

## DYSKRETNA OPTIMALIZACJA KONSTRUKCJI STEROWANA ZMIENNYMI STANU

BARTŁOMIEJ BŁACHOWSKI†, WITOLD GUTKOWSKI‡

†Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Świętokrzyska 21, 00-049 Warszawa

‡Instytut Mechanizacji Budownictwa I Górnictwa Skalnego, Racjonalizacji 6/8, 02-673 Warszawa  
e-mail: bblach@ippt.gov.pl, wgutkow@ippt.gov.pl

Streszczenie. W pracy przedstawiony został relatywnie prosty algorytm dyskretnej optymalizacji konstrukcji ze względu na minimum ciężaru. Zasadnicza idea algorytmu polega na wylosowaniu przekrojów startowych dla rozpatrywanej konstrukcji, a następnie poszukiwaniu prętów o najmniejszym wyężeniu. Drugi etap algorytmu to zmniejszenie przekroju pręta z minimalnym napężeniem o jedną pozycję katalogową. Redukcja przekroju prowadzona jest aż do momentu osiągnięcia ograniczeń. Prezentowany algorytm zweryfikowany został na przykładach obliczeniowych o złożoności  $10^{10}$  i  $30^8$  kombinacji.

### 1. WSTĘP

W wielu zagadnieniach inżynierskich projektowanie polega na doborze, z danego katalogu, odpowiedniego zestawu elementów. Takiego zestawu, który zapewnia minimalizację funkcji celu, przy spełnieniu założonych ograniczeń.

W realnych problemach optymalizacji dyskretnej liczba dopuszczalnych rozwiązań jest bardzo duża, sięga liczby  $10^{10}$  i więcej. W takiej sytuacji proces bezpośredniego przeglądu wszystkich rozwiązań w celu znalezienia najlepszego z nich jest po prostu niemożliwy.

Stąd też w optymalizacji dyskretnej powszechnie wykorzystywane są metody stochastyczne. Do najbardziej znanych zaliczyć można algorytmy genetyczne i optymalizację ewolucyjną. Istnieją również metody pokrewne jak Particle Swarm (Kitayama, 2006) czy Harmony Search (Lee, 2005). Jak wiadomo, zastosowanie tych metod wymaga sporego doświadczenia i stosunkowo dużej liczby iteracji (dziesiątki tysięcy i więcej).

Ze względu na wspomniane niedogodności, w niniejszej pracy do rozwiązywania zagadnień dyskretnej optymalizacji konstrukcji wykorzystana została metoda zorientowana problemowo. Metoda ta bazuje na sekwencyjnym usuwaniu z konstrukcji nadmiaru materiału. Od projektującego wymaga się jedynie znajomości równań stanu w postaci przedstawianej w metodzie elementów skończonych.

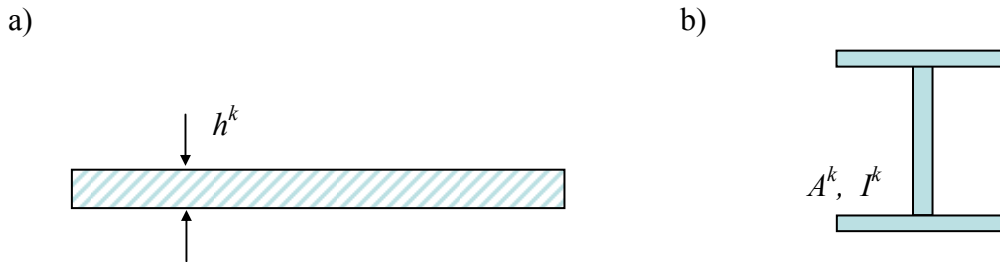
Algorytm został zilustrowany przykładami płaskiej i przestrzennej kratownicy, złożonej odpowiednio z dziesięciu i dwudziestu pięciu prętów. Ponadto przeprowadzono walidację metody, przyjmując za parametry katalogowe wielkości otrzymane z rozwiązania ciągłego. Ten stosunkowo prosty algorytm daje rozwiązania w granicach kilku procent odbiegających od rozwiązania ścisłego.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZADANIA

### 2.1. Założenia

Konstrukcja o zadanej topologii składa się z  $j^0$  elementów wykonanych z materiału liniowo sprężystego. Rozważania prowadzone są w zakresie małych przemieszczeń i odkształceń w całej konstrukcji.

