przypadku zginania i (3.9) w przypadku skręcania. W rezultacie wyznaczanie częstości i funkcji własnych sprowadza się do rozwiązywania odpowiednich równań charakterystycznych w postaci (3.22).



Rys. 7.1 Jednowymiarowy model ciągły trójstopniowej belki wspornikowej

Analogiczny model trójwymiarowy pokazanej na rys. 7.1 trójstopniowej belki zbudowano przy wykorzystaniu metody elementów skończonych stosując 20-węzłowe elementy przestrzenne o trzech translacyjnych stopniach swobody w węzle, co opisano w opracowaniu [133]. W efekcie został uzyskany model dyskretny o 8700 stopniach swobody pokazany na rysunku 7.2. Zagadnienie własne rozwiązano standardowym programem MES-ADINA metodą iteracyjną z wykorzystaniem łańcuchów Sturm'a do poszukiwania kolejnych pierwiastków równania charakterystycznego.



Rys. 7.2 Trójwymiarowy model dyskretny trójstopniowej belki wspornikowej, [133]

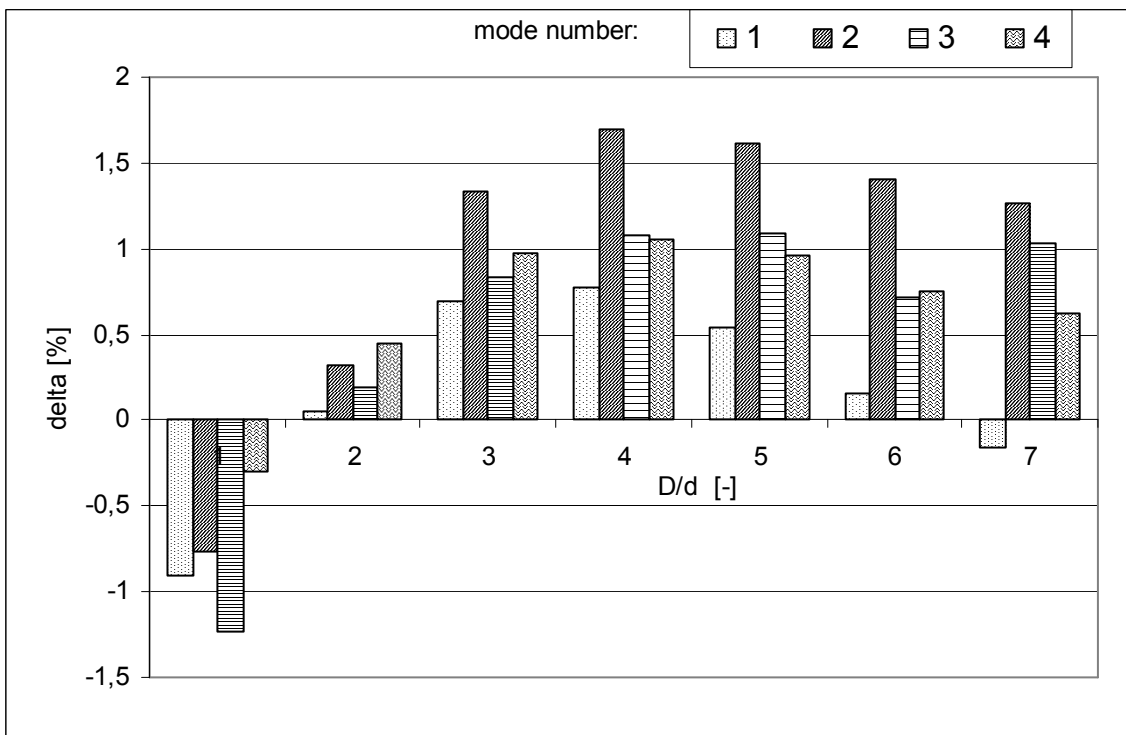
W celu możliwie dokładnego zbadania wpływu deplanacji przekrojów poprzecznych belki przy zginaniu, szczególnie w przekrojach poprzecznych o współrzędnych  $x=l$  i  $x=2l$  odpowiadających przejściom stopniowym, rys. 7.1, oraz zbadania wpływu uginania się promieniowych linii przekrojów poprzecznych przy skręcaniu (co stanowi zaprzeczenie zasady prostoliniowego elementu) rozpatrzono siedem wariantów stosunków średnic poszczególnych stopni belki spełniając następujący warunek:



$$Var_i = \frac{3l}{2d_i + D_i} = \text{const} = 10, \quad i = 1, 2, \dots, 7, \quad (7.1)$$

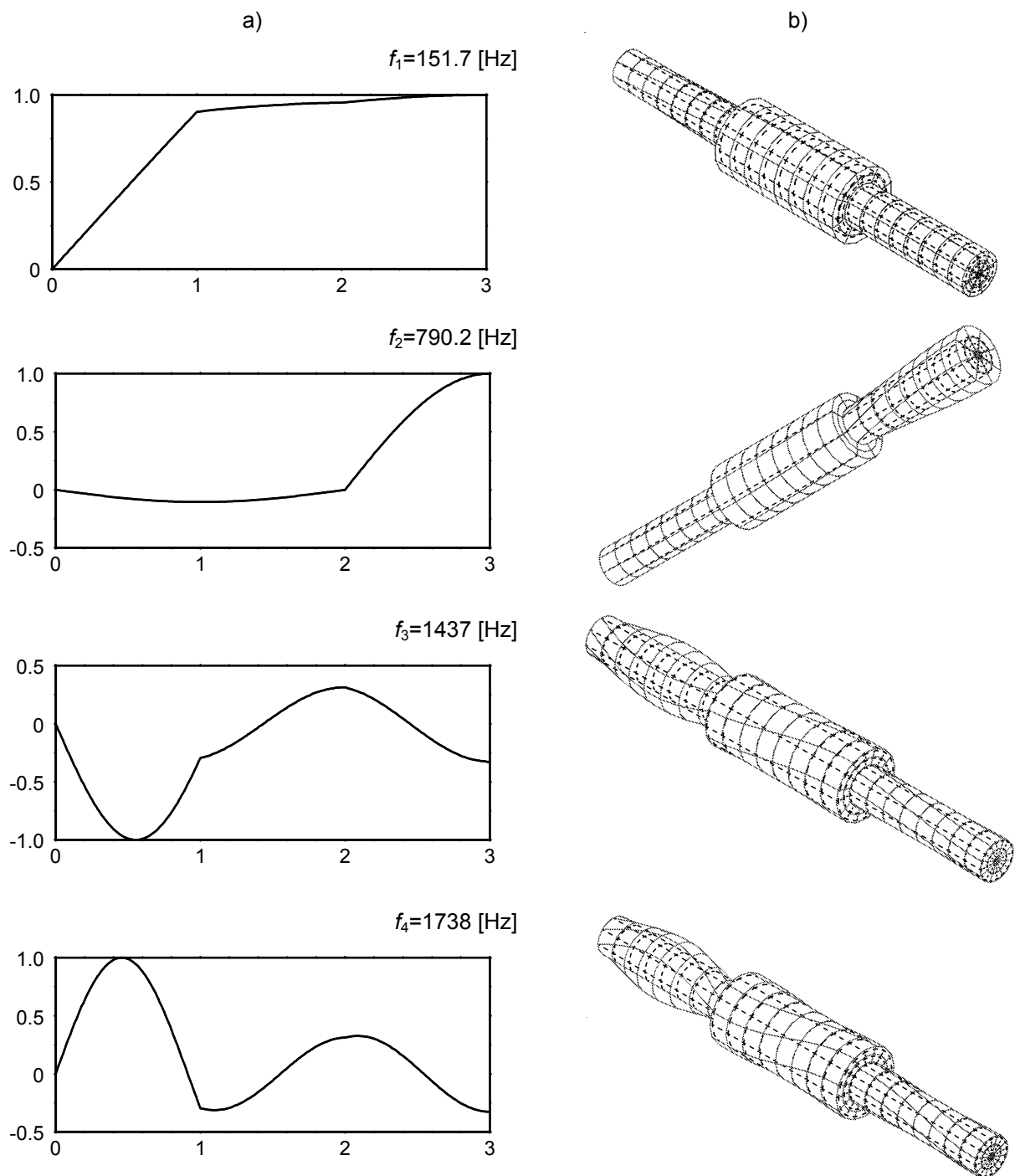
gdzie  $d_i$  oznacza taką samą średnicę pierwszego i trzeciego stopnia belki, a  $D_i$  jest średnicą jej stopnia drugiego, jak pokazano na rys. 7.1. Stałą wartość powyższego stosunku  $Var_i$  całkowitej długości belki stopniowej do jej zastępczej średnicy przyjęto równą 10 zgodnie z postulowanym w [74] stosunkiem długości do średnicy belki dostatecznie smukłej by móc stosować do niej teorię zginania Bernoulliego-Eulera. Rozpatrzono następujące wartości stosunków średnic  $D_i/d_i$ : 1.0, 1.33, 1.75, 2.3, 3.0, 4.0 i 5.5.

Za pomocą obydwu modeli badano drgania własne w zakresie częstotliwości 0÷2000 Hz porównując odpowiadające sobie częstości oraz funkcje własne. W przypadku porównywania wyników analizy drgań skrętnych uzyskano bardzo niewielkie różnice względnych częstości drgań własnych odniesione do wartości częstości otrzymanych za pomocą modelu trójwymiarowego. Przedstawiono je na rysunku 7.3 jako funkcję numeru wariantu stosunku średnic  $D_i/d_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 7$ , dla kolejnych czterech postaci drgań. Odpowiadające tym postaciom drgań funkcje własne uzyskane za pomocą modelu trój- i jednowymiarowego pokazano na rysunku 7.4 a i b przy przykładowym stosunku średnic  $D_3/d_3=1.75$ . Z przedstawionego na rys. 7.3 diagramu wynika, że największa różnica względna wynosi ~1.7% w przypadku drugiej postaci skrętnych drgań własnych belki stopniowej o częstotliwości 787.6 Hz przy stosunku średnic  $D_4/d_4=2.3$ .



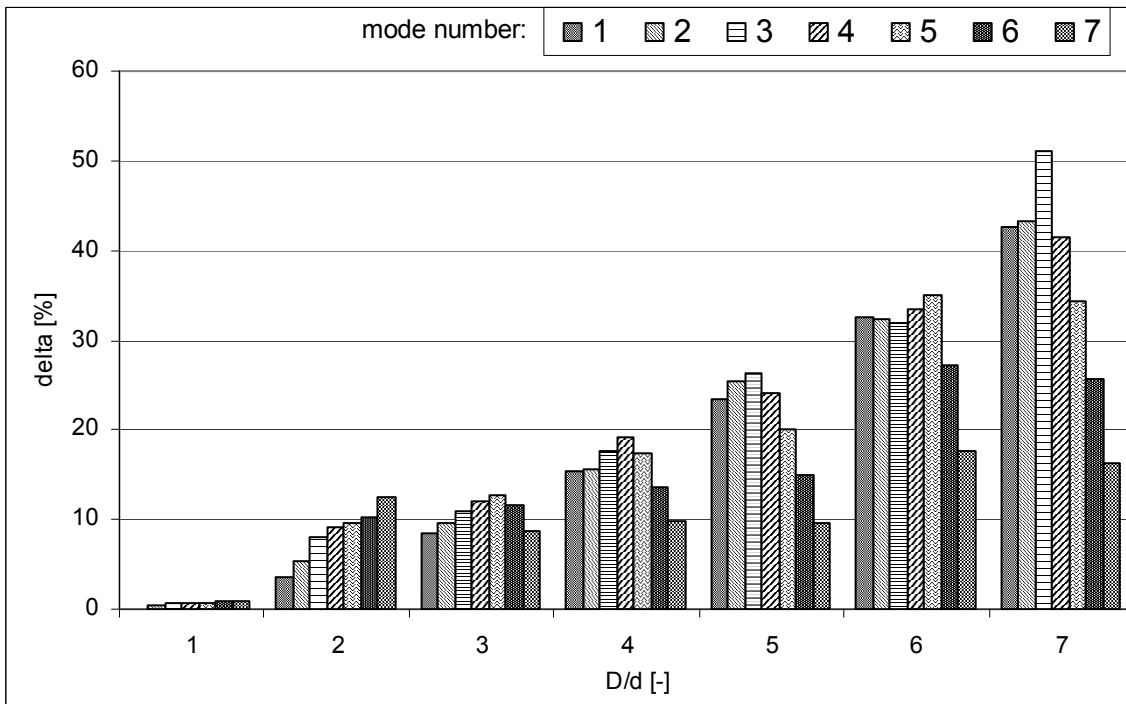
Rys. 7.3 Różnice względne częstości skrętnych drgań własnych belki trójstopniowej

Wartości względnych różnic częstości własnych drgań giętnych rozpatrywanej belki w bardzo istotny sposób zależą od przyjętej teorii zginania. Przedstawiono je w sposób analogiczny jak w przypadku drgań skrętnych, czyli w postaci funkcji numeru wariantu stosunku średnic  $D_i/d_i$ ,  $i=1, 2, \dots, 7$ , oraz numeru postaci drgań, na rysunkach 7.5, 7.6 i 7.7 odpowiednio przy zastosowaniu teorii belki Bernoulliego-Eulera, Rayleigha i Timoshenki. Przyporządkowane kolejnym pięciu pierwszym postaciom drgań funkcje własne uzyskane za pomocą modelu trój- i jednowymiarowego pokazano na rysunku 7.8 a i b przy przykładowym stosunku średnic  $D_5/d_5=3.0$ . Z diagramów przedstawionych na rysunkach 7.5, 7.6 i 7.7 wynika, że w przypadku pierwszej postaci we wszystkich przyjętych wariantach stosunku średnic  $D_i/d_i$  w granicach częstotliwości 3.9÷24.8 Hz

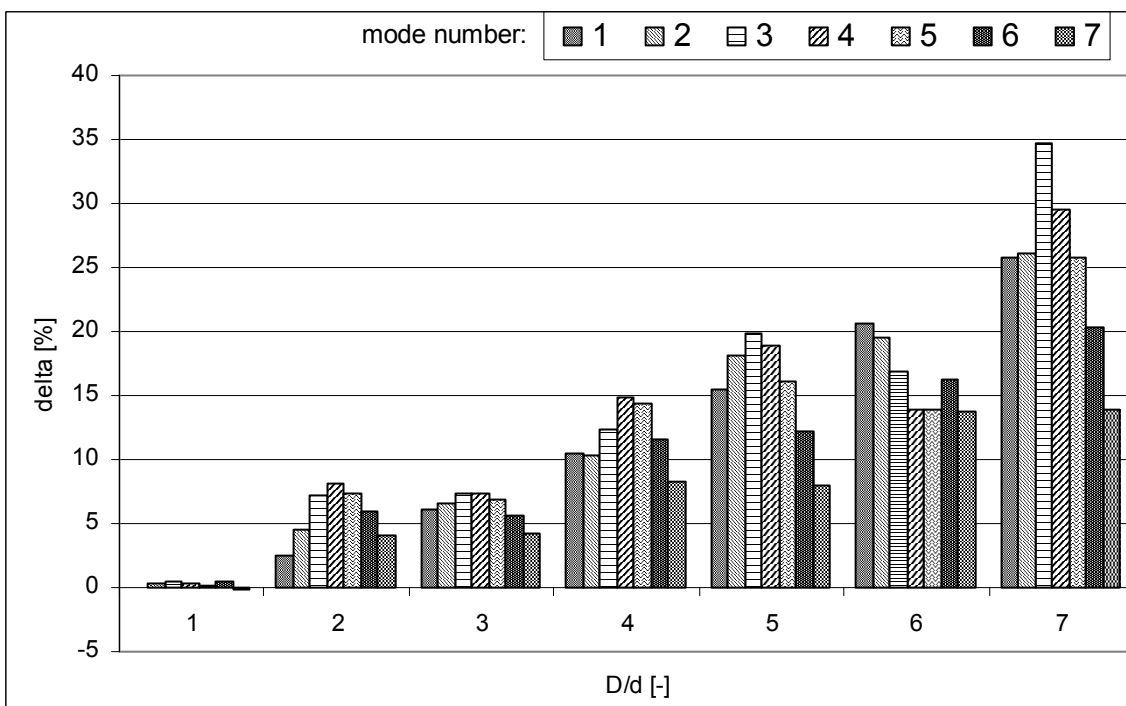


Rys. 7.4 Funkcje własne czterech pierwszych postaci własnych drgań skrętnych belki trójstopniowej uzyskane za pomocą modelu jednowymiarowego (a) i trójwymiarowego, [133], (b) dla wariantu  $D_3/d_3=1.75$ .

stosując trzy teorie zginania belki uzyskano różnice względne częstości drgań własnych nie przekraczające 1% w porównaniu z częstościami otrzymanymi przy wykorzystaniu modelu trójwymiarowego. W przypadku wyższych postaci własnych drgań giętnych uzyskano znacznie większe różnice częstości lecz tylko przy zastosowaniu teorii belki Bernoulliego-Eulera i Rayleigha. Już w przypadku drugiej i trzeciej postaci występujących dla rozpatrywanych wariantów stosunków średnic  $D_i/d_i$ ,  $i=1,2,\dots,7$ , w zakresach częstości odpowiednio  $42.2\div 147.2$  Hz i  $95.7\div 389.6$  Hz różnice te przekraczają 10% przy zastosowaniu teorii belki Bernoulliego-Eulera i 5% przy zastosowaniu teorii belki Rayleigha. Natomiast w przypadku czwartej postaci drgań w

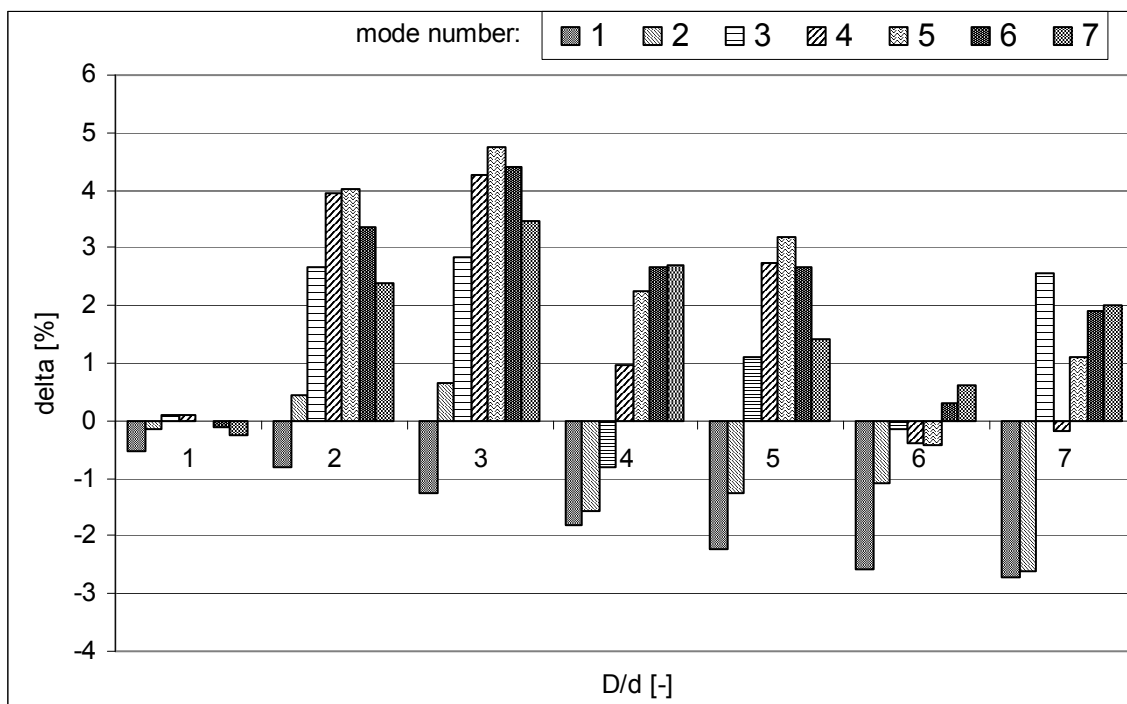


Rys. 7.5 Różnice względne częstości giętnych drgań własnych belki trójstopniowej przy wykorzystaniu teorii zginania Bernoulliego-Eulera



Rys. 7.6 Różnice względne częstości giętnych drgań własnych belki trójstopniowej przy wykorzystaniu teorii zginania Rayleigha

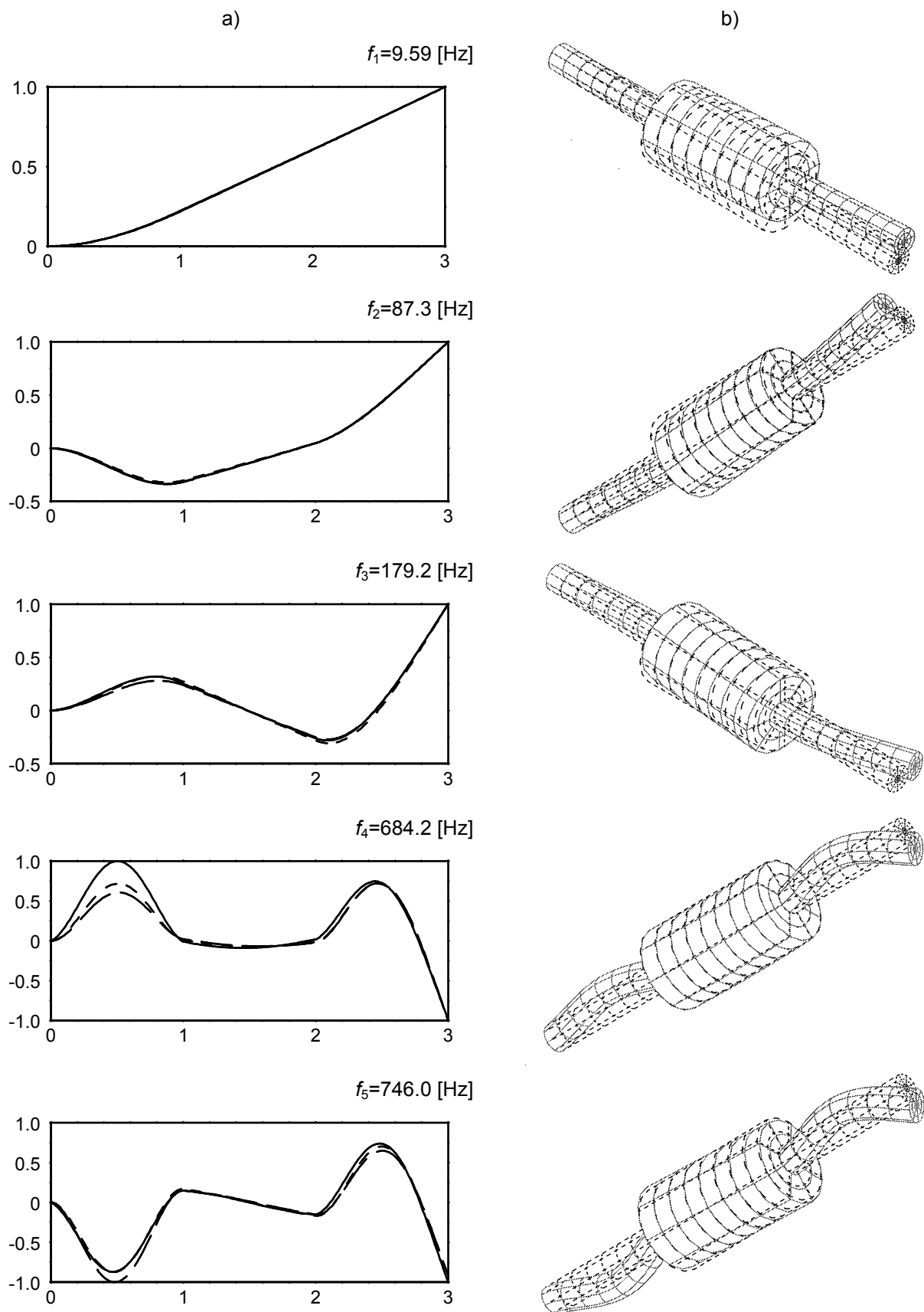
zakresie częstości 499.6÷750.2 Hz różnice te dochodzą do 20% i 15% odpowiednio przy zastosowaniu teorii zginania Bernoulliego-Eulera i Rayleigha, szczególnie dla czwartego i piątego wariantu stosunku średnic  $D_i/d_i$  wynoszącego 2.3 i 3.0, rys. 7.5 i 7.6. Z kolei w przypadku piątej postaci drgań w zakresie częstości 518.0÷1110.0 Hz dla pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego wariantu stosunku średnic  $D_i/d_i$  różnice te przekraczają 25% przy zastosowaniu teorii zginania Bernoulliego-Eulera oraz dochodzą do 20% w przypadku zastosowania teorii Rayleigha. Jednak największe różnice względne częstości własnych drgań giętnych jednowymiarowego