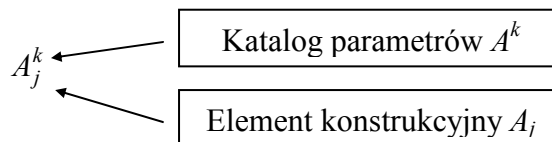
Zmiennymi projektowymi mogą być grubość blachy  $h^k$  (rys.1a), pole przekroju poprzecznego  $A^k$  i/lub moment bezwładności  $I^k$  belki (rys.1b).



Rys.1. Zmienne projektowe w dyskretnej optymalizacji konstrukcji.

### 2.2. Optymalizacja konstrukcji ze względu minimum ciężaru

Dla konstrukcji składającej się z  $j^0$  prętów (lub grup prętów) należy tak dobrać pola przekrojów prętów z listy (katalogu)  $k^0$  wartości, aby ciężar (objętość) konstrukcji był minimalny.



Problem znalezienia konstrukcji o minimalnym ciężarze przedstawia się następująco: Należy znaleźć minimum funkcji celu

$$f = \sum_{j=1}^{j^0} A_j l_j \quad (1)$$

gdzie  $l_j$  to długości poszczególnych prętów, przy nałożonych ograniczeniach statycznych postaci:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{u}_q - \mathbf{Q}_q &= 0 \\ q &= 1, 2, \dots, q_0 \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie  $q_0$  liczba niezależnych przypadków obciążenia.

Ograniczenia nierównościowe w omawianym problemie to:

- Największe i najmniejsze wartości skatalogowanych parametrów

$$A^1 \text{ i } A^{k^0}$$

- Maksymalne naprężenia i przemieszczenia

$$-\sigma_0 \leq \sigma_j^k \leq \sigma_0 \quad -u_0 \leq u_q \leq u_0$$

### 3. ALGORYTM OPTIMALIZACJI DYSKRETNEJ

Prezentowany w tej pracy algorytm optymalizacji dyskretnej jest rozszerzeniem idei zaprezentowanej w pracy [3].

#### 3.1. Algorytm podstawowy

Krok I. Uporządkuj wartości katalogowe wg malejących wartości.

$$A^1 > A^2 > A^3 > \dots > A^{k^0-1} > A^{k^0}$$

Krok II. Przypisz wszystkim elementom konstrukcyjnym (EK), największe możliwe parametry ( $k=1$ )

$A_1^1$	$A_2^1$	...	$A_{j_0-1}^1$	$A_{j_0}^1$
---------	---------	-----	---------------	-------------

Krok III. Wykonaj analizę statyczną w celu znalezienia naprężeń w całej konstrukcji

$\sigma_2^1$	$\sigma_{j_0}^1$	...	$\sigma_{j_0-1}^1$	$\sigma_{j_0}^1$
--------------	------------------	-----	--------------------	------------------

Krok IV. Usuń materiał w elemencie z najmniejszym wskaźnikiem  $\frac{\sigma_j^k}{\sigma_0}$  przez przypisanie temu elementowi kolejnej mniejszej wartości z katalogu ( $k=2$ )

Krok V. Sprawdź czy są spełnione ograniczenia, tzn. idź do kroku 3.

Krok VI. Jeżeli ograniczenia są naruszone, przywróć poprzednią wartość parametru.