Rys. 7.7 Różnice względne częstości giętnych drgań własnych belki trójstopniowej przy wykorzystaniu teorii zginania Timoshenki

modelu rozpatrywanej belki w stosunku do modelu trójwymiarowego występują w przypadku najwyższych z rozpatrywanych, tj. szóstej i siódmej postaci drgań w zakresach częstotliwości odpowiednio 1286÷1543 Hz i 1309÷2007 Hz, przy określonych wariantach stosunków średnic  $D_i/d_i$ ,  $i=1,2,\dots,7$ . Wówczas w przypadku szóstej postaci drgań różnice te mieszczą się w granicach 32÷36% przy zastosowaniu teorii belki Bernoulliego-Eulera w przypadku wariantów stosunku średnic od pierwszego do piątego oraz sięgają 20% przy zastosowaniu teorii belki Rayleigha dla pierwszego i drugiego wariantu stosunku średnic wynoszących odpowiednio 1.0 i 1.33. Natomiast w przypadku postaci siódmej teoria belki Bernoulliego-Eulera daje różnice względne częstości przekraczające 40% dla pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego wariantu stosunku średnic  $D_i/d_i$  osiągając maksimum równe 51% dla  $D_3/d_3=1.75$ . Wówczas, stosując teorię belki Rayleigha otrzymywana jest także maksymalna wartość różnicy częstości równa ~34%, a w pozostałych przypadkach stosunków średnic mieści się ona w granicach 20÷30%, rys. 7.5 i 7.6.

Przedstawione powyżej wyniki porównania potwierdziły znane informacje literaturowe dotyczące granic stosowalności teorii zginania Bernoulliego-Eulera do belek o określonej smukłości, na przykład w [57, 74]. W omawianym przypadku trójstopniowej belki wspornikowej o uśrednionym stosunku jej całkowitej długości do średnicy wg wzoru (7.1) równym umownej granicy smukłości 10 elementarna teoria belki może być stosowana jedynie w przypadku pierwszej postaci drgań, gdyż w przypadku postaci drugiej, trzeciej i wyższych daje wyniki obarczone zbyt dużym błędem w odniesieniu do modelu trójwymiarowego traktowanego tutaj jako bardziej dokładny. Niewiele lepsze wyniki przy rozpatrywanej mało smukłej belce uzyskano stosując teorię zginania Rayleigha, za pomocą której otrzymano wprawdzie znacząco mniejsze różnice częstości niż w przypadku teorii Bernoulliego-Eulera, lecz mimo to w porównaniu z wynikami analizy giętnych drgań własnych uzyskanymi za pomocą modelu trójwymiarowego różnice te są zbyt duże z punktu widzenia wymogów zastosowań praktycznych. Natomiast bardzo niewielkie różnice częstości giętnych drgań własnych omawianej belki w odniesieniu do traktowanego jako pewnego rodzaju wzorca modelu trójwymiarowego uzyskano stosując teorię zginania Timoshenki. Jak wynika z rys. 7.7, największe rozbieżności wystąpiły w przypadku drugiej i trzeciej postaci drgań osiągając wartości odpowiednio 4% dla wariantu stosunku średnic  $D_i/d_i$  czwartego i piątego oraz



Rys. 7.8 Funkcje własne pięciu pierwszych postaci własnych drgań giętnych belki trójstopniowej uzyskane za pomocą modelu jednowymiarowego (a) i trójwymiarowego, [133], (b) dla wariantu  $D_3/d_3=3.0$  wg teorii belki: Bernoulliego-Eulera (-----), Rayleigha (— — —) i Timoshenki (————)

niecałe 5% dla wariantu  $D_i/d_i$  piątego i szóstego. W przypadkach pozostałych rozpatrywanych postaci drgań analogiczne różnice częstości są znacznie mniejsze. Należy przy tym zauważyć, iż względne różnice częstości nie przekraczające 5% mogą mieścić się w granicach błędu obliczeniowego przy wykorzystaniu modelu dyskretnego o dużej liczbie stopni swobody zbudowanego metodą elementów skończonych, którego mimo swojej trójwymiarowości nie można uznawać za absolutnie dokładnego.

Analiza drgań własnych przeprowadzona za pomocą modelu jedno- i trójwymiarowego omawianej belki wspornikowej wykazała, że niezależnie od otrzymanej różnicy względnej częstości własnych drgań skrętnych i giętnych uzyskano niemal identyczne funkcje własne przyporządkowane odpowiadającym sobie postaciom drgań, które to w przypadku zastosowanych trzech teorii zginania niemal pokrywają się wzajemnie, co potwierdzają wykresy zamieszczone na rysunkach 7.4 i 7.8. Ponadto należy zauważyć, iż największe różnice częstości w przypadku kolejnych postaci giętnych drgań własnych występują przy różnych, a praktycznie przy wszystkich wariantach stosunku średnic  $D_i/d_i$ . Oznacza to, że w badanym zakresie częstotliwości drgań 0÷2000 Hz na otrzymane różnice podstawowy wpływ ma efekt ścinania przekrojów belki, a nie deplanacja przekrojów skrajnych makroelementów belkowych odpowiadających obu przejściom stopniowym o współrzędnych  $x=l$  i  $x=2l$ , rys. 7.1.

Na podstawie przedstawionego powyżej porównania częstości i funkcji własnych drgań skrętnych i giętnych trójstopniowej belki wspornikowej otrzymanych przy wykorzystaniu jednowymiarowego modelu ciągłego i trójwymiarowego modelu dyskretnego można stwierdzić, iż do analizy drgań skrętnych podejście jednowymiarowe można stosować niezależnie od smukłości belki w całym rozpatrywanym zakresie częstości będącym zarazem zazwyczaj najważniejszym z punktu widzenia zainteresowań technicznych. Natomiast przy analizie drgań giętnych należy właściwie dobierać teorię zginania do smukłości badanej belki lub wału w zadanym zakresie częstości drgań. Zgodnie z powszechnie znanymi informacjami literaturowymi, w przypadku dostatecznie smukłych belek przy najniższych postaciach drgań wpływ ścinania przekrojów okazuje się być mało znaczący i wówczas stosowanie teorii zginania Bernoulliego-Eulera lub tym bardziej Rayleigha wydaje się być dostatecznie dokładne. Z kolei w przypadku wyższych postaci drgań, kiedy ich węzły leżą bliżej siebie wzdłuż belki i wpływ ścinania jej przekrojów staje się coraz bardziej istotny, oraz w przypadku belek mało smukłych, tzw. krótkich, trzeba stosować teorię zginania Timoshenki osiągając porównywalną dokładność wyników z wynikami uzyskiwanymi za pomocą dyskretnego modelu trójwymiarowego o dużej liczbie stopni swobody zbudowanego metodą elementów skończonych.

## **7.2 Uwagi dotyczące oryginalnych elementów proponowanej metodyki oraz możliwości dalszego jej rozwijania**

Podstawowym celem proponowanej w pracy metody dyskretno-ciągłego (hybrydowego) modelowania wybranych układów mechanicznych przy wykorzystaniu L-SMC jest próba wypracowania ogólnego podejścia do badania drgań mechanicznych obiektów rzeczywistych bez dokonywania dyskretyzacji komponentów ulegających dynamicznym odkształceniom, lecz zastępowania ich elementami strukturalnymi, których ruch jest opisywany w sposób ścisły - zgodnie z zadaną teorią deformacji sprężystej mającą zazwyczaj formalne analityczne rozwiązania. Przy naturalnej złożoności i mnogości otrzymywanych związków analitycznych stanowiących model matematyczny ruchu badanego obiektu obliczenia wykonywano wprawdzie za pomocą maszyny cyfrowej, lecz w zdecydowanej większości w oparciu o wyprowadzone uprzednio formuły analityczne unikając, gdzie to tylko było możliwe, wszelkich aproksymacji numerycznych stosowanych w znanych metodach komputerowych, takich jak metoda elementów skończonych czy metoda elementów brzegowych. Przy wykorzystaniu modeli dyskretno-ciągłych przyjmowanych w

pracy typowym etapem numerycznym wykonywanym w całym procesie obliczeniowym jest praktycznie tylko bezpośrednie całkowanie przy użyciu różnego rodzaju technik interpolacyjnych i ekstrapolacyjnych układów liniowych i nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych z przesuniętym argumentem typu (3.4) i (3.6) oraz we współrzędnych Lagrange'a typu (3.26) otrzymywanych drogą analitycznych przekształceń jako konsekwencja używanych rozwiązań (odpowiednio d'Alemberta i Fouriera) cząstkowych równań ruchu przekrojów poprzecznych L-SMC. Dzięki wymienionym cechom proponowane podejście pozwala na tworzenie modeli strukturalnych obiektów rzeczywistych charakteryzujących się stosunkowo łatwą identyfikacją parametrów wejściowych, której poziom błędu może być równy lub nawet niższy od poziomu typowego dla powszechnie uznawanych analogicznych jednowymiarowych modeli zbudowanych metodą elementów skończonych, jak również pozwala na uzyskiwanie możliwie wysokiej dokładności i stabilności numerycznej przeprowadzanych obliczeń. Przesunięty argument w odpowiednich członach układów równań różniczkowych zwyczajnych otrzymywanych w konsekwencji zastosowania rozwiązań typu d'Alemberta falowych równań ruchu pozwala na sekwencyjne rozwiązywanie poszczególnych równań należących do tego układu, co bardzo znacząco zmniejsza liczbę koniecznych operacji arytmetycznych ułatwiając tym samym przeprowadzanie symulacji drgań, obniżając poziom błędów numerycznych i skracając czas obliczeń. Z kolei dzięki wykorzystaniu własności ortogonalnych funkcji własnych, w których to bazie poszukiwane są rozwiązania metodą Fouriera w postaci nieskończonych zbieżnych szeregów rozwinięć względem tych funkcji, można ograniczać liczbę otrzymywanych w rezultacie równań różniczkowych zwyczajnych we współrzędnych modalnych Lagrange'a przy symulacji drgań wymuszonych tak by uzyskiwać zadowalającą efektywność obliczeniową bez istotnej utraty dokładności wyników z punktu widzenia wymagań technicznych.

Obydwa zastosowane rozwiązania cząstkowych równań różniczkowych ruchu przekrojów poprzecznych L-SMC, czyli rozwiązanie falowe typu d'Alemberta oraz rozwiązanie Fouriera, są wprawdzie znane od dawna, lecz jak już zaznaczono we „Wstępie” oraz w rozdziałach 2 i 3, sposób ich dotychczasowego wykorzystania jest nieco odmienny. W proponowanym w pracy podejściu rozwiązaniu typu d'Alemberta nadano wymiar aplikacyjny do istniejących w rzeczywistości obiektów doznających drgań ustalonych i przejściowych uwzględniając efekty parametryczne i nieliniowości, w tym silne nieliniowości, typu lokalnego. Uzyskiwane w ten sposób wyniki symulacji zostały porównane z wynikami otrzymanymi za pomocą innych metod oraz, co najważniejsze, z wynikami pomiarów przeprowadzonych na stanowisku laboratoryjnym. Z kolei przy wykorzystaniu rozwiązania Fouriera w ujęciu lokalnym przy złożonych postaciach warunków brzegowych uwypuklono znaczenie warunków ortogonalności funkcji i wektorów własnych modeli dyskretno-ciągłych badanych układów mechanicznych i konstrukcji, w bazach których rozwijano człony nieliniowe, parametryczne, niesymetryczne, tłumienia zewnętrznego i inne, uzyskując możliwość przeprowadzania analizy drgań dla znacznie szerszej niż dotychczas klasy przypadków. W celu sprawdzenia wiarygodności otrzymywanych tą drogą wyników również porównywano je z odpowiednimi wynikami uzyskanymi za pomocą innych metod, na przykład metodą elementów skończonych, oraz z wynikami pomiarów dokonanych na obiekcie rzeczywistym. Należy przy tym zauważyć, iż nieco inny sposób wykorzystywania różniczkowych, cząstkowych równań ruchu przekrojów poprzecznych L-SMC w ujęciu lokalnym oraz ich analitycznych rozwiązań można uznać za analogiczny element nowości proponowanej w pracy metody modelowania jak w przypadku zastosowania w ujęciu lokalnym znanej metody przybliżonej Rayleigha-Ritza do układów ciągłych (tj. o parametrach rozłożonych) dającego podstawę klasycznego sformułowania metody elementów skończonych, [113].

Ponieważ podstawowym celem niniejszej pracy jest przedstawienie metodyki modelowania i analizy drgań wymienionych układów mechanicznych, wiele zaprezentowanych wyników obliczeń dotyczy zjawisk badanych za pomocą innych metod, na przykład drgań skrętnych układów

napędowych omawianych w rozdziale 4, czy drgań giętych i giętno-skrętnych wałów maszyn wirnikowych rozpatrywanych w rozdziale 5. Niemniej jednak, w tej rozprawie zawarto również wyniki oryginalne pod względem poznawczym. Dotyczy to przede wszystkim omawianej w rozdziale 4 dynamiki układów strunowych wzbudzanych do drgań poprzecznych ruchomym obciążeniem inercyjnym i nieinercyjnym przy wykorzystaniu falowej interpretacji zjawiska i rozwiązania typu d'Alemberta hiperbolicznych równań ruchu. W tym rozdziale falowa interpretacja zjawiska drgań znalazła również nowatorskie zastosowanie przy badaniu szybkozmiennych procesów dynamicznych, w tym zderzeń, zachodzących w przekładniowych układach napędowych z uwzględnieniem luzów międzyzębnych. Owe nowatorstwo należy tu uzasadnić jakościowo odmiennym w porównaniu z podejściami stosowanymi dotychczas sposobem modelowania i numerycznej symulacji badanych zjawisk. Do oryginalnych pod względem poznawczym wyników można także zaliczyć zamieszczoną w rozdziale 5 analizę aktywnie sterowanych giętych drgań układu belkowego poddanego ruchomym obciążeniem inercyjnym. Szczególne znaczenie mają tu przedstawione w rozdziale 6 wyniki obliczeń dotyczące dynamicznego oddziaływania układów jezdnych pojazdów szynowych z torem kolejowym w zakresie tzw. średnich częstości. Zarówno wyniki analizy drgań własnych tych układów, wyznaczone dla nich funkcje odpowiedzi częstotliwościowej oraz wyniki symulacji drgań wymuszonych obejmujące efekty parametrycznego wymuszenia toru wskutek równomiernego ułożenia podkładów na jego długości, jak również zjawiska mikro-odrywania kół jezdnych od szyn w rezultacie przeciążeń dynamicznych powstających podczas jazdy, należy uznać za nowatorskie na tle analogicznych wyników badań innych autorów opublikowanych w najnowszej literaturze światowej. W tym przypadku za istotny element nowości obok podkreślanego powyżej oryginalnego sposobu dyskretno-ciągłego modelowania można uznać jednoczesne uwzględnienie wielu czynników wpływających ilościowo i jakościowo na badany proces dynamicznego oddziaływania dotyczących strukturalnych modeli wózków, nieliniowego modelu kontaktu między kołami jezdными a szynami oraz funkcjonalnego modelu prostoliniowego i krzywoliniowego toru o parametrach identyfikowanych doświadczalnie.

W przedstawionej pracy badane układy mechaniczne i konstrukcje modelowano przy wykorzystaniu jednowymiarowych lepko-sprężystych makroelementów ciągłych. Niemniej jednak w ramach rozwijania proponowanej metodyki analizy drgań za pomocą modeli dyskretno-ciągłych przewiduje się możliwość wprowadzania również dwuwymiarowych L-SMC o stałych grubościach, na przykład kołowsymetrycznych makroelementów tarczowych względnie membranowych lub też prostokątnych makroelementów płytowych. Przy użyciu makroelementów tarczowych można byłoby modelować różnego rodzaju wirniki, koła jezdne pojazdów szynowych, koła zamachowe i tarcze sprzęgłowe w układach napędowych maszyn i pojazdów, kołnierze wałów i inne. Z kolei zastosowanie makroelementów płytowych pozwoliłoby na dokładniejsze modelowanie konstrukcji mostowych, wiaduktów, estakad, elementów budowli oraz posadowień maszyn i urządzeń. Podobnie jak w przypadku zdefiniowanych w pracy makroelementów jednowymiarowych, równaniami ruchu przekrojów poprzecznych L-SMC dwuwymiarowych byłyby również liniowe równania różniczkowe cząstkowe opisujące lokalnie deformacje danego makroelementu przy zadanych geometrycznych i dynamicznych warunkach brzegowych. Jak wynika z licznej literatury, na przykład [74], takie równania można także rozwiązywać przy wykorzystaniu metody rozdzielania zmiennych i nieskończonych szeregów rozwinięć względem ortogonalnych, również dwuwymiarowych w tym przypadku, funkcji własnych. Za pomocą takiego podejścia rozwiązano w pracy [96] w ujęciu globalnym problem wzbudzanych ruchomą masą drgań podpartej przegubowo jednorodnej lepko-sprężystej płyty o stałej grubości. Stosowanie metodyki proponowanej w pracy przy wykorzystaniu sformułowania lokalnego do makroelementów dwuwymiarowych pozwoliłoby na efektywne rozwiązywanie szerokiej klasy zagadnień dynamiki układów mechanicznych i konstrukcji uzyskując dokładność nie mniejszą niż w przypadku powszechnie uznawanej metody elementów skończonych. Na przykład, przy użyciu dwuwymiarowych płytowych L-SMC wspomnianą powyżej analizę drgań płyty wzbudzanych ruchomą masą w [96] można byłoby



przeprowadzić w przypadku płyty niejednorodnej o zmiennej grubości, podpartą lepko-sprężystie na podporach o nieliniowych charakterystykach.

Niezależnie od rozwijania proponowanej w pracy metody modelowania w kierunku obiektów dwuwymiarowych, istnieją jeszcze duże możliwości modyfikacji jednowymiarowych L-SMC już zdefiniowanych w rozdziale 2, m. in. przez opisy różnego rodzaju błędów montażowych elementów maszyn i konstrukcji, w tym takich jak niewspółosiowość sąsiadujących ze sobą odcinków wałów. Ponadto, nadal jest potrzebne wprowadzanie jednowymiarowych makroelementów nowych. Na przykład wydaje się być zasadnym dalsze badanie makroelementów giętno-skrętnych pod kątem rozmaitych zastosowań technicznych, w tym wykorzystując teorię zginania belki Timoshenki. W celu wykrywania i identyfikacji uszkodzeń odpowiedzialnych elementów maszyn i konstrukcji, analogicznie jak w metodzie elementów skończonych należałoby wprowadzić makroelementy z pęknięciem (szczeliną) do analizy drgań przy użyciu modeli dyskretno-ciągłych. W dobie intensywnego rozwoju robotów przemysłowych i kosmicznych stosowaną powszechnie do symulacji i sterowania ruchów ich wysięgników, prowadnic i manipulatorów metodę układów wieloczołowych (MBS) można byłoby połączyć z przedstawionym w niniejszej pracy dyskretno-ciągłym modelowaniem tych elementów w celu jeszcze dokładniejszego uwzględniania ich podatności do badania drgań nakładających się na ruchy podstawowe (robocze). Takie połączenie ww. podejść dałoby możliwość otwarcia kolejnego kierunku badawczego interesującego zarówno pod względem poznawczym jak i aplikacyjnym. W związku z powyższym, należy stwierdzić, że proponowana metodyka modelowania i analizy drgań ma charakter perspektywiczny i stanowi pierwszy krok w kierunku budowania strukturalnych modeli układów mechanicznych i konstrukcji bez dyskretyzowania ich elementów traktowanych jako odkształcalne i bez przybliżonego w sensie aproksymacji numerycznej opisu ruchu, lecz przy wykorzystaniu w ujęciu komputerowym ścisłego opisu analitycznego według znanych teorii deformacji sprężystych, co jest jednym z podstawowych celów prezentowanej pracy.

## **Podziękowania**

*Panu Profesorowi dr hab. inż. Romanowi Bogaczowi, kierownikowi Pracowni Pojazdów i Konstrukcji Aktywnych IPPT PAN (dawnej Samodzielnej Pracowni Dynamiki i Stateczności Maszyn i Pojazdów), gdzie powstała koncepcja niniejszej pracy, za stworzenie pozytywnych warunków badawczych i liczne wnikliwe uwagi merytoryczne, uwzględnienie których przyczyniło się do znacznej poprawy jej jakości;*

*Panu Profesorowi dr hab. inż. Wacławowi Szczśniakowi z Wydziału Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej za owocne dyskusje naukowe i życzliwą krytykę pomocną we właściwym przedstawieniu zawartej w pracy tematyki.*

## Summary

In the presented dissertation the method of dynamic analysis of complex discrete-continuous mechanical systems is proposed. By means of this method there are studied linear, non-linear and parametric torsional, bending, axial, transverse as well as coupled bending-torsional and bending-torsional-axial vibrations of an extensive group of responsible elements of many mechanical systems, such as cantilever beams, shafts and axles of the rotor-machines, drive trains and vehicle running gears, guideways of industrial robots, catenary suspensions, rope drives and others. These vibrations can be investigated with a sufficient for technical purposes accuracy by means of one-dimensional mechanical models. In order to achieve a required exactness and reliability of results and in order to avoid the well known disadvantages of commonly applied other methods, in the dissertation for analysis of the mentioned vibrations an alternative method is proposed, which is characterized by the same or even smaller level of the parameter identification error than, e.g. the analogous one-dimensional finite element approach, but by higher or much higher computational efficiency associated with an ease of application for practical purposes.

This method is based on discrete-continuous mechanical models, in which successive segments of shafts, axles, beams, rotors and ropes are represented by the flexurally, torsionally and axially deformable continuous visco-elastic macro-elements. These macro-elements are mutually connected according to the structure of the real system in the form of stepped shafts, beams, rods or strings which are suspended on concentrated inertial-visco-elastic supports corresponding to the roll- or journal-bearings and joints of linear or non-linear characteristics. To appropriate macro-element cross-sections, directly or by means of massless membranes, there are attached rigid bodies representing rotors, bladed disks, coupling disks, running wheels, gears, flywheels, impellers, posts and others. Properties of the elastic couplings, joints, bearings and gear meshings are represented by means of mass-less visco-elastic springs connecting appropriate continuous visco-elastic macro-elements. Characteristics of these springs can be linear or non-linear. Flexural, torsional, axial and transverse motions of cross-sections of the macro-elements are governed by the partial differential equations. Mutual connections of the successive macro-elements as well as their interactions with the supports and other elements with continuously distributed or concentrated parameters are described by equations of geometric and dynamic boundary conditions. If only shaft-torsional, rod-axial (longitudinal) or string-transverse vibrations are taken into consideration, for forced vibration analysis the d'Alembert solutions of the wave motion equations are very useful. Then, an application of these solutions leads to systems of ordinary differential equations with a retarded argument, which are particularly convenient for numerical simulations of linear, non-linear and, in particular, – of strongly non-linear processes. However, more general are the Fourier solutions in the form of infinite series in orthogonal analytical eigenfunctions, which leads to sets of modal equations in the Lagrange co-ordinates. These equations are mutually coupled by parametric, non-linear, external damping and skew-symmetrical terms regarded here as external excitations expanded in series in the mentioned above orthogonal analytical eigenfunctions. A fast convergence of the Fourier solutions enables us to reduce the quantity of the modal equations to solve to an appropriate number in order to obtain a sufficient accuracy of results in the given range of frequency. Both applied solutions, i.e. the d'Alembert and the Fourier one, of the assumed mathematical models are formally strict, demonstrate clearly the qualitative system properties and they are very convenient for stable and efficient numerical simulations. Beyond the simulations of forced vibrations, by means of the discrete-continuous models also qualitative studies of the considered mechanical systems are carried out in the form of natural vibration analyses and determination of the frequency response functions.