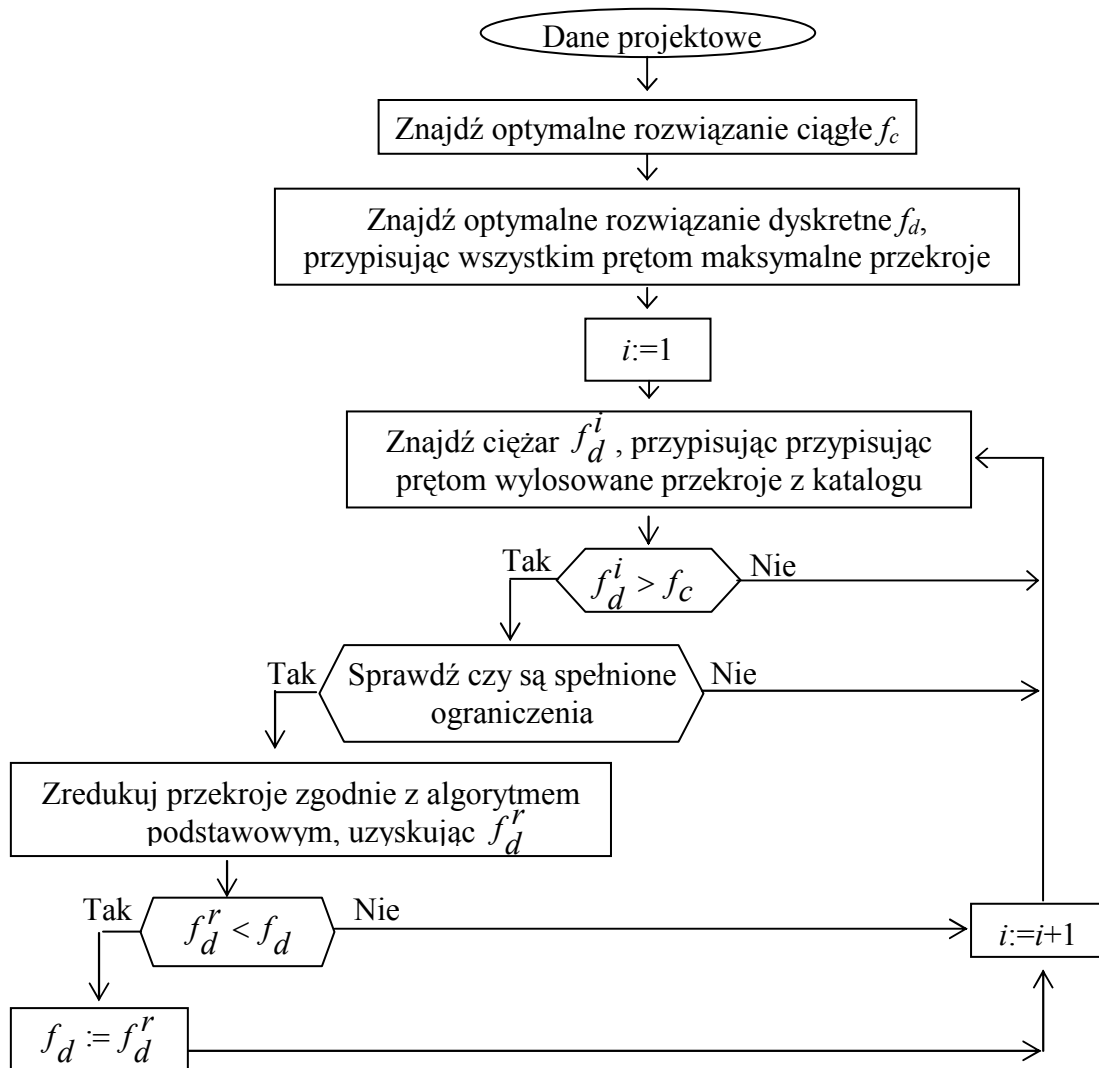
Krok VII. Powtarzaj krok V i/lub krok III, dopóki ostatni element konstrukcyjny nie uzyska minimalnej dozwolonej wartości.

#### 3.2. Algorytm iteracyjny z losowaniem przekrojów startowych

Bazując na opisanym w punkcie 3.1 algorytmie podstawowym, kolejno zaproponowano algorytm iteracyjny.

Pierwszy etap algorytmu iteracyjnego to rozwiązanie zadania optymalizacji przy założeniu, że zmienne decyzyjne przyjmują wartości ze zbioru ciągłego. Drugi etap to wyznaczenie na podstawie algorytmu podstawowego rozwiązania dyskretnego po przypisaniu wszystkim przekrojom największych możliwych wartości katalogowych. Następnie ciężar konstrukcji z rozwiązania ciągłego jest porównywany z ciężarem konstrukcji z wylosowanymi wartościami przekrojów. Jeśli ciężar ten jest większy od konstrukcji z rozwiązania ciągłego, sprawdzane są ograniczenia, w przeciwnym razie wylosowane przekroje startowe są odrzucane i losowanie przeprowadzane jest ponownie. Jeśli spełnione są ograniczenia uruchamiany jest algorytm podstawowy. W wyniku iteracyjnego losowania otrzymujemy szereg rozwiązań dyskretnych, z których za optymalne uznawane jest to dające konstrukcję najlżejszą.