In the successive chapters of this dissertation there are presented computational examples demonstrating application possibilities of the proposed method to numerous mechanical systems

existing in the engineering practice. The results of some examples are compared with analogous results obtained using other methods as well as some results are compared with corresponding results of measurements carried out on the real objects.

In *Chapter 4* steady-state and transient torsional vibrations as well as string transverse vibrations are investigated, where the d'Alembert solution of the wave motion equations have been used. There are studied linear, non-linear and parametric torsional vibrations of the reciprocating engine crank mechanisms, of the drive systems of motor- and railway-vehicles as well as torsional vibrations of drive trains of working- and rotor-machines. In the discrete-continuous models of these systems dynamic effects caused by dry friction, backlashes, non-linear and parametric characteristics of gear meshings, elastic couplings, clutches and others have been taken into consideration. The results of natural vibration analysis and the results of non-linear forced vibration analysis performed for the drive train with an elastic coupling and four gear stages are verified by the corresponding results obtained by experimental measurements carried out on the test-rig. In *Chapter 4* there are also investigated transverse vibrations of the string systems excited by moving forces and oscillators.

In *Chapter 5* and *6* the Fourier solution of motion equations is applied. *Chapter 5* is devoted to bending vibration analysis of the beam structure under moving loads as well as to bending and coupled bending-torsional vibrations of rotor-shaft systems of the rotating machinery. In the case of vibrations of the beam structure excited by moving loads there are compared some concepts of active control of the dynamic process in order to minimise amplitudes of system responses. Dynamic investigations of the rotor-shafts are focused on the influence of coupling effects caused by system unbalances on the steady-state and transient responses as well as there are discussed natural frequency values and eigenfunctions of the geared drive train of the rotor machine under coupled bending-torsional vibrations.

In *Chapter 6* there is studied dynamic interaction between the railway running gears and the track in the so called “medium frequency range”, in which the wheelsets and the track must be regarded as flexible objects. Here, the dynamic investigations reduce to qualitative and quantitative analysis of bending-torsional-axial (lateral) vibrations of wheelsets of the trailer and motor bogies coupled by the non-linear wheel-rail contact interface with vertical and lateral vibrations of the track model with experimentally identified parameters. The qualitative studies have been carried out in the form of natural vibration analysis and determination of the frequency response functions for the railway bogie-track systems. For the quantitative analysis numerous numerical simulations of non-linear forced vibrations are performed for various kinds of trailer and motor railway bogies running on the straight and curved tracks. For the given type of a trailer bogie the results of numerical simulation obtained using the discrete-continuous model are compared with corresponding results of measurements performed on the real object, indicating in this way reliability of the proposed method to practical applications.

Beyond the final remarks, accentuation of the innovation aspects and preview for further research, in the closing *Chapter 7* by means of the proposed in this dissertation method there is also carried out the comparative analysis of results of bending and torsional natural vibrations for the stepped cantilever beam of various slenderness parameters regarded as the one-dimensional object modelled using the continuous macro-elements as well as regarded as the three-dimensional object modelled by means of the finite element method. In this comparison some limits of accuracy have been confirmed for the applied theories of bending and torsion in the one-dimensional model. As preview for further investigations, some possibilities of development of new types of one-dimensional visco-elastic macro-elements are specified as well as there are emphasized abilities of the proposed method to introduce two-dimensional macro-elements into the discrete-continuous models of considered mechanical systems and structures.

## Literatura

- [1] **An-Chen Lee, Yuan Kang, Shin-Li Liu:** A modified transfer matrix method for linear rotor-bearing systems, *ASME Transactions, J. of Applied Mechanics*, Vol. 58, 2, 1991, str. 776-783.
- [2] **Andersson C., Oscarsson J.:** Dynamic track/train interaction including state-dependent track properties and flexible vehicle components, *Vehicle System Dynamics - Supplement* Vol. 33, 1999, str. 47-58.
- [3] **Андреев В. А.:** Совместные колебания вала и лопаток ротора паротурбоагрегата при коротком замыкании, *Машиноведение*, Nr. 6, 1970, str. 3-10.
- [4] **Bajer Cz.:** Triangular and tetrahedral space--time finite elements in vibration analysis, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, Vol. 23, 1986, str. 2031-2048.
- [5] **Bajer Cz., Bohatier C.:** The soft way method and the velocity formulation, *Computers and Structures*, Vol. 55, No. 6, 1995, str. 1015-1025.
- [6] **Bajer Cz.:** Numeryczne modelowanie czasoprzestrzennych dynamicznych zagadnień kontaktowych, *Prace IPPT PAN*, 5/1997, *Praca habilitacyjna*.
- [7] **Bajer Cz.:** The space--time approach to rail/wheel contact and corrugations problem, *Comp. Ass. Mech. Eng. Sci.*, No. 5, 1998, str. 267-283.
- [8] **Baker A. J.:** *Finite Element Computational Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Book Company 1983.
- [9] **Balmer B.:** Ein Reibmodell zur Berechnung reibungsgedämpfter Schaufelschwingungen, *Z. angew. Math. Mech.* 72 1992 4, T 159-T 161.
- [10] **Balmer B.:** Erhöhung der Dämpfung von Turbinenschaufeln durch Reibelemente, *VDI Verlag*, Reihe 11, Nr. 197, 1993.
- [11] **Banaszek J., Jaluria Y., Kowalewski T. A., Rebow M.:** Semi-implicit FEM analysis of natural convection in freezing water, *Numerical Heat Transfer, Part A*, Vol. 36, 1999, str. 449-472.
- [12] **Banerjee J. R., Williams F. W.:** Exact Bernoulli-Euler dynamic stiffness matrix for a range of tapered beams, *Int. Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, 1985, str. 2289-2302.
- [13] **Bathe K. J., Wilson E. L.:** *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice Hall 1976.
- [14] **Bently D. E., Goldman P., Muszyńska A.:** "Snapping" Torsional Response of an Anisotropic Radially Loaded Rotor. *Papers of the ASME*, 95-GT-396, 1995.
- [15] **Berg H., Gößling G., Zück H.:** "Radsatzwelle und Radscheibe" - die richtige Kombination zur Messung der Kräfte zwischen Rad und Schiene, *ZEV+DET Glas. Ann.* 120, Nr. 2 1996, str. 40-47.
- [16] **Berger H., Kulig T. S.:** Simulation models for calculating the torsional vibrations of large turbine-generator units after electrical system faults, *Siemens Forsch.- u. Entwickl. Ber.* Bd. 10, No. 4, 1981, str. 237-245.
- [17] **Beskos D. E.:** Boundary element methods in dynamic analysis, *Applied Mechanics Review*, Vol. 40, No. 1, 1987, str. 1-23.

- [18] **Bogacz R.:** On self-excitation of moving oscillator interacting at two points with a continuous system, *Nonlinear Vibration Problems*, No. **16**, 1979, str. 239-250.
- [19] **Bogacz R., Mahrenholtz O.:** On stability of column under circulatory load, *Archives of Mechanics*, No. 3, 1986, str. 281-287.
- [20] **Bogacz R., Irretier H., Szolc T.:** Torsional waves due to high speed reclosing of the electric network in the turbogenerator rotor shaft system, Proc. of the 16th Int. Conference on Dynamics of Machines, Czechoslovakia, Stupava 1989, Vol.2, str. 102-105.
- [21] **Bogacz R., Irretier H., Szolc T.:** A wave propagation for the analysis of transient torsional vibrations due to start-up of a rotor machine, Proc. of the 12th Biennial ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise, ASME, Rotating Machinery Dynamics, DE-Vol. 18-1, Montreal, Canada, 1989, str. 187-190.
- [22] **Bogacz R., Szolc T.:** Analiza drgań wymuszonych układu napędowego przy wykorzystaniu modelu dydaktyczno-ciągłego i dyskretnego, *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej*, Nr **59**, 'Mechanika', z. 18, 1989, str. 221-224.
- [23] **Bogacz R., Irretier H., Szolc T.:** Analysis of transient torsional vibrations in the rotor machine using a hybrid model, Proc. of the 3rd Int. Rotordynamics Conference, IFToMM, Editions du CNRS, Lyon, France, 1990, str. 207-211.
- [24] **Bogacz R., Irretier H., Szolc T.:** An application of the elastic wave propagation theory to transient torsional vibration analysis in rotating machines, *Z. angew. Math. Mech.* **70** 1990 **4**, T 199-T 201.
- [25] **Bogacz R., Irretier H., Szolc T.:** Non-linear vibration analysis of the drive systems using torsional elastic waves, Proc. of the German-Polish Workshop on "Dynamic Problems in Mechanical Systems", in Paderborn, Germany, in March 1991, IPPT, Warsaw 1991, str. 11-22.
- [26] **Bogacz R., Irretier H., Szolc T.:** On discrete-continuous modelling of the rotating systems for a non-linear torsional vibration analysis, Proc. of the International Conference on Rotating Machine Dynamics, "Rotordynamics'92", Venice, Italy, April 1992, Springer-Verlag, Michael J. Goodwin (Ed.), str. 240-247.
- [27] **Bogacz R., Szolc T., Irretier H.:** An application of torsional wave analysis to turbogenerator rotor shaft response, *Trans. of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics*, Vol.114, 1992, str. 149-153.
- [28] **Bogacz R., Szolc T.:** On methods of solution for the discrete-continuous system under moving load, *Z. angew. Math. Mech.*, **72** 1992 **4**, T 16-T 19.
- [29] **Bogacz R., Szolc T.:** On non-linear analysis of the geared drive systems by means of the wave method, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol.2, Nr **31**, 1993, str. 393-402.
- [30] **Bogacz R., Szolc T.:** On dynamic interaction between the moving oscillator and a discrete-continuous system, *Z. angew. Math. Mech.*, **73** 1993 **4-5**, T 195.
- [31] **Bogacz R., Szolc T.:** Non-linear torsional vibration analysis of the drive systems using one-dimensional elastic waves, *Archives of Mechanics*, Vol. **45**, No. 1, 1993, str. 65-75.
- [32] **Bogacz R., Szolc T.:** Analysis of dynamic interaction between the continuous string and moving oscillator, *Engineering Transactions*, Nr **3-4**, 1993, str. 365-384.