Finalnie algorytm iteracyjny przedstawiono w postaci schematu blokowego na rys.2.



Rys.2. Schemat blokowy algorytmu iteracyjnego.

#### 4. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

##### 4.1. Kratownica płaska

Jako pierwszy przykład wykorzystano tzn. benchmark problem, rozwiązywany uprzednio w pracy [4] jako zadanie ciągłe przy użyciu metody gradientowej (rys.3).

W angielskich jednostkach moduł Younga przyjęto jako  $E = 10^4$  ksi, natomiast ograniczenia naprężeniowe i przemieszczeniowe wynoszą:

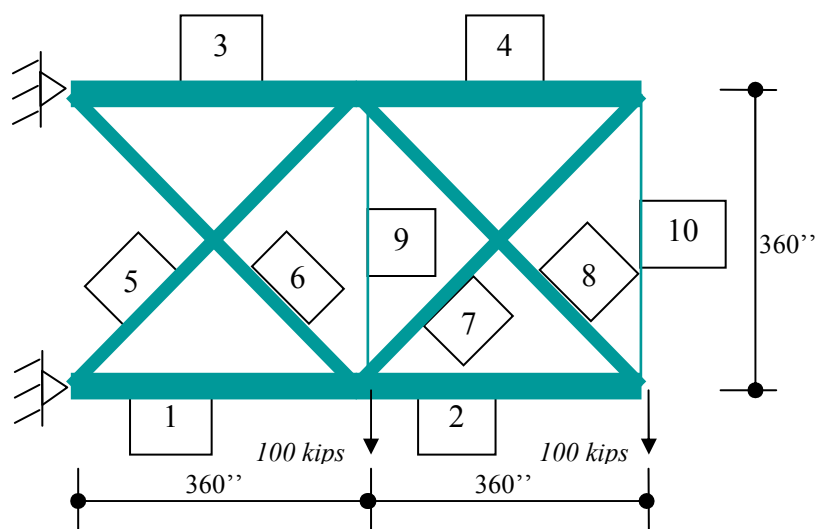
$$\begin{aligned}
 -25 \text{ ksi} &\leq \sigma \leq 25 \text{ ksi} && \text{– dla przypadku 1 i 2} \\
 -2 \text{ in.} &\leq u \leq 2 \text{ in.} && \text{– dla przypadku 2}
 \end{aligned}$$

Katalogi przekrojów, w calach do kwadratu, utworzono korzystając z rozwiązania ciągłego jako:

$A^k = [8.0621, 7.9379, 5.7477, 5.5690, 3.9379, 0.1000]$  – dla przypadku obciążenia nr 1 oraz ograniczeń naprężeniowych,

$A^k = [30.0310, 10.0520, 8.5592, 5.5830, 3.9478, 2.7545, 2.0522, 0.1000]$  – dla przypadku obciążenia nr 2 i ograniczeń naprężeniowych i przemieszczeniowych.

Wyniki obliczeń metodą iteracyjną przedstawiono w tabeli 1.



Rys.3. 10-cio prętowa kratownica przestrzenna.

Tabela 1. Porównanie rozwiązania ciągłego i dyskretnego dla kratownicy płaskiej.

Nr EK	Rozwiązanie ciągłe (Haug) Przypadek 1	Rozwiązanie dyskretnie Ograniczenia $\sigma$	Rozwiązanie ciągłe (Haug) Przypadek 2	Rozwiązanie dyskretnie Ograniczenia $\sigma, u$
1	7.9379	7.9379	30.0310	30.0310
2	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
3	8.0621	8.0621	10.0520	23.2740
4	3.9379	3.9379	3.9478	15.2860
5	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
6	0.1000	0.1000	2.0522	0.1000
7	5.7477	5.7477	8.5592	15.2860
8	5.5690	5.5690	2.7545	21.1980
9	5.5690	5.5690	5.5830	21.1980
10	0.1000	0.1000	0.1000	0.1000
<b>Ciężar (lb)</b>	<b>1593.2</b>	<b>1593.2</b>	<b>5061.6</b>	<b>5389.8</b>