- [33] **Bogacz R., Szolc T.:** On torsional elastic waves in the vehicle drive systems, *Periodica Polytechnica ser. Transportation Engineering*, No. 1993/1. Vol. 21, str. 37-59.
- [34] **Bogacz R., Irretier H., Szolc T.:** Dynamic analysis of steam turbine rotor shaft torsional vibrations damped by friction due to blade fastening, Proc. of the 'Schwingungen in rotierenden Maschinen' Conference (SIRM'93) edited by the Verlag VIEWEG, Wiesbaden, Germany, 1993, str. 242-249.
- [35] **Bogacz R., Krzyżyński T., Popp K.:** On dynamics of systems modelling continuous and periodic guideways, *Archives of Mechanics*, 45, 5, 1993, str. 575-593.
- [36] **Bogacz R., Imielowski Sz.:** Remarks on stability of discrete-continuous structure under circulatory load, *J. Theoretical and Appl. Mechanics*, 4, 32, 1994, str. 903-919.
- [37] **Bogacz R., Meinke P., Popp K.:** Zur Modellierung der höherfrequenten Radsatz/Gleisdynamik, Hestra Verlag: Report on the "Tagung Systemdynamik der Eisenbahn", 13-14 Oct. 1994 in Henningsdorf, Germany, 1994, str. 45-55.
- [38] **Bogacz R., Szolc T.:** On simulation of active control of structures under travelling inertial loads, Proc. of the IUTAM Symposium on Interaction Between Dynamics and Control in Advanced Mechanical Systems, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 1997, str. 51-58.
- [39] **Bogacz R., Imielowski Sz., Tomski L.:** Stability and vibration of column structures subjected to generalized concentrated load. Theoretical and experimental study, Proc. of Int. Symposium on *Dynamics of Continua*, Bad Honnef (Germany), 1996, D. Besdo and R. Bogacz Eds., Shaker Verlag 1998, str. 45-54.
- [40] **Bruni S., Collina A., Diana G., Vanolo P.:** Lateral dynamics of a railway vehicle in tangent track and curve: test and simulation, *Vehicle System Dynamics - Supplement* Vol. 33, 1999, str. 464-477.
- [41] **Brzeziński J., Pietrzakowski M.:** Badanie niestacjonarnych drgań prostego układu hybrydowego metodą czasoprzestrzennych elementów skończonych, *Arch. Budowy Maszyn*, Nr 4, Vol. 26, 1979, str. 511-526.
- [42] **Bystrzycki J.:** Metody rozwiązywania równań belki Timoshenki, Prace IPPT PAN, 33/1977.
- [43] **Carlbon P. F.:** Combining MBS with FEM for rail vehicle dynamics analysis, Proc. of the EUROMECH Colloquium 404 "Advances in Computational Multibody Dynamics", Jorge A. C. Ambrósio and Werner O. Schiehlen (Eds.), IDMEC/IST Lisbon, Portugal, September 1999, str. 333-342.
- [44] **Chou J. J., Yang D. C. H.:** Free impact frequency estimation for meshing gears, Proc. of the 7<sup>th</sup> World Congress of the Theory of Machines and Mechanisms, IFToMM, Sevilla, Spain, Vol. 2, Pergamon Press 1987, str. 815-819.
- [45] **Chudzikiewicz A., Drożdź J., Kisilowski J., Źochowski A.:** *Modelowanie i analiza dynamiki układu tor-pojazd*, PWN, Warszawa 1982.
- [46] **Claus H., Schiehlen W.:** System dynamics of railcars with radial- and lateralelastic wheels, Karl Popp & Werner Schiehlen (Eds.) "System Dynamics and Long-Term Behaviour of Railway Vehicles, Track and Subgrade", Springer-Verlag, 2002, str. 65-84.

- [47] **Deák A. L., Baird R. D.:** A procedure for calculating the packet frequencies of steam turbine exhaust blades, *Transactions of the ASME, J. of Engineering for Power*, October 1963, str. 324-330.
- [48] **De Choudhury P.:** Torsional system design relative to synchronous motor start-up with a variable frequency power supply system, Proc. of the International Conference on Rotordynamics, IFToMM, Tokyo 1986, str. 325-328.
- [49] **Dimarogonas A.:** *Vibration for engineers*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1996.
- [50] **Ecker H., Springer H., Haselbacher H.:** Dynamic Response of a Rotor Bearing System Due to Bearing Failure, Proc. of the 4th Int. IFToMM Conference on Rotor Dynamics, Chicago, Edited by R. L. Eshleman, Vibration Institute, USA, 1994, str. 357-362.
- [51] **Fingberg U.:** Ein Modell für das Kurvenquietschen von Schienenfahrzeugen, *VDI Fortschritt-Berichte*, Reihe 11, Nr. 140, 1990.
- [52] **Fingberg U., Popp K.:** Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Schallabstrahlverhalten von Schienenrädern, Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), Final Report Po 136/5-2, August 1991.
- [53] **Friedmann P., Hammond C. E., Woo Tze-Hsin:** Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems, *Int. Journal. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, 1977, str. 1117-1136.
- [54] **Frischgesell T., Popp K., Szolc T., Bogacz R.:** Active control of elastic beam structures, Proc. of the IUTAM Symposium: The Active Control of Vibrations, Bath, Great Britain, Sept. 1994, str. 115-122.
- [55] **Fröhling R., Ruplal M.:** Dynamic interaction between pantograph and overhead track equipment for heavy haul operations, *Vehicle System Dynamics - Supplement* Vol. 33, 1999, str. 478-489.
- [56] **Gold P. W.:** Geräuschminderung an Getrieben Erfahrungen im Bereich Schiffs-getriebe, Proc. of the "Antriebstechnisches Kolloquium ATK'95", Aachen, May 1995, Verlag Mainz, Wissenschaftsverlag Aachen 1995, str. 135-163.
- [57] **Голоскоков Е. Г., Филипов А. П.:** *Нестационарные колебания механических систем*, Наукова Думка, Киев 1966.
- [58] **Groll W.:** Badanie stateczności biegu lokomotywy EP 09, Centrum Naukowo-Techniczne Kolejnictwa, Raport wewnętrzny tematu 3837/17, Warszawa 1990.
- [59] **Groll W., Szolc T., Gasiński T., Krysztofik Z.:** Doświadczalne badanie własności dynamicznych i statycznych toru kolejowego w warunkach Polskich Kolei Państwowych, *Problemy Kolejnictwa - Wydawnictwo CNTK – Warszawa* 2001, Zesz. 134, str. 51-76.
- [60] **Gryboś R.:** *Dynamika maszyn wirnikowych*, Polish Scientific Publishers (PWN), Warszawa 1994.
- [61] **Hizume A.:** Transient torsional vibration of the steam turbine and generator shafts due to high speed reclosing of electric power lines, Transactions of the ASME, Paper No. 75-DET-71, 1975, str. 1-12.

- [62] **Hopper C. T., Simpson A., Williams F. W.:** A study of the bounds of eigenvalues of a transcendental dynamic stiffness matrix provided by a simple derived linear matrix pencil, *Journal of Structural Mechanics*, Vol. 8, 1980, str. 365-442.
- [63] **Ilias H.:** The influence of railpad stiffness on wheelset/track interaction and corrugation growth, *Journal of Sound and Vibration*, 227 (5), 1999, str. 935-948.
- [64] **Imielowski Sz., Mahrenholtz O.:** Optimization and sensitivity of stepped columns under circulatory load, *Applied Mathematics and Computer Sciences*, Vol. 7, No. 1, 1997, str. 155-170.
- [65] **Inglis C. E.:** *A mathematical treatise on vibrations in railway bridges*, Cambridge University Press, 1934.
- [66] **Irretier H.:** Free and forced vibrations of turbine blades, *Rotordynamics 2 - Problems in Turbomachinery*. CISM Courses and Lectures No. 297 (Ed.: N. F. Rieger), Springer-Verlag, Wien/New York, 1988, str. 397-422.
- [67] **Irretier H.:** Coupled vibration of blades in bending-bending-torsion and disk out-of plane and in-plane motion, ASME Paper 79-Det-90, 1990, str. 1-12.
- [68] **Iwatsubo T, Yamamoto Y., Kawai R.:** Start-up torsional vibration of rotating machine driven by synchronous motor, Proc. of the International Conference on Rotordynamics, IFToMM, Tokyo 1986, str. 319-324.
- [69] **Jackson Ch.:** Practical rotor dynamics gives insight to diagnostics, balancing, corrections, Proc. of the 4th Int. IFToMM Conference on Rotor Dynamics, Chicago, Edited by R. L. Eshleman, Vibration Institute, USA, 1994, str. 163-169.
- [70] **Jędrzejowski J.:** *Mechanika układów korbowych silników samochodowych*, WKŁ, Warszawa 1979.
- [71] **Jialiu Gu:** An improved transfer matrix-direct integration method for rotor dynamics, *Trans. ASME, J. of Applied Mechanics*, Vol. 108, 1986, str. 182-188.
- [72] **Kaiser I., Popp K.:** Modelling and simulation of the mid-frequency behaviour of an elastic bogie, Karl Popp & Werner Schiehlen (Eds.) "*System Dynamics and Long-Term Behaviour of Railway Vehicles, Track and Subgrade*", Springer-Verlag, 2002, str. 101-120.
- [73] **Kaliski S.:** *Pewne problemy brzegowe dynamicznej teorii sprężystości i ciał niesprężystych*, PWN, Warszawa 1957.
- [74] **Kaliski S. i in.:** *Drgania i fale*, PWN Warszawa 1966.
- [75] **Kanki H., Yamamoto Y.:** Experimental verification of blade-disc-rotor coupled torsional vibration for large turbine, Proc. of the 12th Biennial ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise, ASME, Rotating Machinery Dynamics, DE-Vol. 18-1, Montreal, Canada, 1989, str. 17-21.
- [76] **Kasprzyk S., Dan-Tinh:** Drgania własne zachowawczego układu dyskretno-ciągłego, *Zag. Drgań Nieliniowych (Nonlinear Vibration Problems)*, No. 19, 1979, str. 263-272 (po rosyjsku)
- [77] **Kasprzyk S.:** Analysis of torsional vibrations of discrete-continuous systems in a class of generalized functions, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana (J. of Theoretical and Applied Mechanics)*, Vol. 34, No. 3, 1996, str. 579-596.



- [78] **Kazmierczyk P., Hagedorn P.:** On optimal placement of spacers in bounded conductors, *Prace IPPT PAN*, 3/1994.
- [79] **Kączkowski Z.:** The method of finite space--time elements in dynamics of structures, *J. Tech. Phys.*, Vol. 16, No. 1, 1975, str. 69-84.
- [80] **Ker Wilson W.:** *Practical Solution of Torsional Vibration Problems*, Aberdeen University Press Ltd., Aberdeen 1963.
- [81] **Kiciński J.:** *Teoria i badanie hydrodynamicznych poprzecznych łożysk ślizgowych*, Ossolineum, Wyd. Polskiej Akademii Nauk, Wrocław 1994.
- [82] **Kik W., Piotrowski J.:** A fast, approximate method to calculate normal load at contact between wheel and rail and creep forces during rolling, Proc. of 2<sup>nd</sup> Mini Conf. On Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems. Ed. I. Zobory, TU Budapest 1996.
- [83] **Kim P. Y., Flanagan R. C., Lowe I. R. G.:** A New Method for the Critical Speed Calculation of the Rotor-Bearing Systems - Part I and II, Proc. of the 12th Biennial ASME Conf. of Mechanical Vibration and Noise, Montreal 1989, *Rotating Machinery Dynamics*, DE-Vol. 18-1, str. 71-82.
- [84] **Kisilowski J., Knothe K.:** *Advanced Railway Vehicle System Dynamics*, WNT, Warsaw 1991.
- [85] **Kleiber M.:** *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa 1985.
- [86] **Kleiber M.:** *Metoda elementów skończonych*, w: *Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, t. XI: *Mechanika techniczna*, cz. II, PWN, Warszawa 1995.
- [87] **Kleiber M., Sosnowski W.:** Parameter sensitivity analysis in frictional contact problems of sheet metal forming, *Computational Mechanics* **16**, 297-306, 1995
- [88] **Kowalczyk P., Kleiber M.:** Modelling and numerical analysis of stresses and strains in human lung including tissue-gas interaction, *European Journal of Mechanics. A/Solids*, 13, 1994, str. 367-393.
- [89] **Kowalczyk P.:** Design optimization of cementless femoral hip prostheses using finite element analysis, *Trans. of the ASME, Journal of Biomechanical Engineering*, Vol.123, 2001, str. 396-402.
- [90] **Krämer E.:** *Maschinendynamik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, Tokyo 1984.
- [91] **Krupowicz A.:** *Metody numeryczne zagadnień początkowych równań różniczkowych zwyczajnych*, PWN, Warszawa 1986.
- [92] **Kruszewski J. i in.:** *Metoda elementów skończonych w dynamice konstrukcji*, (praca zbiorowa), Wyd. Arkady, Warszawa, 1984.
- [93] **Krzyżyński T.:** Dynamika układów ciągłych o okresowych własnościach struktury i wzbudzenia, *Prace IPPT PAN*, 38/1995, *Praca habilitacyjna*.
- [94] **Krzyżyński T.:** On dynamics of a railway track modeled as two-dimensional periodic structure, Proc. 4th Engineering Foundation Conference on Vehicle-Infrastructure Interaction, San Diego, USA, June 1996.
- [95] **Küçükay F.:** *Dynamik der Zahnradgetriebe*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1987.

- [96] **Langer J.:** Studium dynamiki pręśla mostowego obciążonego ruchomym pojazdem, *Archiwum Inżynierii Łądowej*, Tom XIX, z. 2/1973, str. 255-262.
- [97] **Langer J., Kłasztorny M.:** Drgania belki na podporach podatnych wywołane obciążeniem ruchomym, *Archiwum Inżynierii Łądowej*, Tom XX, z. 2/1974, str. 255-264.
- [98] **Laschet A.:** Simulation von Antriebssystemen, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, London, New-York, Paris, Tokyo 1988.
- [99] **Laschet A.:** Software zur Simulation von Antriebsstrang-Schwingungen in der Anlagen- und Fahrzeugtechnik, *VDI Berichte*, Nr. 786, 1989.
- [100] **Lee C.-W., Katz R., Ulsoy A. G., Scott R. A.:** Modal analysis of a distributed parameter rotating shaft, *J. of Sound and Vibration* 122(1), 1988, str. 119-130.
- [101] **Lee C.-W., Jei Y.-G.:** Modal analysis of continuous rotor-bearing systems, *J. of Sound and Vibration* 126(2), 1988, str. 345-361.
- [102] **Leung A. Y. T.:** Dynamic stiffness analysis of follower force, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 126, 1988, str. 533-543.
- [103] **Lewandowski R.:** Analiza nieliniowych drgań własnych belek wieloprzęsłowych, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, 3, 26, 1988, str. 471-486.
- [104] **Lewandowski R.:** Nonlinear free vibrations of multispan beams on elastic supports, *Computer&Structures*, Vol.32, No. 2, 1989, str. 305-312.
- [105] **Link M., Nowak B.:** Zur dynamischen Analyse des Systems Stromabnehmer und Fahrleitung, *VDI-Berichte* 635, 1987.
- [106] **Lunden R., Akesson B.:** Damped second-order Rayleigh-Timoshenko beam vibration in space: an exact complex dynamic member stiffness matrix, *Int. Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1983, str. 431-449.
- [107] **Mackerle J.:** A finite element bibliography for biomechanics (1987-1997), *Applied Mechanics Review*, Vol. 51, No. 10, 1998, str. 587-634.
- [108] **Mahrenholtz O., Szolc T.:** Experimental verification of the wave approach for the torsional vibration analysis, Proc. of the 4<sup>th</sup> German-Polish Workshop on "Dynamical Problems in Mechanical Systems", in Berlin, Germany, in July 1995, IPPT, Warsaw 1996, str. 209-220.
- [109] **Мандрыка Э. С., Моногаров Ю. И.:** Расчет напряжений в валопроводе и рабочих лопатках турбоагрегата при внезапном коротком замыкании, *Энергомашиностроение*, Nr. 11, 1975, X.1, str. 10-13.
- [110] **Markiewicz M., Snamina J.:** Wave propagation and scattering in overhead power transmission lines, Proc. of the Polish-German Workshop on "Dynamic Problems in Mechanical Systems", in Wierzba, Poland, in July 1993, IPPT, Warszawa 1993, str. 153-164.
- [111] **Matzke W.:** *Projektowanie mechanizmów korbowych silników szybkoobrotowych*, WKŁ, Warszawa 1974.
- [112] **Meinders T.:** Rotordynamik eines elastisches Radsatzes, Zwischenbericht ZB-94, Institut B für Mechanik, Universität Stuttgart, 1997.
- [113] **Meirovitch L.:** *Dynamics and Control of Structures*, John Wiley & Sons, New York 1990.

- [114] **Meisinger R.:** Dynamic analysis of active and passive ICE pantographs, Proc. of the 5<sup>th</sup> Symposium on Dynamic Problems of Mechanics "Diname'93", Santo Amaro da Imperatriz, Santa Catarina, Brasilia, 1993, str. 256-258.
- [115] **Morys B.:** Entstehung und Verstärkung von Radunrundheiten an Hochgeschwindigkeitseisenbahnzügen, Report of the Fraunhofer Institut Informations- und Datenverarbeitung, II TB, Karlsruhe 1996.
- [116] **Muszyńska A., Goldman P.:** Chaotic responses of unbalanced rotor/bearing/stator systems with looseness or rubs, *Chaos, Solitons & Fractals*, Vol. 5, No. 9, 1995. str. 1683-1704.
- [117] **Nadolski W.:** Lateral free vibrations of some single-speed gearings, *Zag. Drganí Nieliniowych (Nonlinear Vibration Problems)*, No. 11, 1971, str. 233-258.
- [118] **Nadolski W., Pielorz A.:** Dynamic investigation of the main journals of two-cylinder engine crankshaft with damping, *Int. Journal of Mech. Sci.*, **25**, 1983, 12, str. 887-898.
- [119] **Nadolski W., Szolc T., Pielorz A.:** Dynamic investigation of the crankshaft of three cylinder single bank engines using torsional elastic waves, Proc. of the 15<sup>th</sup> International Conf. on Dynamics of Machines (Interdynamics'85), Frankfurt/O, 1985, Eds. of the Acad. of Sci. of the GDR, Karl-Marx-Stadt, No. 8, 1986, str. 181-190.
- [120] **Nadolski W.:** Application of wave method in investigation of single gear transmission, *Ingenieur Archiv*, **58**, 1988, str. 329-338.
- [121] **Nadolski W.:** Dynamic investigations of single gear transmission taking into account microcracks, *Ingenieur Archiv*, **59**, 1989, str. 362-370.
- [122] **Nadolski W.:** Influence of nonlinear stiffness of teeth on dynamic loads in gear transmission, *Meccanica*, **31**, 1996, str. 665-672.
- [123] **Nagórski Z., Piotrowski J.:** Modelling of transient, 3D-temperature field in rail caused by rolling contact, EUROMECH Colloquium 409 "Dynamics and Long-Term Behaviour of Railway Vehicles, Track and Subgrade", University of Hannover, Hannover, 6-9 March, 2000, str. 43.
- [124] **Nagórski Z.:** 3-D model of heat conduction in rolling contact of the wheel and rail, Proc. of the 4<sup>th</sup> Conference TRANSCOMP'2000 on the "Computer Aided Design in Science, Industry and Transportation", *Zeszyty Naukowe Politechniki Radomskiej*, Zakopane, grudzień 2000, str. 207 (po polsku)
- [125] **Neilson R. D.:** Dynamics of electric submersible pumps, Proc. of the International Conference on Rotating Machine Dynamics, "Rotordynamics'92", Venice, Italy, April 1992, Springer-Verlag, Michael J. Goodwin (Ed.) 1992, str. 302-309.
- [126] **Nelson H. D.:** Modeling, analysis and computation in rotordynamics: a historical perspective, Proc. of the 4th Int. IFToMM Conference on Rotor Dynamics, Chicago, Edited by R. L. Eshleman, Vibration Institute, USA, 1994, str. 171-177.
- [127] **Neriya S. V., Bhat R. B., Sankar T. S.:** On the dynamic response of a helical geared system subjected to a static transmission error in the form of deterministic and filtered white noise inputs, ASME, Proc. of the 11th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Rotating Machinery Dynamics, Boston, Mass., USA, DE-Vol. 2, 1987, str. 287-296.

- [128] **Nestorides E. J.:** *A Handbook on Torsional Vibration*, B.I.C.E.R.A., Cambridge at the University Press, 1958.
- [129] **Nizioł J., Snamina J.:** Free vibration of the discrete-continuous system with damping, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana*, Vol. 28, No. 1-2, 1990, str. 149-160.
- [130] **Okabe A., Kaneko R., Matsushita O., Namura K., Yoshida T.:** Coupled vibration analysis: torsional vibration of turbine-generator-blade coupled system, Proc. of the 12th Biennial ASME Conference on Mechanical Vibration and Noise, ASME, Rotating Machinery Dynamics, DE-Vol. 18-1, Montreal, Canada, 1989, str. 135-140.
- [131] **Oscarsson J., Dahlberg T.:** Dynamic train/track/ballast interaction - computer models and full-scale experiments, *Vehicle System Dynamics - Supplement* Vol. 28, 1998, str. 73-81.
- [132] **Osiński Z.:** *Teoria maszyn i podstawy automatyki (cz. I)*, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1974.
- [133] **Ostachowicz W., Krawczuk M.:** „Analiza drgań własnych wału stopniowanego modelowanego 3D elementami skończonymi”, Raport wewn. Instytutu Maszyn Przepływowych PAN nr 63/2000.
- [134] **Otto E. i in.:** *Matematyka dla wydziałów budowlanych i mechanicznych (t. I-III)*, PWN, Warszawa 1973.
- [135] **Pascal J.-P., Sauvage G.:** Theoretischer Vergleich des dynamischen Verhaltens eines Hoch-geschwindigkeits-Drehgestells mit verschiedenen Radprofilen auf Schienen des Types UIC 60 mit einer Einbauneigung von 1/20 bzw. 1/40. "Systemdynamik der Eisenbahn, *VDI Fortschritt-Berichte* **820**, 1990, str. 11-24.
- [136] **Pawelczyk M.:** Dynamika zespołu napędowego lokomotywy w warunkach losowego oddziaływania toru, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Wydz. SiMR, Warszawa 1983.
- [137] **Pestel E. C., Leckie F. A.:** *Matrix methods in elasto-mechanics*, Mc. Graw-Hill Book Comp., New York 1963.
- [138] **Pfeiffer F.:** Theorie des Getrieberasselns, *VDI Berichte*, Nr. 697, 1988, str.45-65.
- [139] **Pielorz A.:** Application of torsional and longitudinal elastic waves in mechanical systems, *Rozprawy Inżynierskie (Engineering Transactions)*, 31, 4, 1983, str. 431-446.
- [140] **Pielorz A.:** Fale sprężyste w dyskretno-ciągłych układach mechanicznych, Prace IPPT PAN, 21/1992, *Praca habilitacyjna*.
- [141] **Pielorz A.:** Discrete-continuous models in the analysis of low structures subject to kinematic excitations caused by transversal waves, *Mechanika Teoretyczna i Stosowana (J. of Theoretical and Applied Mechanics)*, Vol. 34, No. 3, 1996, str. 547-566.
- [142] **Pielorz A.:** Nonlinear discrete-continuous models in dynamic investigations of plane truss members, *Rozprawy Inżynierskie (Engineering Transactions)*, 45, 1, 1997, str. 133-152.
- [143] **Pietrzakowski M.:** Simulation investigation of damping in nonlinear torsional discrete-continuous systems, *Machine Dynamics Problems*, Nr 3, 1992, str. 65-77.

- [144] **Piotrowski J., Grzesikiewicz W.:** On the development of the traction force between wheel and substrate. A selection of simple mathematical model, *Machine Dynamics Problems*, Vol. 17, 1997, str. 37-52.
- [145] **Popp K., Schiehlen W.:** *Fahrzeugdynamik*, Teubner B. G. (ed.), Stuttgart, 1993.
- [146] **Popp K., Kruse H., Kaiser I.:** Vehicle-track dynamics in the mid-frequency range, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 31, No. 5-6, 1999, str. 423-464.
- [147] **Prendergast P.J.:** Finite element models in tissue mechanics and ortopaedic implant design, *Clinical Biomechanics*, Vol.12 No. 6, 1997, str. 343-366.
- [148] **Press W. H., Flannery B. P., Teukolsky S. A., Vetterling W. T.:** *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge 1990.
- [149] **Prestl W.:** Zahnhämmern in Rädertrieben von Dieselmotoren, *VDI Fortschritt-Berichte*, Reihe 11, Nr. 145, 1991.
- [150] **Renger A.:** Dynamical analysis of pantograph and catenary system, Proc. of the 16<sup>th</sup> International Conf. on Dynamics of Machines, Stupava, Czechoslovakia, Vol. II, 1989, str. 46-53.
- [151] **Riemer M.:** Anwendung des Prinzips von Hamilton auf die mit konstanter Geschwindigkeit bewegte Seile, *Z. angew. Math. Mech.*, **66**, 1986 4, T 78-T 80.
- [152] **Ripke B.:** Hochfrequente Gleismodellierung und Simulation der Fahrzeug-Gleis-Dynamik unter Verwendung einer nichtlinearen Kontaktmechanik, *VDI Fortschritt-Berichte*, Reihe 12, Nr. 249, 1995.
- [153] **Rojek J., Kleiber M.:** Nonlinear dynamic FE analysis of structures consisting of rigid and deformable parts. Part I - Formulation. *Int. J. Struct. Eng. and Mech.*, Vol. 2, 1994, str. 313-326.
- [154] **Rojek J., Kleiber M.:** Nonlinear dynamic FE analysis of structures consisting of rigid and deformable parts. Part II - Computer implementation and test examples. *Int. J. Struct. Eng. and Mech.*, Vol. 2, 1994, str. 327-343.
- [155] **Rojek J., Jovicevic J., Oñate E.:** Industrial applications of sheet stamping simulation using new finite element models. *Int. Journal of Computer Modelling and Simulation in Engineering*, Vol. 3, 1998, str. 147-152.
- [156] **Rojek J., Oñate E., Postek E.:** Application of explicit FE codes to simulation of industrial sheet and bulk metal forming processes. *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 80-81, 1998, str. 620-627.
- [157] **Rojek J., Zienkiewicz O. C., Oñate E., Postek E.:** Advances in FE Explicit Formulation for Simulation of Metalforming Processes. *International Journal of Forming Processes*, Vol. 119/1-3, 2001, str. 41-47.
- [158] **Rojek J., Telega J. J., Stupkiewicz S.:** Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. Part I - Numerical implementation and application to implanted knee joints, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 3, **39**, 2001, str. 679-706.
- [159] **Rubio L., Jose J., Julio G.:** Analysis and evaluation of fatigue in turbogenerator shafts due to different perturbations of the electric network, Proc. of the 7<sup>th</sup> World Congress of the Theory of Machines and Mechanisms, IFToMM, Sevilla, Spain, Vol. 3, Pergamon Press 1987, str. 1789-1791.