## 4.2. Kratownica przestrzenna

Kolejnym przykładem omawianym w niniejszym artykule jest kratownica przestrzenna (rys.4), której optymalizację dyskretną metodą Harmony Search zamieszczono pracy [2]. W tym przykładzie również rozważano dwa przypadki, jednakże tym razem przy obydwu uwzględniono ograniczenia naprężeniowe i przemieszczeniowe postaci

$$-40 \text{ ksi} \leq \sigma \leq 40 \text{ ksi}$$

$$-0.35 \text{ in.} \leq u \leq 0.35 \text{ in.}$$

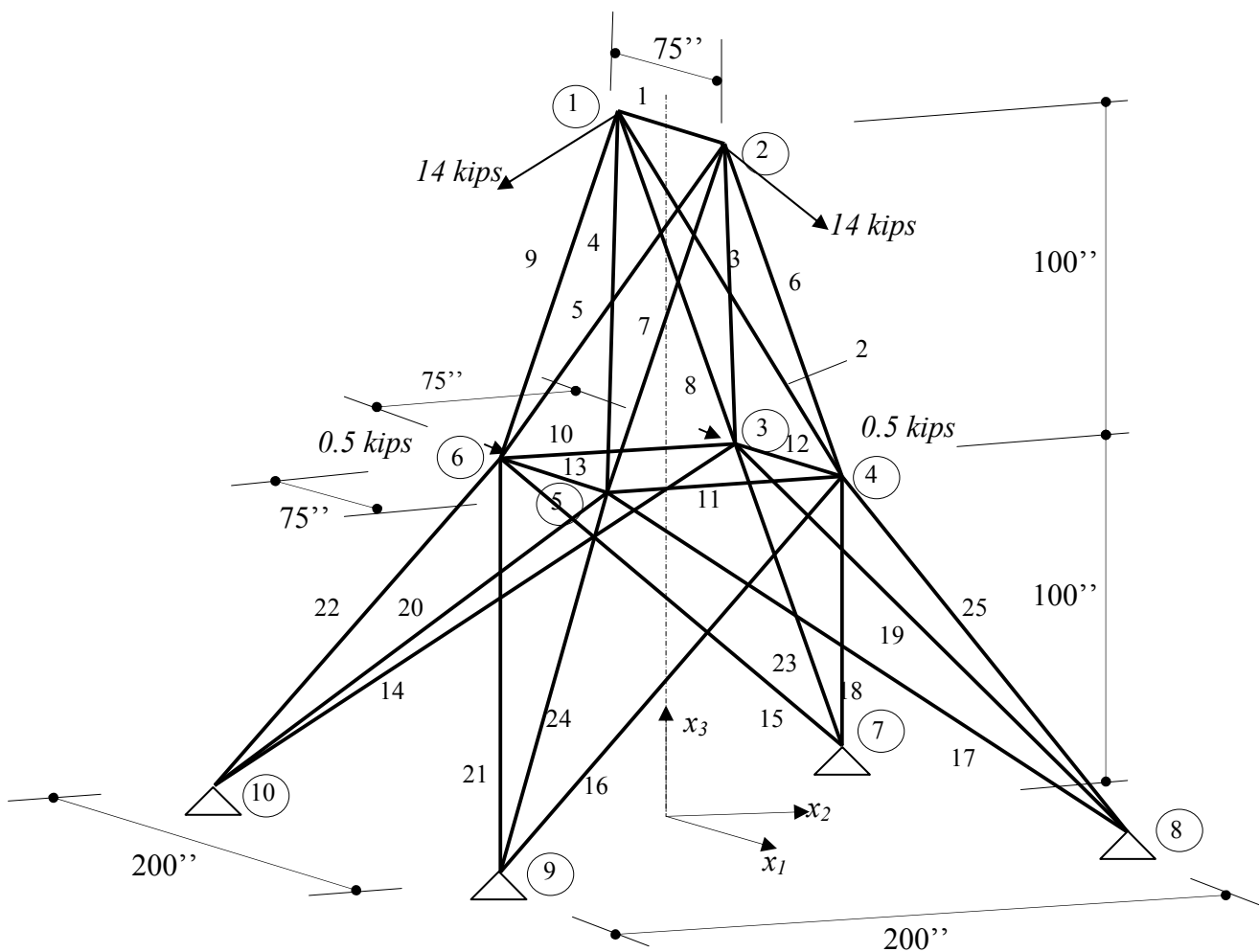
Różnica polegała natomiast na występowaniu w drugim przypadku jednocześnie dwóch układów obciążenia.