- [160] **Schaber U., Stetter H.:** Berechnung gekoppelter Schwingungen von Welle und Beschaufelung in Turbomaschinen, Proc. of the 'Schwingungen in rotierenden Maschinen' Conference (SIRM'93) edited by the Verlag VIEWEG, Wiesbaden, Germany, 1993, str. 226-233.
- [161] **Schallenkamp A.:** Schwingungen von Trägern bei bewegten Lasten, *Ingenieur Archiv*, VIII, Band 3, Heft, 1937, str. 182-198.
- [162] **Schwibinger P., Nordmann R., Wohlrab R., Steigleder K., Wutsdorff P.:** Torsional vibrations in turbogenerators due to network disturbances, ASME, Proc. of the 11th Biennial Conference on Mechanical Vibration and Noise, Rotating Machinery Dynamics, Boston, Mass., DE-Vol. 2, 1987, str. 501-510.
- [163] **Schwibinger P., Nordmann R.:** Improvement of a reduced torsional model by means of parameter identification, Transactions of the ASME, *J. of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, No. **111**, 1989, str. 17-26.
- [164] **Seydel R.:** *Practical bifurcation and stability analysis. From equilibrium to chaos*, Springer-Verlag 1994.
- [165] **Sosnowski W., Kleiber M.:** A study on the influence of friction evolution on thickness changes in sheet metal forming, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol PRO060//1-4, pp 469-474, 1996.
- [166] **Sosnowski W.:** Nowe metody projektowania kształtu narzędzi do tłoczenia blach oparte na analizie wrażliwości, *Przegląd Mechaniczny*, nr 21-22, 2000, str. 15-19.
- [167] **Szcześniak W.:** Inercyjne obciążenia ruchome na belkach, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Prace naukowe - Budownictwo, z. 112, Warszawa 1990.
- [168] **Szcześniak W.:** Wybrane zagadnienia belek i powłok poddanych inercyjnym obciążeniom ruchomym, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Prace naukowe - Budownictwo, z. 125, Warszawa 1994.
- [169] **Szcześniak W.:** Drgania swobodne lepkosprężystej belki Timoshenki i tarczy, Mat. Konf. VIII rosyjsko-polskiego seminarium nt. „Teoretyczne Podstawy Budownictwa”, Wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1999, str. 111-133.
- [170] **Szcześniak W.:** O pewnej częstotliwości krytycznej w zagadnieniu własnym belki Timoshenki, Mat. Konf. „TRANSCOMP” nt. „Komputerowe systemy wspomagania nauki, przemysłu i transportu”, Zakopane 2000, Wyd. Politechniki Radomskiej, Radom 2000, str. 431-440.
- [171] **Szolc T.:** Modelowanie układów korbowych spalinowych silników tłokowych z wykorzystaniem skretnych fal sprężystych, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Praca Doktorska, 441/D, 1985 Warszawa.
- [172] **Szolc T., Nadolski W.:** Analiza dynamiczna modelu dyskretno-ciągłego układu korbowego silnika jednocylindrowego ze zmiennym masowym momentem bezwładności, *Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej*, Nr **31**, 'Mechanika', z. 12, 1986, str. 219-222.
- [173] **Szolc T.:** Badanie dynamicznego skrećania wału korbowego spalinowego silnika tłokowego za pomocą modelu dyskretno-ciągłego przy wykorzystaniu rozwiązań falowych równań ruchu, Zbiór referatów 26-tego Sympozjonu nt. "Modelowanie w mechanice", *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, Nr 54, 1987, str. 367-374.

- [174] **Szolec T., Bogacz R., Irretier H.:** Parameter identification of a hybrid model for vibration analysis using the finite element method, *Z. angew. Math. Mech.*, **71** 1991 4, T 207-T 209.
- [175] **Szolec T., Bogacz R.:** Standing and travelling wave approach for the transverse vibration analysis of the continuous system under moving load, Proc. of the Polish-German Workshop on "Dynamic Problems in Mechanical Systems", in Wierzba, Poland, in July 1993, IPPT, Warszawa 1993, str. 87-98.
- [176] **Szolec T., Bogacz R.:** An influence of gear teeth impacts on torsional vibrations of a discrete-continuous model of the drive system, Proc. of the 4th International Conference on Rotor Dynamics, IFToMM, Chicago, Sept. 1994, edited by the Vibration Institute, Willowbrook, Ill., U.S.A., str. 249-254.
- [177] **Szolec T.:** Experimental verification of the wave method for torsional vibration analysis, Final Report, Arbeitsbereich Meerestechnik II, Technische Universität Hamburg-Harburg, Hamburg 1995.
- [178] **Szolec T.:** Flexural-torsional vibration analysis of the discrete-continuous systems with non-linear boundary conditions, *Z. Angew. Math. Mech.*, **77** 1997, Suppl. 1, str. 327÷328.
- [179] **Szolec T.:** Medium frequency dynamic investigation of the railway wheelset-track system using a discrete-continuous model, *Archive of Applied Mechanics (Ingenieur Archiv)* Vol. 68, **1**, 1998, str. 30-45.
- [180] **Szolec T.:** Flexural-torsional vibration analysis for the rotating systems using discrete-continuous mechanical models, *Machine Dynamics Problems*, Vol. 20, 1998, str. 275-286.
- [181] **Szolec T.:** Simulation of bending-torsional-lateral vibrations of the railway wheelset-track system in the medium frequency range, *Vehicle System Dynamics*, Vol. 30, No. **6**, 1998, str. 473-508.
- [182] **Szolec T.:** Szczegółowa analiza dynamiczna układu napędowego zestawu kołowego lokomotywy, Raport wewnętrzny dot. realizacji Umowy "PAFAWAG"-Wrocław – "ZORPOT"-Kraków nr 25/R/97/EP 09/97 na temat: „Analiza dynamiczna i określenie kierunków modernizacji lokomotywy EP 09”, Warszawa, styczeń 1998, 48 stron.
- [183] **Szolec T.:** On dynamic interaction between the electric locomotive drive system and the track, Proc. of the 4<sup>th</sup> Int. Conference on Railway Bogies and Running Gears "Bogie'98", Ed. by I. Zobory, Technical University of Budapest, 1999, str. 153-162.
- [184] **Szolec T.:** An influence of dynamic interaction between the railway bogie and the track on the 'grumbling' noise generation, Proc. of the Int. Railway Conference RAILWAY NOISE'99 on "Noise Abatement of Railway Systems", Eds. of the Polish State Railway Research and Technical Centre CNTK-PKP, Warsaw, May 1999, 9 stron.
- [185] **Szolec T.:** On the discrete-continuous modeling of rotor systems for the analysis of coupled lateral-torsional vibrations, *International Journal of Rotating Machinery*, Vol. 6, Issue 2, 2000, str. 135-149.
- [186] **Szolec T.:** On discrete-continuous modelling of the railway bogie and the track for the medium frequency dynamic analysis, *Engineering Transactions*, No. **48**, 2, 2000, str. 153-198.

- [187] **Szorc T.**: Simulation of dynamic interaction between the railway bogie and the track in the medium frequency range, *Multibody System Dynamics*, 6, 2001, str. 99-122.
- [188] **Szorc T.**: Medium frequency dynamic analysis of various designs of the high-speed railway bogies, Proc. of the 7<sup>th</sup> Int. Mini-Conference on Vehicle System Dynamics, Identification and Anomalies "VSDIA'2000", Ed. by I. Zobory, Budapest University of Technology and Economy, Budapest, November 2000, str. 255-262.
- [189] **Szorc T., Nagórski Z., Piotrowski J.**: Simulation of vehicle-track interaction in the medium frequency range with application to analysis of mechanical and thermal loading in contact, *Vehicle System Dynamics - Supplement Vol. 37*, 2002, str. 641-652.
- [190] **Szorc T., Świdorski Z., Drożdżel J.**: Określenie trwałości eksploatacyjnej osi kolejowych zestawów kołowych na podstawie symulacji komputerowej dynamicznego oddziaływania układu jezdni z torem, *Pojazdy szynowe - Wydawnictwo OBRPSz- Poznań*, Nr 1/2002, str. 24-37.
- [191] **Шопп Б. Ф.**: Естественно закрученные стержни. В сб.: Прочность, устойчивость, колебания, т. 1, *Машиностроение*, 1968, str. 440-465.
- [192] **Thompson D. J.**: Theoretical modelling of wheel-rail noise generation, *Journal of Rail and Rapid Transit*, Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol. 25, 1991, str. 137-149.
- [193] **Tondl A.**: *Some Problems of Rotor Dynamics*, Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1965.
- [194] **Tödter J.**: Zur Simulation von Drehschwingungen in Antriebssystemen mit lokalen Nichtlinearitäten, *VDI Verlag*, Reihe 11, Nr. 168, 1992.
- [195] **Troeder Ch.**: Raport wewnętrzny Nr. 10128-B-01 firmy MEC GmbH-Alsdorf (RFN).
- [196] **Vohla G.-K.-W.**: Werkzeuge zur realitätsnahen Simulation der Laufdynamik von Schienenfahrzeugen, *VDI Fortschritt-Berichte*, Reihe 12, Nr. 270, 1996.
- [197] **von Madeyski T.**: Fahrwerkstechnik - im Zusammenwirken mit dem Fahrweg und dem Fahrzeuggkasten, *ETR*, 48, 1999, H. 9, str. 523-532.
- [198] **Walczyk Z.**: Metody analizy wpływu giętych drgań wirników na dynamiczny stan wirnikowych maszyn energetycznych, *Zeszyty Naukowe Instytutu Maszyn Przepływowych P.A.N., Gdańsk*, (Cz. II 278/1211/89), (Cz. III 243/1173/87), (Cz. IV 251/1174/87), (Cz. V 258/1190/88), (Cz. VI 292/1218/89).
- [199] **Walczyk Z., Kiciński J.**: *Dynamika turbozespołów energetycznych*, Wyd. Polit. Gdańskiej, Gdańsk 2001.
- [200] **Zhang J., Knothe K.**: Berechnungsmodell für Tangentialschlupfkkräfte beim Kontakt in der Hohlkehle, *Report of the Institut für Luft- und Raumfahrt der Technischen Universität Berlin*, ILR-Mitteilung **294**, 1995.
- [201] **Ziamba S.**: *Analiza drgań*, PWN Warszawa, t. I 1957, t. II 1959.
- [202] **Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.**: *The Finite Element Method*, Vol. 1-3, Fifth Edition, Butterworth-Heinemann 2000.