Katalogi przekrojów poprzecznych przyjęto jako:

$Ak = [3.4, 3.2, 3.0, 2.8, 2.6 \text{ co } 0.1 \text{ do } 0.1]$  – dla przypadku nr 1

$Ak = [6.0 \text{ co } 0.4 \text{ do } 0.4, 0.01]$  – dla przypadku 2

Wyniki obliczeń dla kratownicy przestrzennej przedstawiono w tabeli 2.



Rys.4. 25- prętowa kratownica przestrzenna.

## 5. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono bardzo prosty i krzepki algorytm do znajdowania minimum ciężaru (bądź rozwiązań bliskich minimum) konstrukcji przy ograniczenia naprężeniowych i przemieszczeniowych. Dla rozpatrywanych przykładów numerycznych algorytm wymagał o dwa rzędy wielkości mniej analiz statycznych niż w przypadku algorytmów ewolucyjnych i inne metod stochastycznych. Do wykorzystania algorytmu wymagana jest jedynie znajomość metody elementów skończonych.

Tabela 2. Porównanie rozwiązania ciągłego i dyskretnego dla kratownicy przestrzennej.

Zmienne projektowe $A_i$ (in. <sup>2</sup> )	Algorytm HS (Lee i inni) <i>Przypadek 1</i>	Proponowany algorytm dla $m=10$	Algorytm HS (Lee i inni) <i>Przypadek 2</i>	Proponowany algorytm dla $m=10$
1. $A_1$	0.1000	0.1000	0.0100	0.0100
2. $A_2$ - $A_5$	0.3000	2.1000	2.0000	3.6000
3. $A_6$ - $A_9$	3.4000	2.3000	3.6000	3.2000
4. $A_{10}$ - $A_{11}$	0.1000	0.1000	0.0100	0.0100
5. $A_{12}$ - $A_{13}$	2.1000	0.1000	0.0100	0.0100
6. $A_{14}$ - $A_{17}$	1.0000	0.9000	0.8000	0.4000
7. $A_{18}$ - $A_{21}$	0.5000	0.9000	1.6000	1.2000
8. $A_{22}$ - $A_{25}$	3.4000	3.4000	2.4000	3.2000
<b>Ciężar (lb)</b>	<b>484.8542</b>	<b>523.5620</b>	<b>560.5916</b>	<b>611.7688</b>
<b>Liczba analiz MES</b>	<b>14163</b>	<b>178</b>	<b>27847</b>	<b>52</b>

## LITERATURA

1. Kitayama, S., Arakawa, M., Yamazaki, K.: Penalty function approach for the mixed discrete nonlinear problems by particle swarm optimization. "Struct Multidisc Optim." 2006, 32(3), p. 191-202.
2. Lee, K.S., Geem, Z.W., Lee, S., Bae, K.W.: The harmony search heuristic algorithm for discrete structural optimization. "Engineering Optimization" 2005, 37(7), p. 663-684.
3. Gutkowski W., Bauer J., Zawidzka J.: An effective method for discrete structural optimization. "Eng. Comp" 2000, I. J. 17, 4, 2000, p. 417-426.
4. Haug, E.J., Arora, J.S.: Applied optimal design. New York : John Wiley & Sons, 1979.

## **DISCRETE STRUCTURAL OPTIMIZATION CONTROLLED BY STATE VARIABLES**

Summary. A very simple discrete optimization algorithm for minimum structural weight is presented. The main idea consists in assigning initial cross-sections to a given structure, and then searching for its least stressed elements. In the second stage of the algorithm, the cross-section of the element with minimum stress is reduced to the next catalogue entry. Such reduction of cross-sections is continued until imposed bounds are met. The presented algorithm was positively tested on example configurations with complexity of  $10^{10}$  and  $30^8$  combinations.